Mécanique et énergie

Étienne Parizot
(APC – Université Paris 7)

Mécanique = « science du mouvement et de l'équilibre des corps »

Le Petit Robert

Résumé du cours précédent :

Cinématique et dynamique

Mouvement

du point de vue des
grandeurs physiques géométriques

attribution d'un nombre représentant
une « quantité », telle que les rapports
de valeurs ait un sens quantitatif

Espace et temps → distances, durées
→ positions (trajectoires), vitesses,
accélération

mètres, secondes, kilogrammes
m, s, kg

Forces

causes d'un changement de
quantité de mouvement (m × v)

quantité de
matière

RFD :
(inertie)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$$

addition vectorielle

-4 interactions fondamentales
-Forces effectives (poids, électrique,
tension, élastique…)
-Forces de contact : réaction, frottement

- Dynamique du « point matériel »

  ou des solides en translation : à chaque instant, tous les points ont la même vitesse
  → on peut donc n'en considérer qu'un…

- Travail, énergie, puissance

- Systèmes de points matériels
  - action et réaction
  - chocs

- Forces, moments, équilibre
  - point d'application

I - Travail, énergie, puissance

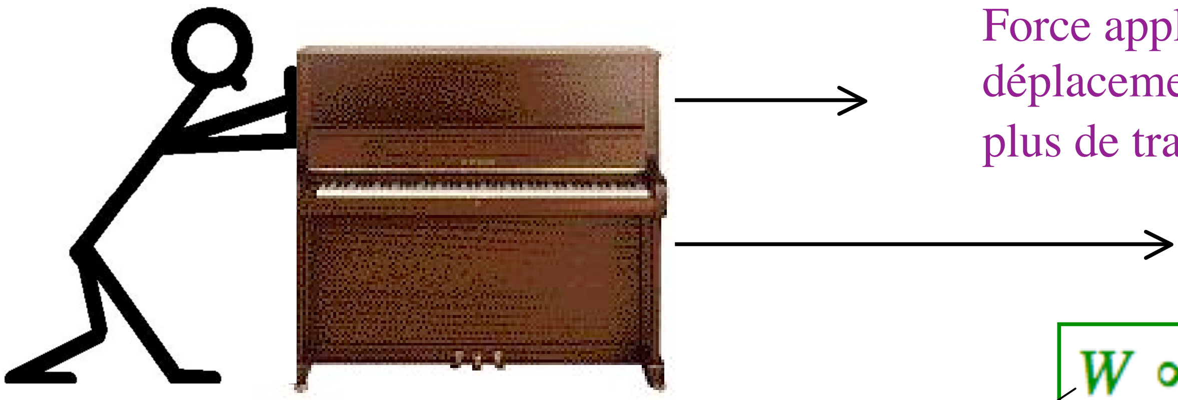
Énergie : « propriété d'un système physique capable de produire du travail » (*Le Petit Robert*)

Notion physique de travail

- « Travail » : notion intuitive : action en vue d'un accomplissement, de la réalisation de quelque chose

  → un travail mécanique implique l'exercice d'une force, mais pas seulement…

- Pas de déplacement ⇒ pas vraiment de travail (pas de résultat !)



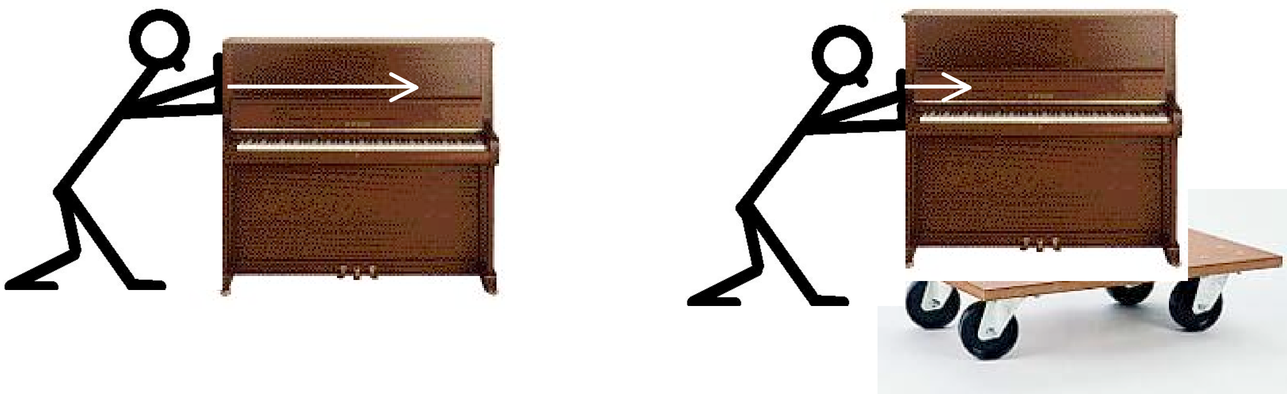
Force appliquée sur un déplacement de 2 m ⇒ 2 fois plus de travail que sur 1 m

$$\boxed{W \propto L}$$

travail déplacement

Travail : force et déplacement

- L'intensité de la force intervient aussi :



Le travail est proportionnel à la force exercée…

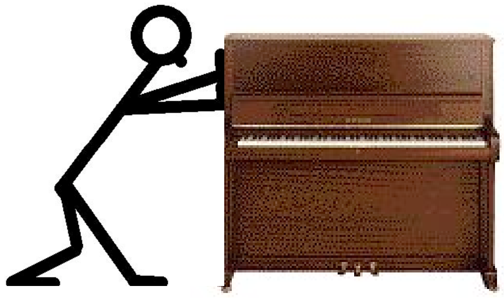
$\Rightarrow$ $\boxed{W \propto F}$

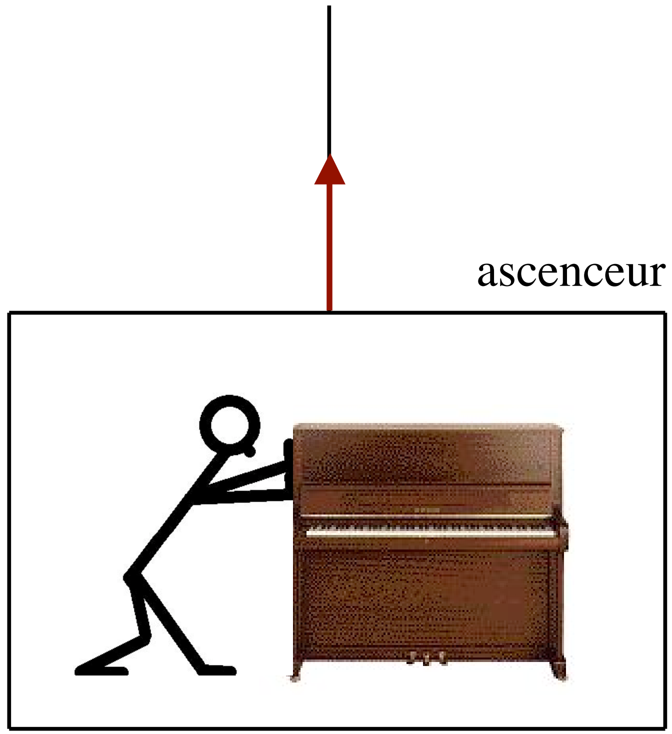
force 2 fois plus grande $\Rightarrow$ travail 2 fois plus important

(grandeur physique authentique)

Travail et direction

- Rôle du sens de déplacement





Il y a une force, mais pas de déplacement ⇒ pas de travail

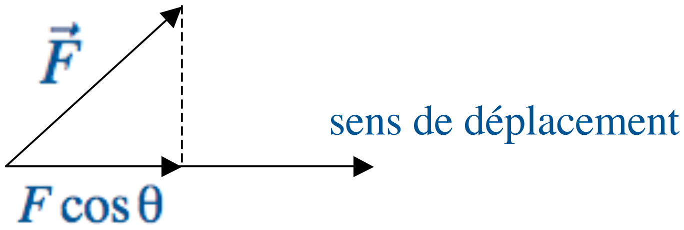
Il y a déplacement, mais la force exercée n'y est pour rien !

- Le travail effectué par une force est proportionnel à la contribution de cette force au mouvement, c'est-à-dire à la composante de la force le long de la trajectoire

Travail élémentaire

- Finalement, le travail se définit par : $W = \vec{F} \cdot \vec{L}$

$$\vec{F} \cdot \vec{L} \;\rightarrow\; F \times L \times \cos\theta$$



- Si la trajectoire n'est pas rectiligne ou que la force change au cours du mouvement, le travail total est obtenu comme l'intégrale des travaux élémentaires, infinitésimaux :

$$\boxed{\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l}} \;\Longrightarrow\; W = \int_{\text{traj.}} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$$

- NB: si on exerce une force opposée au mouvement, cette force est contreproductive : le travail est alors négatif !

