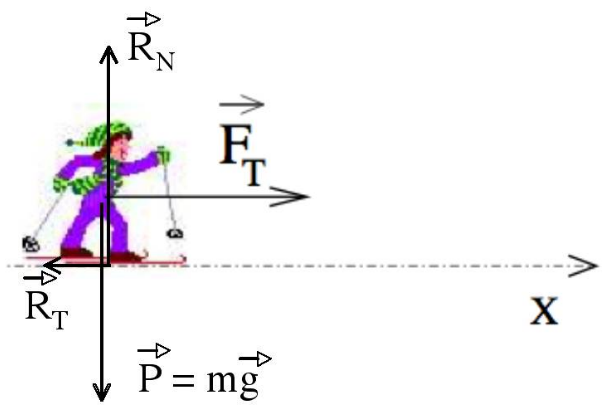
Partiel du 3 mars 2007 : corrigé

1 Ski acrobatique

1.1 Accélération par moto-neige

1.1.1

Les forces s'appliquant sur le skieur lorsqu'il est tracté par la moto-neige sont la force de traction, $\vec{F}_{\mathrm{T}} = F_{\mathrm{T}}\vec{e}_x$, le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, et la réaction du support (piste de ski), R, qui se décompose suivant une composante normale, $\vec{R}_{\mathrm{N}} = R_{\mathrm{N}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$ et une composante tangentielle, $\vec{R}_{\mathrm{T}} = -R_{\mathrm{T}}\vec{e}_{\mathrm{x}}$, cette dernière n'étant rien d'autre que la force de frottement, opposée au glissement du skieur : $\vec{R} = \vec{R}_{\mathrm{T}} + \vec{R}_{\mathrm{N}}$.



1.1.2

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$. Les forces s'exerçant sur l'axe vertical s'annulent à chaque instant, puisque la réaction verticale de la piste "réagit" simplement au poids du skieur en l'empêchant de s'enfoncer dans le sol et que la force de traction est purement horizontale. Le mouvement du skieur est donc lui-même horizontal, avec $\vec{V}(t) = V(t)\vec{e}_x$.

En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe (Ox), on obtient alors

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{T}} - R_{\mathrm{T}}, \qquad (1)$$

où la norme de la réaction tangentielle (force de frottement solide) est liée à la réaction normale suivant la formule habituelle :

$$R_{\mathrm{T}} = \mu R_{\mathrm{N}}, \qquad (2)$$

par définition du coefficient de frottement dynamique, μ.

Par ailleurs, l'équilibre des forces suivant l'axe vertical permet de déterminer la réaction normale, qui s'oppose directement au poids et vaut donc à tout instant $R_{\mathrm{N}} = mg$. Le module de la force de frottement peut donc être réécrite :

$$R_{\mathrm{T}} = \mu mg. \qquad (3)$$

Phase de traction : $0 < t < t_T$:

Pendant la phase de traction, où la force F_T est appliquée, l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F_T}{m} - \mu g, \tag{4}$$

qui s'intègre facilement (puisque tous les termes du membre de droite sont constants) pour donner l'expression du module de la vitesse :

$$V(t) = (\frac{F_T}{m} - \mu g)t, \tag{5}$$

avec une constante d'intégration nulle, puisque la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$.

Après la traction : $t_T < t$:

Cette fois, seule la force de frottement agit sur le skieur, et l'équation (1) devient :

$$\frac{dV}{dt} = -\mu g, \tag{6}$$

qui s'intègre facilement en

$$V(t) = -\mu g t + \text{cte}, \tag{7}$$

où la constante se calcule en notant qu'à l'instant t_T, la vitesse du skieur est égale à V_T, de sorte que $-\mu g t_T + \text{cte} = V_T$, et par conséquent :

$$V(t) = V_T - \mu g(t - t_T). \tag{8}$$

Nous avons donc montré que la vitesse s'exprime toujours suivant la forme $\vec{V}(t) = (\alpha t + \beta)\vec{e}_x$, où le couple (α, β) vaut $(F_T/m - \mu g, 0)$ pendant la phase de traction, et $(-\mu g, V_T + \mu g t_T)$ ensuite.