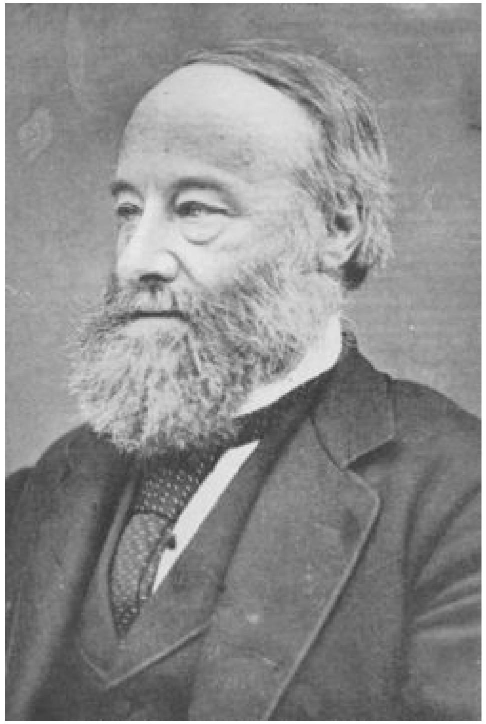
Travail : grandeur physique

- Unité de travail : le « joule »

$\boxed{\text{1 J = travail effectué par une force de 1 N sur une déplacement de 1 m}}$

NB: c'est aussi l'unité d'énergie !

$$\mathbf{1\ J = 1\ N.m = 1\ kg\ m^2\ s^{-2}}$$



James Prescott Joule (1818 - 1889)

- Linguistique…

Symbole du travail : « W »
de l'allemand « Werk », cf. « Work » en anglais

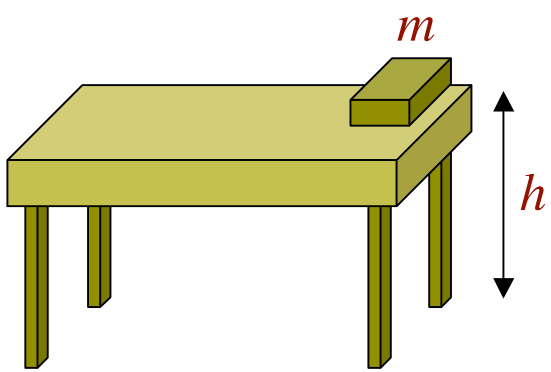
Origine germanique : verbe « *wyrcan* », d'une racine indo-européenne partagée par le grec : « *ergon* »

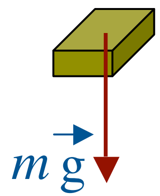
erg (unité d'énergie en *cgs*), énergie…

Énergie

« Propriété d'un système physique capable de produire du travail » (*Le Petit Robert*)

- Exemple : un livre de masse m tombe d'une table de hauteur h…





Travail effectué par le poids :

$$W = \int_0^h m\vec{g}\cdot\vec{\mathrm{d}z} = mgh$$

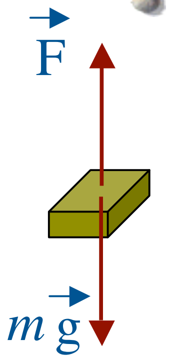
- → quand le livre est sur la table, il suffit de le faire tomber (de le laisser tomber !) pour récupérer un travail égal à mgh.

Une masse m à une hauteur h a une « potentialité de travail » égale à mgh.

→ concept d'énergie

Travail et énergie

« Propriété d'un système physique capable de produire du travail » (*Le Petit Robert*)



- Inversement, pour ramener le livre sur la table, il faut fournir un travail : exercer une force compensant le poids : $\boldsymbol{F} = -\,m\boldsymbol{g}$, sur une longueur h.

  ⟹ $\boxed{\text{travail à fournir : } \; W = mg \times h}$

  Le même que le livre restitue en tombant !!!

- ⇒ quelque chose se conserve !

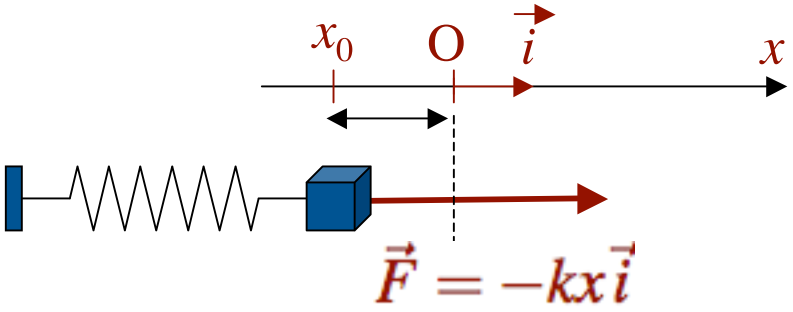
  L'opérateur effectue un travail → le livre se trouve dans un état (à la hauteur h) tel que ce travail peut être restitué intégralement

- ⇒ le travail n'a pas été vain : il a produit une capacité à produire à nouveau du travail, d'une valeur exactement identique !

- Cette « capacité à produire du travail », c'est cela l'« ***énergie*** » !
  Dans cet exemple, elle se conserve…

Autre exemple : travail élastique

- Ressort de coefficient d'élasticité k, initialement comprimé jusqu'à l'abscisse $x_0 < 0$ (NB: au repos, $x = 0$)



Travail effectué par la force de rappel entre x_0 et $x = 0$:

$$W = \int_{-x_0}^{0} F\,\mathrm{d}x = \int_{-x_0}^{0} -kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_0^2$$

- Inversement, pour comprimer le ressort à partir de la position de repos, en $x = 0$, il faut exercer une force qui s'oppose à la force de rappel, et donc effectuer un travail :

$$W = \int_{0}^{-x_0} -F\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{-x_0} kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_0^2$$

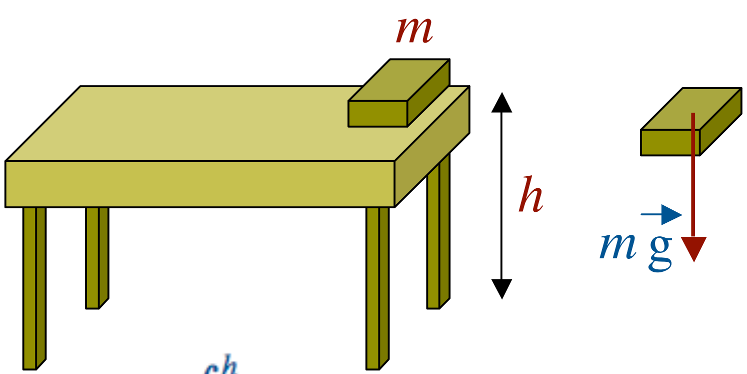
$\rightarrow$ le travail fournit est égal à celui qui est ensuite restitué

Énergie cinétique ?

- Y a-t-il autre chose que le type d'énergie précédent qui soit susceptible de produire un travail ?

  ➡ oui, la vitesse, ou plutôt la quantité de mouvement peut induire un mouvement…

- Où est passée l'énergie quand le livre en chute libre arrive tout prêt du sol ?



$$W = \int_0^h m\vec{g}\cdot\vec{dz} = mgh$$

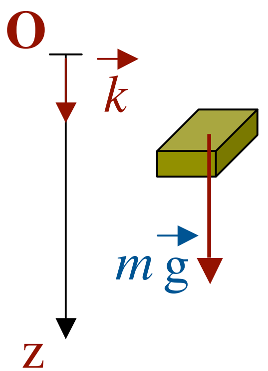
- Le poids a travaillé, mais quand le livre arrive au sol, il n'y a plus de « potentiel » à fournir du travail du fait de sa hauteur.
- Mais le livre a une certaine vitesse : cette vitesse peut-elle mettre quelque chose en mouvement et effectuer un travail ?

  ➡ Si oui, combien ?

« Énergie » cinétique…

- Au cours de sa chute, le livre a perdu sa capacité à produire du travail du fait de son élévation, c'est-à-dire de son « énergie potentielle de pesanteur ».

- Mais le livre acquiert de plus en plus de vitesse !
  → Question naturelle : peut-on établir un lien quantitatif entre l'énergie potentielle perdue et la vitesse acquise ?



- Calcul : $v = gt$ → $t = \dfrac{v}{g}$ et $z = \dfrac{1}{2}gt^2$ → $z = \dfrac{v^2}{2g}$

  E_p perdue : $-\Delta E_p = mgh - mg(h-z) = mgz$

  (= travail produit !)

- En remplaçant z, on a : $-\Delta E_p = \dfrac{1}{2}mv^2$

→ l'énergie se conserverait si on définissait une énergie cinétique (associée à la vitesse), comme : $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}mv^2}$ ⇒ $E_p + E_c = \text{Cte}$

Théorême de l'« énergie cinétique »

- On a montré qu'en définissant $E_c = mv^2/2$, le travail effectué par la force de pesanteur lors d'une chute libre se retrouvait intégralement dans E_c. Peut-on généraliser ce résultat ?

- Oui ! C'est toujours vrai !!!

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v})\cdot\vec{v} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) = \mathrm{d}E_\mathrm{c}$$

- Résultat :

[= « théorême de l'énergie cinétique »]

> Le travail fourni à (ou par) un point matériel est toujours égal à la variation de son énergie cinétique.

→ généralisable à tout système physique, en utilisant la loi d'égalité de l'action et de la réaction

- Conclusion : l'expression adoptée pour E_c a un sens profond, universel !

  Mais est-ce bien une énergie, au sens propre du terme, ou une simple grandeur qui « récupère » le travail fourni ?

Énergie cinétique ?

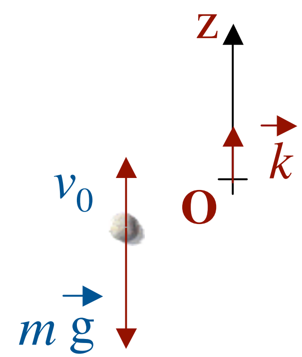
- On vient de montrer que le travail que je fournis, ou que fournit n'importe quelle force, n'est jamais perdu : il se retrouve intégralement, soit dans une énergie « potentielle », soit dans l'« énergie cinétique ».

- La grandeur $E_c = mv^2/2$ a les dimensions d'une énergie, est liée à la vitesse, et la somme $E_p + E_c$ a la vertu de rester constante au cours de tout mouvement (d'un point matériel). Mais est-ce bien une énergie au sens de la « capacité à produire un travail » ?

- On a vu « $W \rightarrow E_c$ » et « $E_p \rightarrow E_c$ » : peut-on avoir « $E_c \rightarrow W$ » et « $E_c \rightarrow E_p$ » ?

- Oui !

Énergie cinétique !



- Exemple 1 : lancer vertical…

$$v = v_0 - gt \quad \text{et} \quad z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = 0 \text{ quand } t = \frac{v_0}{g} \;\rightarrow\; z = \frac{v_0}{2g} \;\rightarrow\; mgz = \frac{1}{2} m v_0^2$$

(vrai à chaque instant : $mv^2/2 = mv_0^2/2 - mgz$) CQFD !

$\boxed{E_c \rightarrow E_p}$

- Exemple 2 : freinage constant…

$v_0 \rightarrow 0$ en raison d'une force de frottement F s'exerçant pendant Δt

$$v = v_0 - \frac{F}{m} t \;\rightarrow\; v_0 = \frac{F\Delta t}{m} \;\rightarrow\; W = F \int v \mathrm{d}t = F v_0 \Delta t - \frac{F \Delta t^2}{2m} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

CQFD !

$\boxed{E_c \rightarrow W}$

- E_c est donc bien une énergie à part entière, liée au mouvement ⇒ énergie cinétique !

Énergie mécanique

- RFD $\Rightarrow$ théorème de l'énergie cinétique

> « La somme des travaux des forces est égale à la variation d'énergie cinétique »

➡ Une force qui travaille positivement peut :

ex. : lever d'un poids

- soit augmenter l'énergie cinétique, E_c
- soit compenser le travail négatif d'une autre force
  - $\rightarrow$ énergie potentielle, E_p

- Bilan : le travail apporté de l'extérieur augmente la somme $E_p + E_c$, définie comme l'« énergie mécanique » :

$$\boxed{E_m = E_p + E_c}$$

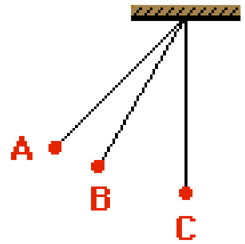
- $\Rightarrow$ si aucune force extérieure ne travaille, $\boxed{E_m = \mathrm{Cte}}$

NB : De nombreux processus dynamiques peuvent être appréhendés de manière très simple via la conservation de l'énergie mécanique…

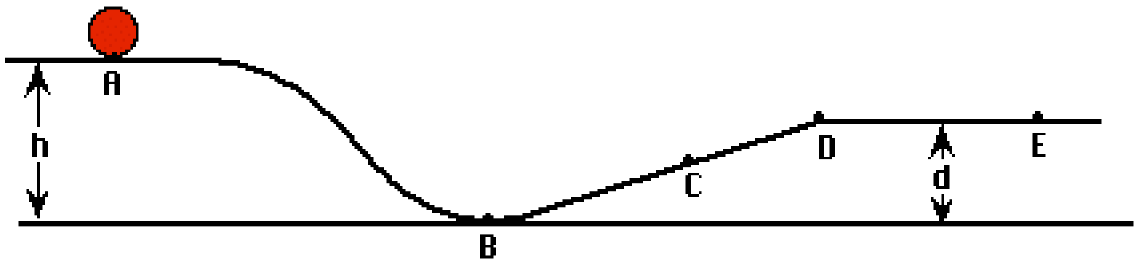
Exemples divers

$$E_p + E_c = \text{Cte}$$

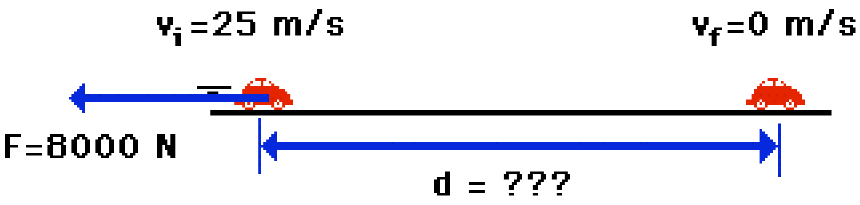
- Oscillation d'un pendule



- $E_p \rightarrow E_c \rightarrow E_p \ldots$



- Attention aux frottements…



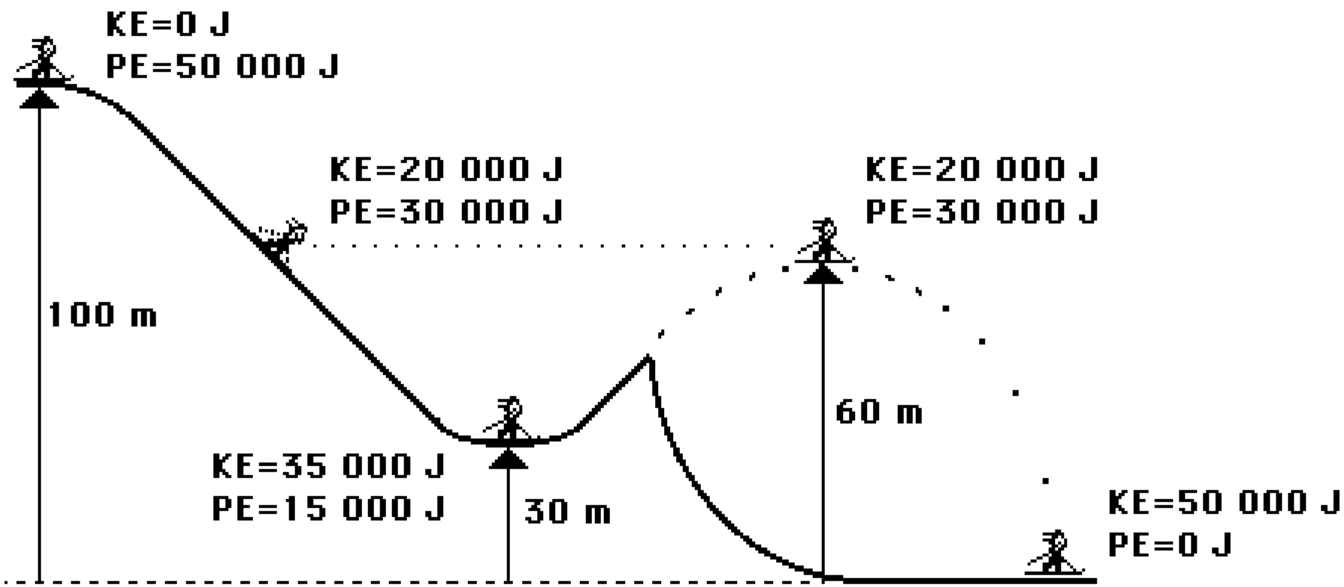
$$E_p + E_c \neq \text{Cte}$$

$$\Delta E_c = W \implies \frac{1}{2} m v_i^2 = F \times d$$

Exemples divers

$$E_p + E_c = \mathrm{Cte}$$

- Skieur aux skis bien fartés…



NB: s'il y avait des frottements, il suffirait d'ajouter à l'énergie mécanique totale le travail des forces de frottement (qui est négatif !).