La vitesse à l'instant t_T s'obtient simplement à partir de l'équation (5) :

$$V_T = (\frac{F_T}{m} - \mu g)t_T = 20\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 72\,\text{km/h}. \tag{9}$$

1.1.3

Par définition, le travail de la force de traction développée par la moto-neige s'écrit comme l'intégrale des travaux élémentaires $\delta W = \vec{F}_T \cdot \vec{\delta x}$, sur toute la longueur parcourue par le skieur pendant la phase de traction – appelons-la L_T —, c'est-à-dire de l'abscisse $x = 0$ (prise par convention à la position initiale du skieur) à l'abscisse $x = L_T$:

$$W(\vec{F}_T) = \int_0^{L_T} \vec{F}_T \cdot \vec{\delta x} = \int_0^{L_T} F_T dx = F_T L_T, \tag{10}$$

puisque la force de traction est constante.

Il s'agit donc simplement de calculer la longueur L_T, qui s'obtient par simple intégration de l'expression de la vitesse, de $t = 0$ à t_T :

$$L_T = \int_0^{t_T} V(t)dt = \frac{1}{2}(\frac{F_T}{m} - \mu g)t_T^2 = 200\,\text{m}. \tag{11}$$

Le travail de la force de traction s'en déduit immédiatement :

$$W(\vec{F}_T) = F_T L_T = 22kJ. \tag{12}$$

1.1.4

Après la phase de traction, le skieur n'est plus soumis qu'à son poids, ainsi qu'à la réaction de la piste. Le poids étant dirigé verticalement, c'est-à-dire perpendiculairement à la piste, il ne travaille pas au cours du mouvement horizontal. De même pour la composante normale de la réaction, à savoir $\vec{R}_{\mathrm{N}}$. La seule force effectuant un travail non nul est donc la réaction tangentielle, ou force de frottement. Cette force s'oppose au mouvement, et par conséquent le skieur subit une décélération, dont l'intensité est d'ailleurs constante, égale à μmg, ainsi que nous l'avons déjà obtenu à l'équation (3).

1.1.5

Au début de la phase de décélération, la vitesse vaut V_{T}, calculée plus haut. À la fin de cette phase, la vitesse est nulle. Au cours de la décélération, l'énergie cinétique du skieur (calculée dans le référentiel de la piste) a donc subi une variation égale à :

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2} m V_{\mathrm{T}}^2. \tag{13}$$

Le théorème de l'énergie cinétique indique que cette variation est égale au travail des forces de frottement, qui se calcule simplement (puisque la force est constante) entre $x = L_{\mathrm{T}}$ et $x = L_{\mathrm{T}} + d_{\mathrm{f}}$:

$$W = \int_{L_{\mathrm{T}}}^{L_{\mathrm{T}}+d_{\mathrm{f}}} -R_{\mathrm{T}} \mathrm{d}x = -\mu mg \times d_{\mathrm{f}}. \tag{14}$$

En égalant W à ΔE_{c}, on obtient directement la longueur d'arrêt, d_{f} :

$$d_{\mathrm{f}} = \frac{V_{\mathrm{T}}^2}{2\mu g} = 2\,\mathrm{km}. \tag{15}$$

1.2 Saut à ski

1.2.1

Les forces de frottement étant négligées, aucune dissipation d'énergie n'a lieu, et le skieur conserve donc son énergie mécanique. On peut dire également que la réaction du tremplin est orthogonale au mouvement et ne travaille donc pas, tandis que l'autre force s'exerçant sur le skieur, à savoir son poids, est une force conservative, ne donnant pas lieu à des variations de l'énergie mécanique (puisque celle-ci inclue justement l'énergie potentielle associée à la force).

1.2.2

En s'élevant d'une hauteur H, le skieur voit son énergie potentielle (associée à la force de pesanteur) augmenter d'une quantité $\Delta E_{\mathrm{p}} = mgH$. Ce faisant, son énergie cinétique doit diminuer d'autant (puisque la somme $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{c}}$ est constante). L'énergie cinétique ne pouvant être négative, le skieur peut perdre au maximum $|\Delta E_{\mathrm{c}}| = \frac{1}{2} m V_{\mathrm{T}}^2$. Pour qu'il puisse atteindre le sommet du tremplin, il faut donc que se "réservoir d'énergie" soit supérieur à l'énergie potentielle qu'il aura acquise en haut du tremplin. D'où :

$$\frac{1}{2} m V_{\mathrm{T}}^2 \geq mgH. \tag{16}$$

On en déduit la vitesse d'entrée minimale :

$$V_{\min} = \sqrt{2gH}. \tag{17}$$

Toujours en vertu de la conservation de l'énergie mécanique, on peut dire que la variation de l'énergie cinétique du skieur entre l'entrée du tremplin ($\frac{1}{2}mV_{\mathrm{T}}^2$) et son sommet ($\frac{1}{2}mV_{\mathrm{saut}}^2$) est égale à $-\Delta E_{\mathrm{p}}$. D'où :

$$\frac{1}{2}m(V_{\mathrm{T}}^2 - V_{\mathrm{saut}}^2) = mgH, \quad \text{soit} \quad V_{\mathrm{saut}} = \sqrt{V_{\mathrm{T}}^2 - 2gH}. \tag{18}$$

(NB : on retrouve le fait que V_{T}^2 doit être supérieur à $2gH$ pour que le skieur atteigne le sommet du tremplin : sinon, le terme sous la racine carrée est négatif !)

1.2.3

Après le décollage du skieur, la seule force s'exerçant sur le skieur est son poids, qui a une composante nulle suivant $\vec{e}_x$. En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur cet axe, on a donc

$$m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{19}$$

et par conséquent la composante horizontale de la vitesse, V_x, demeure constante, égale à ce qu'elle vaut au moment du saut, c'est-à-dire :

$$V_x = V_{\mathrm{saut}} \cos\theta. \tag{20}$$

Au cours de la phase de montée, la réaction du tremplin, qui lui est orthogonale, a une composante non nulle sur l'axe (Ox) – en l'occurrence, cette composante vaut $-R_{\mathrm{N}} \sin\theta$. En projection sur cet axe, la relation fondamentale de la dynamique indique donc que le skieur subit une décélération et que la composante V_x de sa vitesse diminue.

1.2.4

Au moment où il atteint sa hauteur maximale, le skieur a une vitesse verticale nulle. En effet, si elle était positive, il continuerait à monter (vers une hauteur encore supérieure), et si elle était négative, c'est qu'il serait déjà en train de descendre et qu'il viendrait donc d'une hauteur supérieure !

[NB : on peut également voir la question du point de vue mathématique, et réaliser que la composante verticale de la vitesse, V_z, est simplement la dérivée par rapport au temps de l'altitude du skieur : $V_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, qui s'annule donc lorsque z est maximale.]

Au sommet de son saut, le skieur a donc pour vitesse $\vec{V} = V_x\vec{e}_x$, de sorte que son énergie cinétique vaut :

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mV_x^2 = \frac{1}{2}mV_{\mathrm{saut}}^2 \cos^2\theta = (\frac{1}{2}mV_{\mathrm{T}}^2 - mgH)\cos^2\theta. \tag{21}$$

On peut donc écrire la conservation de l'énergie mécanique entre l'entrée du tremplin (à $z = 0$, avec $V = V_{\mathrm{T}}$) et le sommet du saut (à $z = h_{\mathrm{max}}$ et $V = V_x = V_{\mathrm{saut}} \cos\theta$) :

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{T}}^2 + 0 = (\frac{1}{2}mV_{\mathrm{T}}^2 - mgH)\cos^2\theta + mgh_{\mathrm{max}}, \tag{22}$$

d'où l'on tire la valeur de h_{max} :

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{V_{\mathrm{T}}^2}{2g}\sin^2\theta + H\cos^2\theta = H + (\frac{V_{\mathrm{T}}^2}{2g} - H)\sin^2\theta \tag{23}$$

L'application numérique donne : $h_{\mathrm{max}} = 8.75$ m.

1.2.5

D'après l'expression précédente, la fonction $h_{\max}$ est une fonction croissante de θ, pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (puisque c'est le cas de la fonction $\sin^2\theta$). Son maximum est donc atteint en $\theta = \pi/2$, ce qui correspond à un tremplin vertical ! Ce cas est irréaliste, car après sa phase d'accélération, le skieur verrait le tremplin comme un mur !

Mais le skieur pourrait éventuellement emprunter un tel tremplin vertical à l'aide d'une portion de piste arrondie. S'élevant alors verticalement au dessus de la piste, il atteindrait une hauteur maximale, égale à $V_{\mathrm{T}}^2/2g$, avant de retomber verticalement sur le tremplin lui-même. Gare à l'atterrissage ! (NB : Le retour sur le tremplin peut toutefois se faire sans dommage, tangentiellement à la trajectoire verticale orientée vers le bas...)

2 Hockey sur glace

2.1 Collision frontale

2.1.1

Le système constitué par les deux joueurs de hockey est isolé, puisque les frottements sont négligés. Par conséquent, la quantité de mouvement globale du système se conserve lors du choc. [En vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, la force subie par l'un des joueurs, qui fait varier sa quantité de mouvement individuelle, est égale et opposée à la force subie par l'autre joueur, dont la quantité de mouvement varie donc d'une quantité égale et opposée...]