(Cette énergie est perdue, pour le skieur, mais transformée en mouvement et en compression de la neige, et surtout en chaleur…)

Forces dérivant d'un potentiel

- Exemple du ressort : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ et $E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$E_p + E_c = \text{Cte} \iff \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = 0$$

$$\iff kx\frac{dx}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

immobile

$m\vec{a} = \vec{F}$ avec $\vec{F} = -kx\vec{i}$

- Remarque : $F = -\frac{dE_p}{dx}$

énergie potentielle élastique

Forces dérivant d'un potentiel

- Exemple du poids : $E_p = mgz$ et $E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

$$E_p + E_c = \text{Cte} \iff \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = 0 \iff \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg$$

- Remarque : $P = -\frac{dE_p}{dz}$

énergie potentielle gravitationnelle

- On dit dans ce cas que la force « dérive d'un potentiel », i.e. il existe une fonction (des coordonnées) appelée « potentiel » (qui est ici l'énergie potentielle, à une constante près), telle que la force soit la dérivée (vectorielle) de cette fonction, V

- Vectoriellement : $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(V)$ i.e. $\begin{cases} F_x = -\frac{dV}{dx} \\ F_y = -\frac{dV}{dy} \\ F_z = -\frac{dV}{dz} \end{cases}$

Puissance

- Quantité d'énergie fournie ou consommée par unité de temps.

  grande puissance = grande énergie mise en jeu en un temps court
  = grand travail effectué en un temps court

- Définition de la puissance :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$$

- Et par conséquent, puisque $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$, on a :

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

- Unité : Watt (W) : 1 W = 1 J.s^{-1} = 1 km m^2 s^{-3}

II - Systèmes de points matériels

- Action et réaction
- Chocs

Action et réaction

- Pour un point matériel (ou un solide contraint à la translation) :

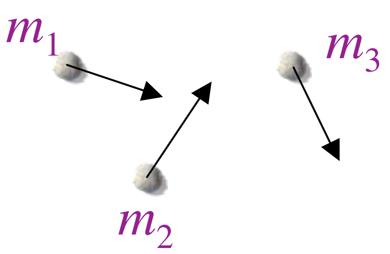
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} \Longrightarrow \text{équilibre ssi } \sum \vec{F} = \vec{0} \text{ et } \vec{v}(0) = \vec{0}$$

sinon, $\vec{v} = \vec{\mathrm{Cte}}$
(dans un réf. galiléen)

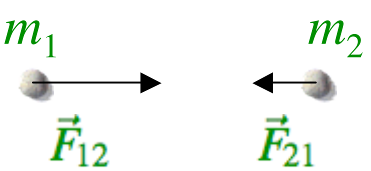
- Système de points matériels :

  a) Interactions à distance

  b) Chocs



- En fait, toutes les forces sont des **inter**actions, à deux corps



$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

« loi d'égalité de l'action
et de la réaction »

Centre d'inertie

- Centre d'inertie (ou centre de gravité) :
barycentre des points affectés d'un coefficient égal à leur masse (barycentre « pondérés »)

- Cas d'un système de 2 points : $(m_1+m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2$

G est sur la ligne joignant M_1 et M_2, entre les deux points, décalé vers le plus lourd

- Système de *n* points : $\sum_i m_i\vec{OG} = \sum_i m_i\vec{OM}_i$

- Quantité de mouvement totale :

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{OM}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sum m_i\vec{OM}_i)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sum m_i\vec{OG})}{\mathrm{d}t} = (\sum_i m_i)\frac{\mathrm{d}\vec{OG}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\mathrm{tot}} = M_{\mathrm{tot}} \times \vec{v}_{\mathrm{G}}}$$

Dynamique global d'un système de points

- Pour chaque point, on a : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{ij}$

force exercée par le point j sur le point i

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i>j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} + \sum_{j>i} \vec{F}_{ji} = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})$$

- Donc, si $\forall (i,j)\ \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ alors $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$

- Inversement, si on veut $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ pour un système à deux points,

  alors il faut : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

- En présence de forces extérieures :

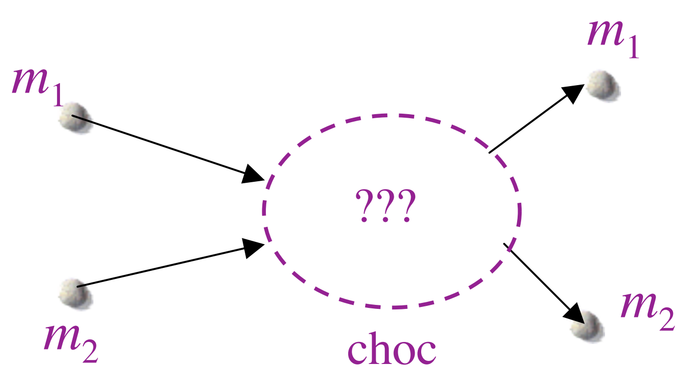
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} = \vec{F}_{\mathrm{ext}}$$

comportement identique à celui d'un corps unique

mais attention au point d'application…

Chocs et lois de conservation

- Un choc entre deux corps, considérés comme des points matériels, est une interaction très brève au cours de laquelle les corps 1 et 2 exercent l'un sur l'autre une force, obéissant bien sûr à la loi d'égalité de l'action et de la réaction



- On sait déjà que $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{\text{Cte}}$ i.e. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

  Mais cela ne suffit pas à déterminer $\vec{p}_1'$ et $\vec{p}_2'$

- $\rightarrow$ argument énergétique

Inélasticité d'un choc

- Au niveau élémentaire, l'énergie totale se conserve toujours. Mais lors d'un choc entre corps macroscopique, de l'énergie mécanique peut être dissipé (frottements, chaleur, rupture de matériau, etc…)

- Le détail du choc est souvent très complexe, et met en jeu des forces effectives très diverses et généralement impossibles à connaître en pratique. Mais un bilan d'énergie global est accessible empiriquement…

- Définition 1 : l'inélasticité ξ d'un choc est la fraction d'énergie cinétique incidente ($E_{c1} + E_{c2}$) qui n'est pas restituée à l'état final, et qui est donc dissipée d'une manière ou d'une autre lors du choc.

$$\boxed{\xi = \frac{E_{c,tot} - E'_{c,tot}}{E_{c,tot}} = 1 - \frac{E'_{c,tot}}{E_{c,tot}}}$$

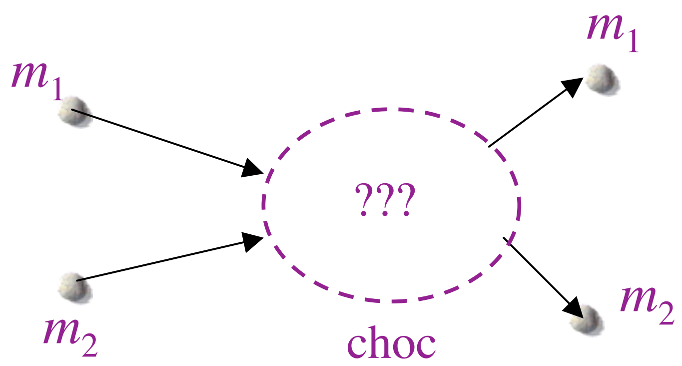
- Définition 2 : l'élasticité η d'un choc est la fraction d'énergie cinétique incidente qui est restituée à l'état final

$$\boxed{\eta = 1 - \xi = \frac{E'_{c,tot}}{E_{c,tot}}}$$

NB: Un choc élastique ($\eta = 1$, $\xi = 0$) est un choc au cours duquel l'énergie cinétique est conservée.

Résolution dynamique du choc élastique

- $E_{c,tot}$ se conserve, de même que $\vec{p}_{tot}$



- Passage dans le référentiel du centre d'inertie…

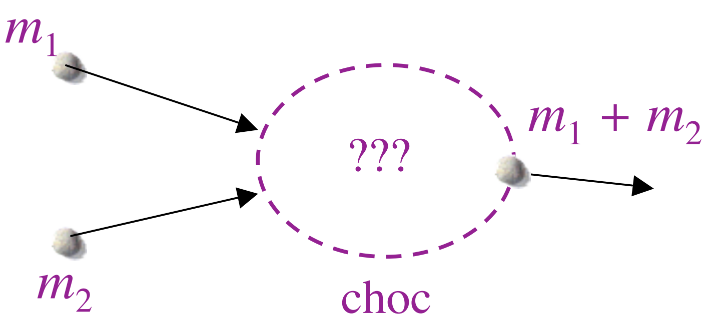
- Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

- Conservation de l'énergie : $E_{c,1} + E_{c,2} = E'_{c,1} + E'_{c,2}$

- Retour au référentiel initial

« Choc mou » : non élastique

- Exemple du "crash" → mollesse maximale : les deux corps n'en forment plus qu'un après la collision



Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}'$$

$$E'_c = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}'^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)^2}{m_1+m_2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{1}{2}m_2v_2^2\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$$

$$\Rightarrow\quad E'_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[v_1^2+v_2^2-2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2]$$

$$\Rightarrow\quad E'_c = E_{c,1} + E_{c,2} - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 \quad\Rightarrow\quad E'_c = E_c \iff \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Le choc ne peut pas être élastique !

III - Forces, moments, équilibre

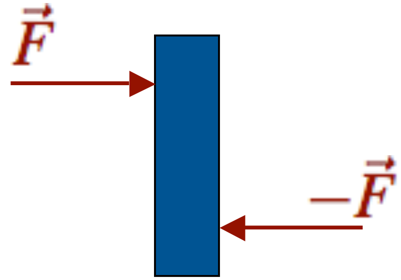
- Point d'application d'une force
- Leviers

Somme des forces et équilibre

- Pour un point matériel, la condition d'équilibre est évidente : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

  Pas de rotation possible !

- Mais pour un corps solide étendu, une somme des forces nulle peut induire une rotation.



- Tout dépend du point d'application des forces !

- NB : dans un solide, les forces se transmettent de proche en proche à l'ensemble des constituants

Point d'application d'une force

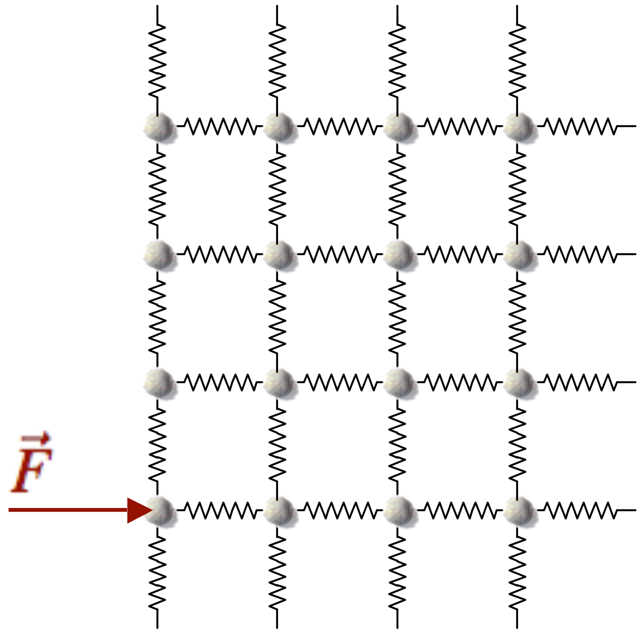
- Dans le cas de la force gravitationnelle (→ poids), tous les constituants du solide sont soumis à la même accélération. Le mouvement induit est donc un mouvement de translation, sans rotation.

- Dans le cas d'un contact ponctuel (ou limité à une zone donnée du solide), la force est transmise de proche en proche

- Modélisation du corps solide : réseau de corpuscules liés par des ressorts

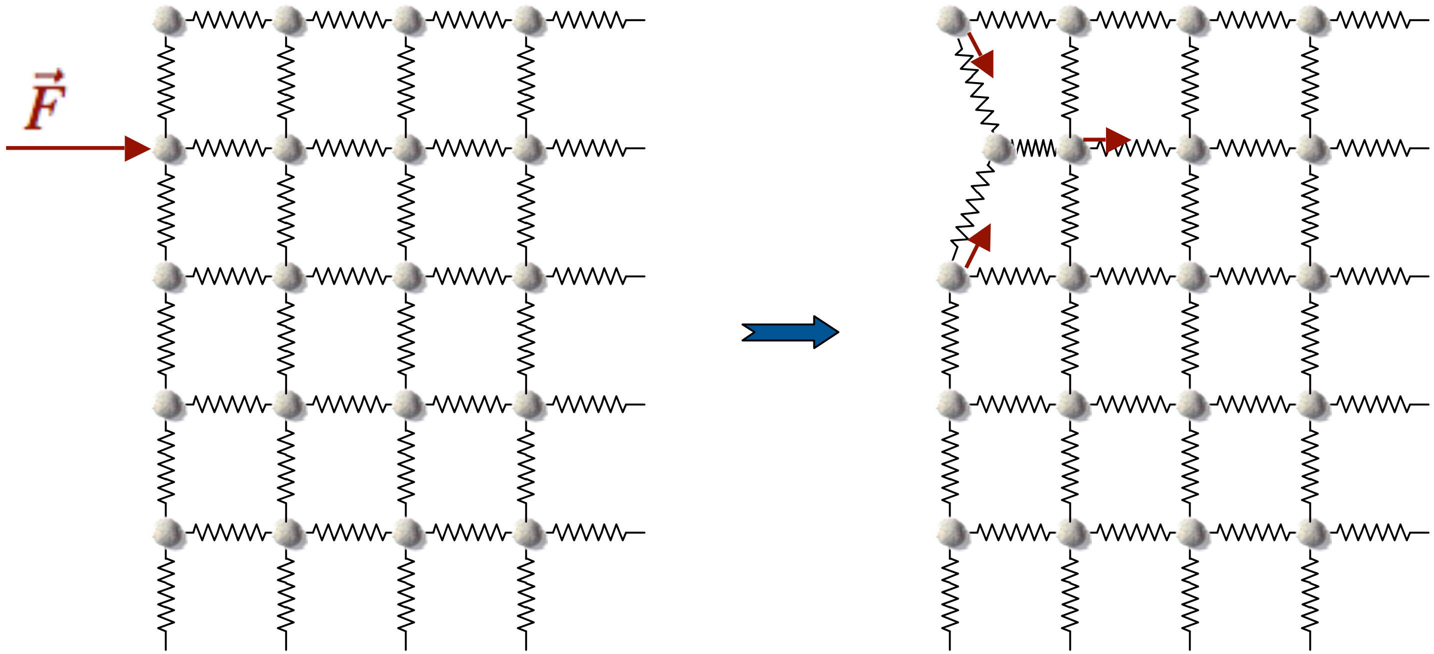
- Grande rigidité → minimisation rapide des écarts de distance entre corpuscules + transmission « mécanique » de l'intégralité des efforts