L'énergie mécanique du système, quant à elle, n'est pas nécessairement conservée, car de l'énergie peut-être dissipée au moment de la collision. On peut même montrer qu'il en est nécessairement ainsi dans ce cas : cf. ci-dessous.

Enfin, comme pour la quantité de mouvement, le moment cinétique du système (par rapport à n'importe quel point) se conserve, puisqu'il est isolé.

On se place dans le référentiel de la patinoire. Avant le choc, la quantité de mouvement de l'attaquant (joueur 1) et celle du défenseur (joueur 2) valent respectivement :

$$\vec{p}_1 = m\vec{V}_0, \quad \text{et} \quad \vec{p}_2 = \vec{0}. \tag{24}$$

Après la collision, les deux hockeyeurs ont la même vitesse, $\vec{V}'$, et une masse conjointe $M' = M + m$, ce qui donne une quantité de mouvement :

$$\vec{p}' = (M+m)\vec{V}'. \tag{25}$$

La conservation de la quantité de mouvement s'exprime donc par :

$$(M+m)\vec{V}' = m\vec{V}_0, \quad \text{soit} \quad \vec{V}' = \frac{1}{1+\gamma}\vec{V}_0. \tag{26}$$

Comme on le voit, la vitesse des deux joueurs après la collision est colinéaire à la vitesse initiale de l'attaquant : l'ensemble du mouvement a donc lieu dans cette seule direction. Étant frontale, la collision se fait par définition suivant l'axe reliant les centres de gravité des deux hockeyeurs, de sorte que le moment cinétique individuel des joueurs par rapport à leur centre de gravité propre demeure constant (le moment des forces est étant nul) et donc égal à rotation (pas de rotation initiale). La collision frontale n'engendre donc aucun rotation, ce qui n'est plus le cas dans la deuxième partie de l'exercice...

2.1.2

La variation d'énergie cinétique des deux joueurs se calcule simplement :

$$\Delta E_{\mathrm{c},1} = \frac{1}{2}mV'^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{2}mV_0^2[1 - \frac{1}{(1+\gamma)^2}], \tag{27}$$

et

$$\Delta E_{\mathrm{c},2} = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}mV_0^2\frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}. \tag{28}$$

La variation de l'énergie cinétique globale vaut donc :

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = \Delta E_{\mathrm{c},1} + \Delta E_{\mathrm{c},2} = -\frac{1}{2}mV_0^2\,\frac{\gamma}{\gamma+1}. \tag{29}$$

Cette quantité est toujours négative (elle n'est nulle que dans la limite où γ tend vers 0, qui revient à dire que la collision n'a strictement aucun effet mécanique, ou, si l'on veut, qu'il n'y a pas de collision !). L'énergie cinétique n'est donc pas conservée lors de la collision, qui est alors dite inélastique. Toutefois, l'énergie globale se conserve (toujours !) : c'est sous forme de chaleur – à l'échelle microscopique, donc – que l'énergie est dissipée, ainsi peut-être que dans la déformation de certains matériaux, comme par exemple, la fracture de quelques os, crosses ou dents humaines... Vive le sport !

2.1.3

D'après l'équation (30), il est clair que la vitesse des deux joueurs après la collision sera d'autant plus faible que le rapport $\gamma = M/m$ sera élevé. L'énergie cinétique acquise par le défenseur sera alors plus faible, comme l'indique l'équation (28).

2.1.4

Écrivons à nouveau la conservation de la quantité de mouvement totale des deux joueurs. La seule modification à apporter aux expressions (24) et (25) concerne la quantité de mouvement du défenseur, qui devient $\vec{p}_2 = -\beta M\vec{V}_0$. On en déduit la valeur de $\vec{V}'$ par :

$$(M+m)\vec{V}' = (m-\beta M)\vec{V}_0, \quad \text{soit} \quad \vec{V}' = \frac{m-\beta M}{m+M}\vec{V}_0 = \frac{1-\beta\gamma}{1+\gamma}\vec{V}_0. \tag{30}$$

Les deux joueurs se déplacent donc après collision dans le sens opposé à $\vec{V}_0$ à condition que l'on ait :

$$m - \beta M < 0, \quad \text{soit} \quad M > \frac{m}{\beta} \tag{31}$$

2.1.5

Par définition, l'inélasticité de la collision s'écrit (en remarquant que $E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{finale}}$ est toujours inférieure ou égale à $E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{initiale}}$) :

$$\epsilon = 1 - \frac{E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{finale}}}{E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{initiale}}} = 1 - \frac{(M+m)V'^2}{mV_0^2 + M\beta^2V_0^2} = 1 - \frac{(1-\beta\gamma)^2}{(1+\gamma\beta^2)(1+\gamma)} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \times \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta^2\gamma} \tag{32}$$

Manifestement, l'inélasticité ne peut être nulle que si $\beta = -1$, ce qui correspond à un recul du défenseur devant l'attaquant, à la même vitesse que lui. Il n'y aura donc jamais collision !