- Le résultat dépend du point d'application



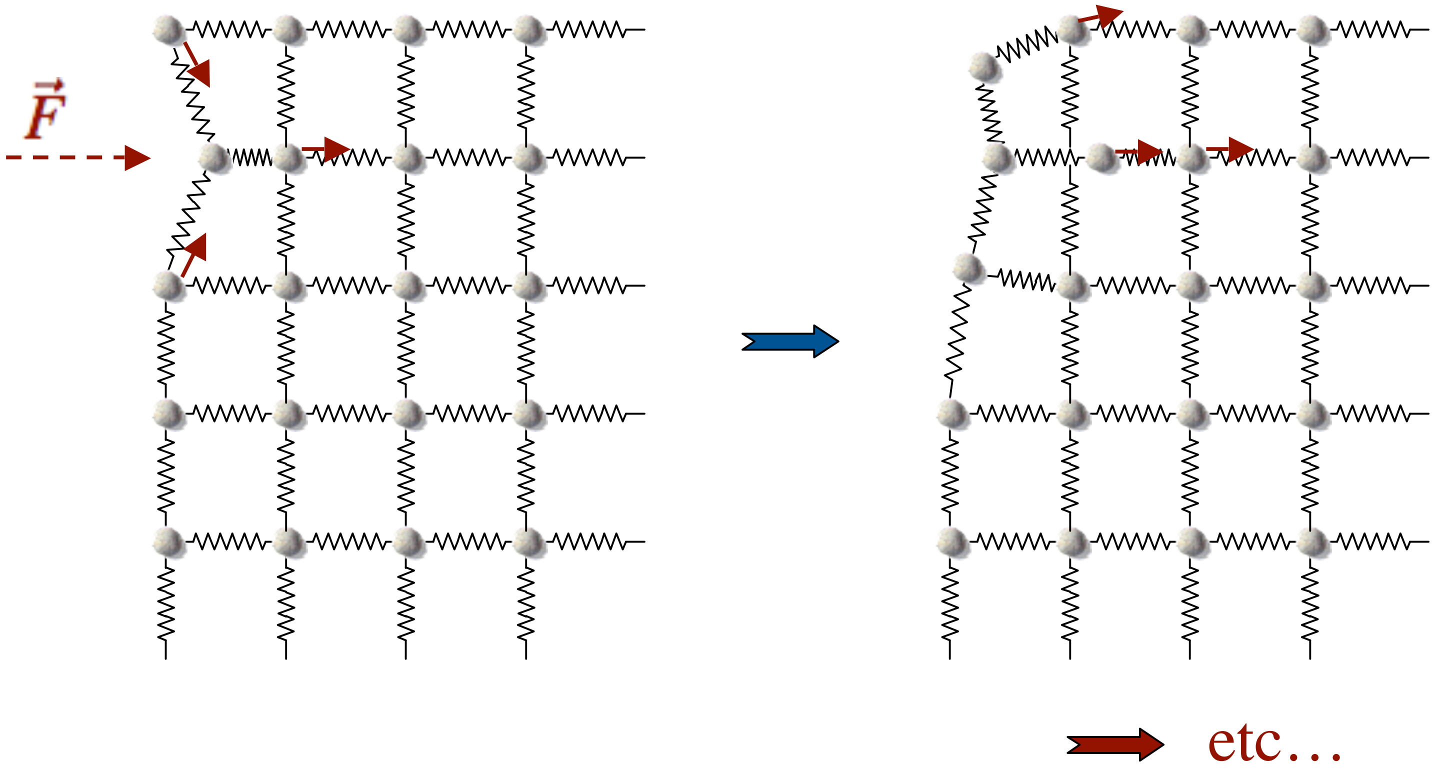
Transmission de la force appliquée

- Rotation induite d'autant plus grande que le point d'application est excentré



Transmission de la force appliquée

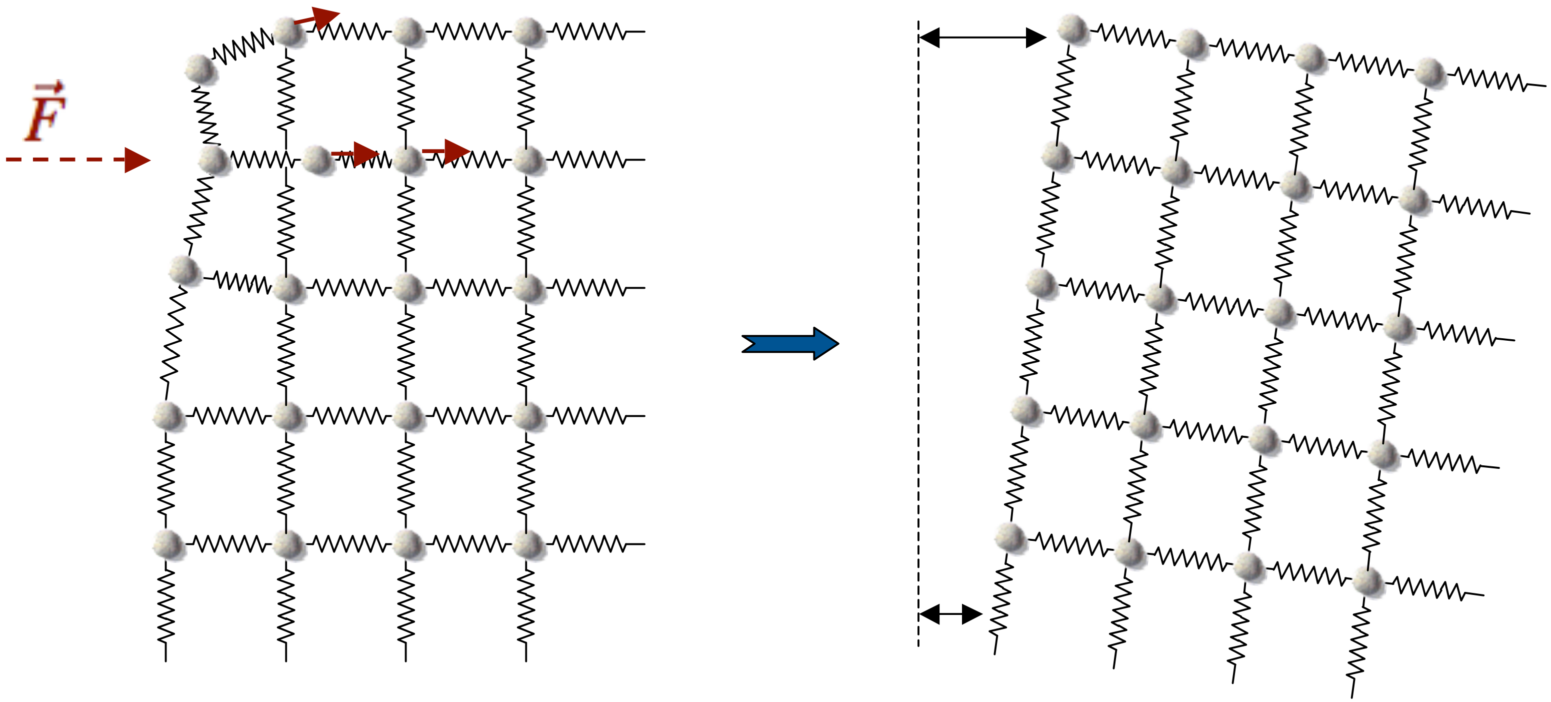
- La dissymétrie du solide par rapport au point d'application entraîne une réponse plus grande (déplacement) du côté où il y a moins de matière à entraîner…



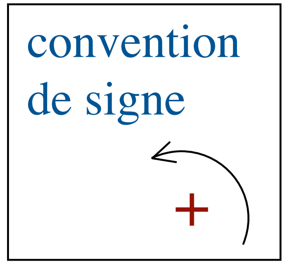
Réajustement final

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}$$

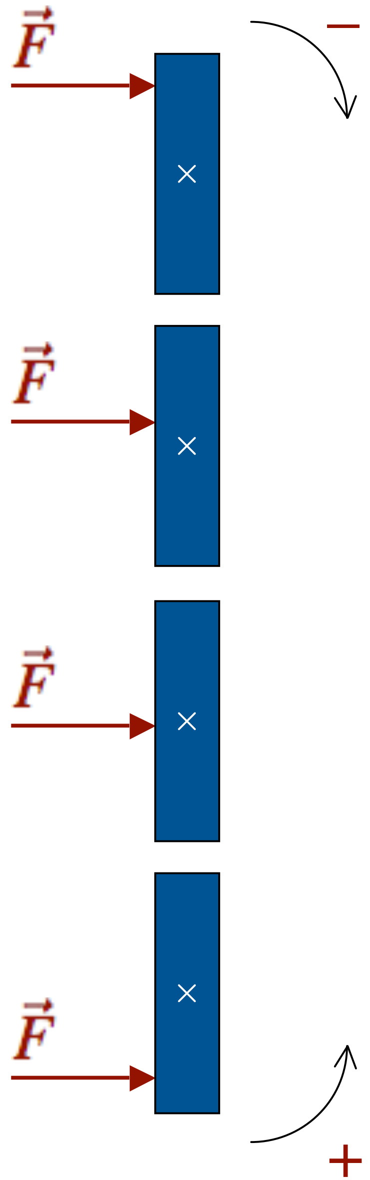
- Après réajustement, le bilan est un déplacement global, accompagné d'une rotation dont l'amplitude dépend de la position du point d'application, A, par rapport à G, centre d'inertie.



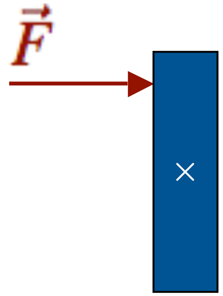
Rotation induite



- Rotation dans le sens horaire
- Rotation plus faible
- Pas de rotation (translation seule)
- Rotation dans le sens anti-horaire



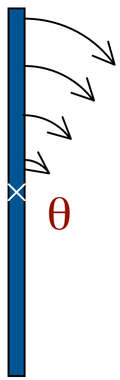
Rotation rigide



- Plus le point d'application est excentré (par rapport au centre d'inertie), plus la rotation induite est importante

- Dans un solide, tous les points gardent la même distance les uns par rapport aux autres

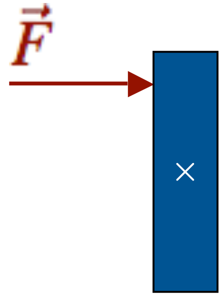
- → « rotation rigide »



Déplacement proportionnel à la distance à l'axe $\delta l = r\delta\theta$

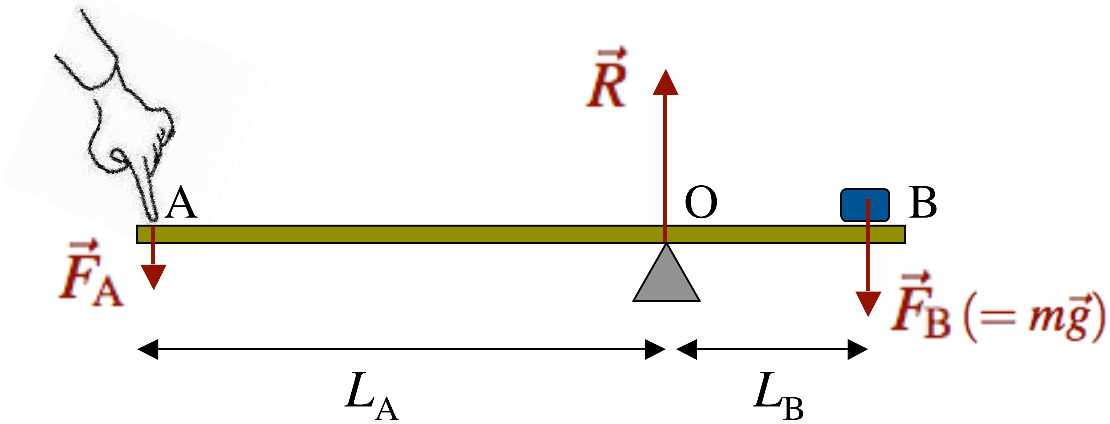
Idem pour la vitesse : $v = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$

Moment d'une force



- *Moment* = « pouvoir rotateur »
  → augmente avec la distance à l'axe de rotation

- Exemple du levier à deux bras (principe de la balance)

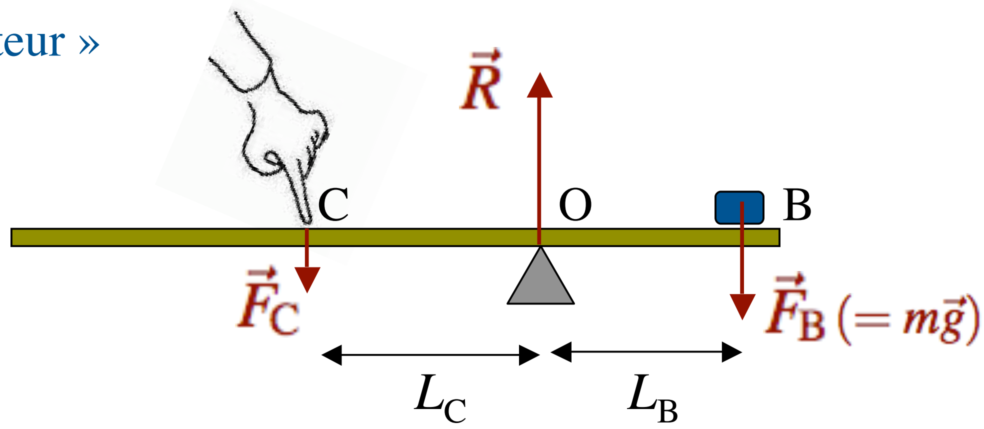


- Pour une rotation $\delta\theta$, on a $\delta z_A = -L_A\,\delta\theta$ et $\delta z_B = +L_B\,\delta\theta$
  → travail effectué en A : $\delta W_A = F_A L_A\,\delta\theta$
  → E_p gagnée en B : $\delta E_p = mg \times L_B\,\delta\theta = F_B L_B\,\delta\theta \quad (= -\,\delta W_B)$

- $\delta W_A = \delta E_p \;\Rightarrow\; \boxed{F_A L_A = F_B L_B}$

Moment d'une force

- *Moment* = « pouvoir rotateur »



- Changement de point d'application = A → C

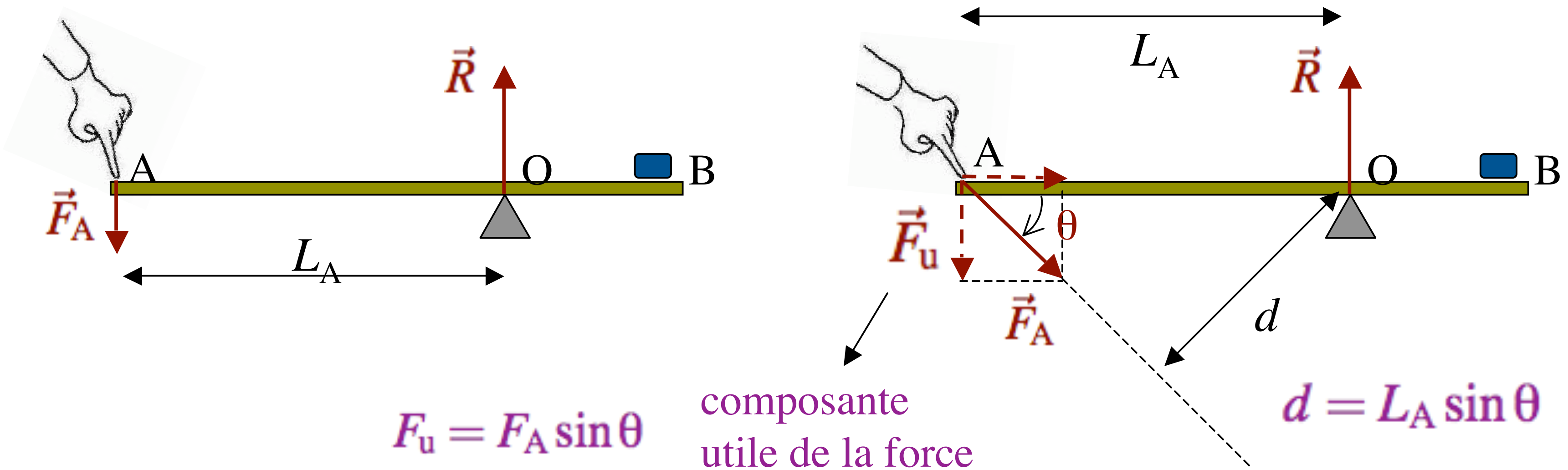
- Pour effectuer le même travail en B, c'est-à-dire provoquer une même rotation $\delta\theta$, il faut déplacer le point C de $\delta z_C = -L_C\,\delta\theta$ au lieu de $\delta z_A = -L_A\,\delta\theta$, si l'effort est porté au point A

→ Travail effectué par l'opérateur identique si et seulement si $F_C L_C = F_A L_A$

- Conclusion : le pouvoir rotateur d'une force F appliquée à une distance *d* de l'axe de rotation vaut : $\boxed{\mathcal{M} = F \times d}$

Moment vectoriel et direction de la force

- On a supposé que la force s'exerçait perpendiculairement à l'axe de rotation. Sinon, seule la composante perpendiculaire à l'axe contribue au moment



$F_u = F_A \sin\theta$

$d = L_A \sin\theta$

- Bilan : moment par rapport à un point : $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \times \vec{F}_A}$

- Moment par rapport à un axe Δ de direction $\vec{u}$: $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/\Delta} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{u}}$

Conditions d'équilibre d'un corps solide

- La somme des forces appliquées doit être nulle

  (comme pour un point matériel)

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

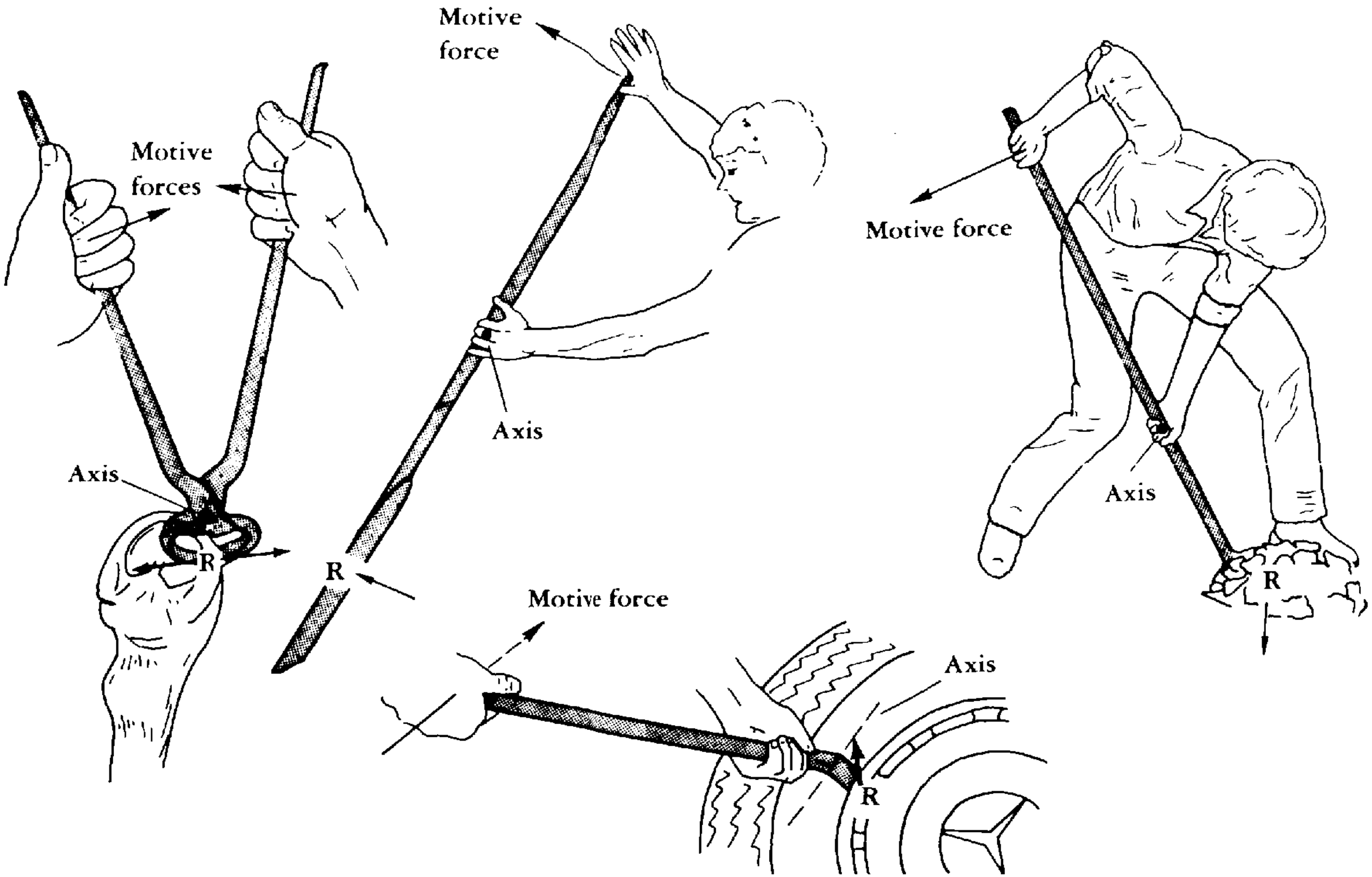
- La somme des moments appliqués doit être nulle

  (condition inapplicable à un point matériel !)