2.2 Rotation solide

2.2.1

Les deux joueurs sont dans une position symétrique par rapport au centre de gravité global, G. Chacun a un moment d'inertie par rapport à G égal à $I_{\mathrm{G}} = I_0 + MR_0^2$, d'après la formule rappelée dans l'énoncé. Les moments d'inertie individuels s'ajoutant, le moment d'inertie global vaut : $I_{\mathrm{G}} = 2(I_0 + MR_0^2)$.

2.2.2

La vitesse angulaire de rotation du système autour du point G étant le vecteur $\vec{\omega}_0$, le moment cinétique du système par rapport à G s'écrit simplement : $\vec{J}_{\mathrm{G}} = I_{\mathrm{G}}\vec{\omega}_0$.

La norme de la vitesse angulaire, ω_0, est par définition le taux de variation de l'angle de rotation, $\dot{\theta}$ (compté ici positivement dans le sens de rotation effectif). On a alors :

$$\omega_0 = V_0/R_0 \tag{33}$$

2.2.3

Le système formé par les deux joueurs est un système isolé (puisqu'on néglige les frottements des patins sur la glace). Par conséquent, le moment cinétique se conserve.

2.2.4

Lorsque la distance entre les joueurs vaut 2R, le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à G vaut $I_{\mathrm{G}}(R) = 2(I_0 + MR^2)$, et le moment cinétique $\vec{J}_G(R) = I_{\mathrm{G}}(R)\vec{\omega}(R)$. Or $\vec{J}_G(R) = \vec{J}_G(R_0)$, par conservation du moment cinétique. Par conséquent, la vitesse angulaire de rotation est donnée par

$$\omega(R) = \frac{I_{\mathrm{G}}(R_0)\omega_0}{I_{\mathrm{G}}(R)} = \omega_0 \frac{I_0 + MR_0^2}{I_0 + MR^2}, \tag{34}$$

qui est une fonction décroissante de R.

Les deux joueurs tournent donc plus vite lorsque leur distance diminue.

2.2.5

L'énergie cinétique du système s'écrit simplement $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}\omega^2$. Lorsque la distance entre les joueurs passe de $2R_0$ à $2R = R_0/2$, le moment d'inertie diminue – ce qui tend à réduire l'énergie cinétique –, mais la vitesse angulaire croit proportionnellement, ce qui tend à augmenter l'énergie cinétique. La vitesse angulaire apparaissant au carré dans l'expression de l'énergie cinétique, le bilan global est une augmentation de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}(R)\omega^2(R) - \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}(R_0)\omega^2(R_0) = \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}(R_0)\omega(R_0)[\omega(R) - \omega(R_0)] > 0. \tag{35}$$

En remplaçant $\omega(R)$ par son expression, on obtient

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}(I_0 + MR_0^2)\omega_0^2 \left[\frac{I_0 + MR_0^2}{I_0 + MR^2} - 1\right] = \frac{1}{2} M\omega_0^2 (R_0^2 - R^2) \frac{I_0 + MR_0^2}{I_0 + MR^2}, \tag{36}$$

Bien sûr, cette augmentation de l'énergie cinétique n'est pas gratuite : l'énergie se conserve en toutes circonstances! Le théorème de l'énergie cinétique indique que la variation de cette énergie est égale à la somme des travaux des forces agissantes. Ici, c'est la force de traction exercée par les joueurs (probablement le défenseur...) pour se rapprocher l'un de l'autre qui fournit le travail conduisant à l'augmentation constatée de l'énergie cinétique. De fait, pour se rapprocher, les deux joueurs doivent lutter contre la force centrifuge qui tendrait au contraire à les éloigner. Ce travail n'est pas vain : il “injecte” de l'énergie dans le système (énergie qui, ultimement, vient de l'énergie chimique libérée lors du fonctionnement biologique des muscles induisant la traction), qui se retrouve dans le bilan de l'énergie cinétique ci-dessus.