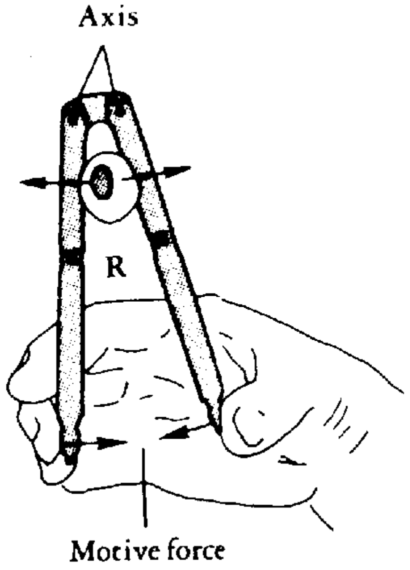
$$\boxed{\sum \vec{\mathcal{M}} = \vec{0}}$$

IV - Exemples de leviers

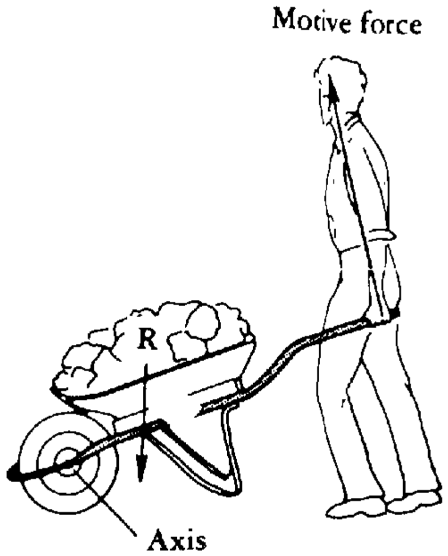
Leviers de première classe



Leviers de deuxième classe

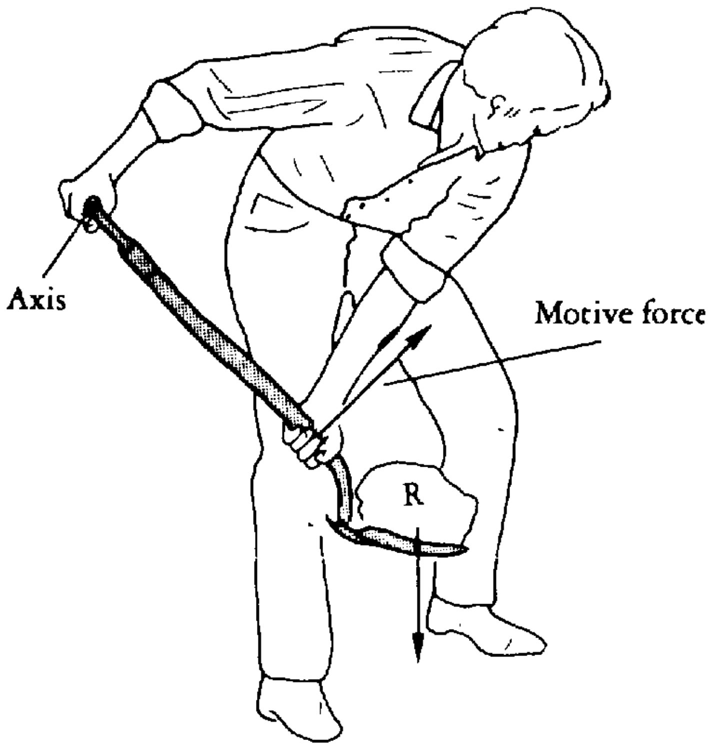


a

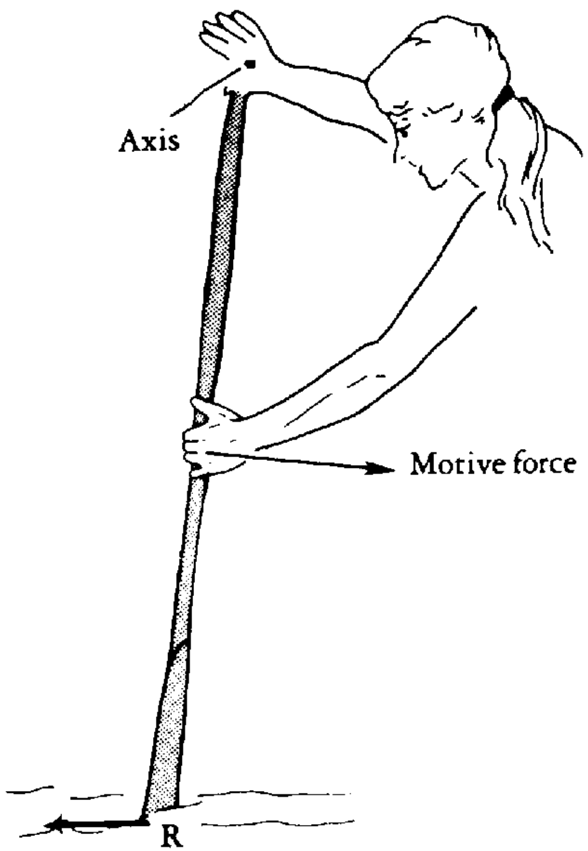


b

Leviers de troisième classe

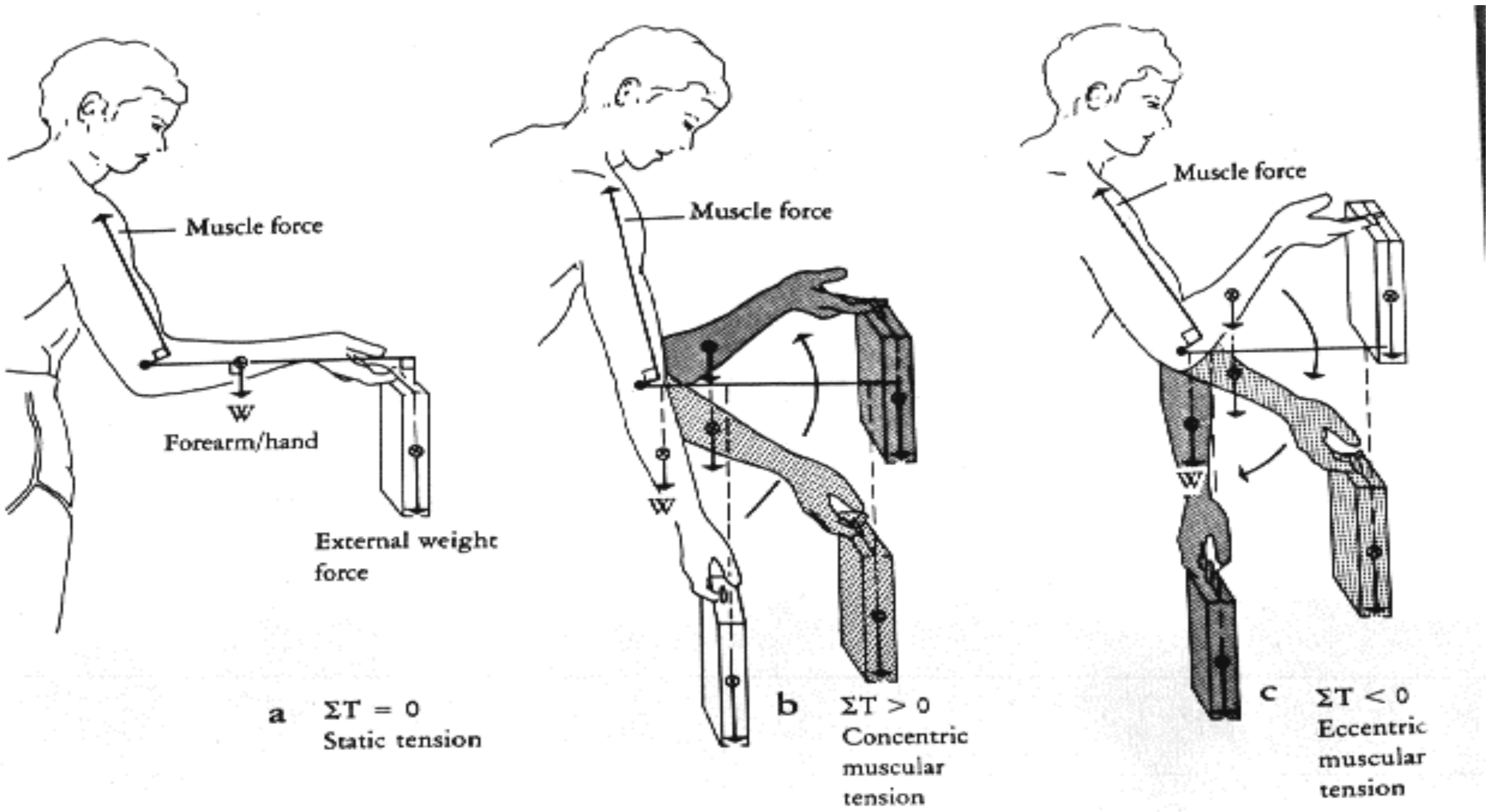


a

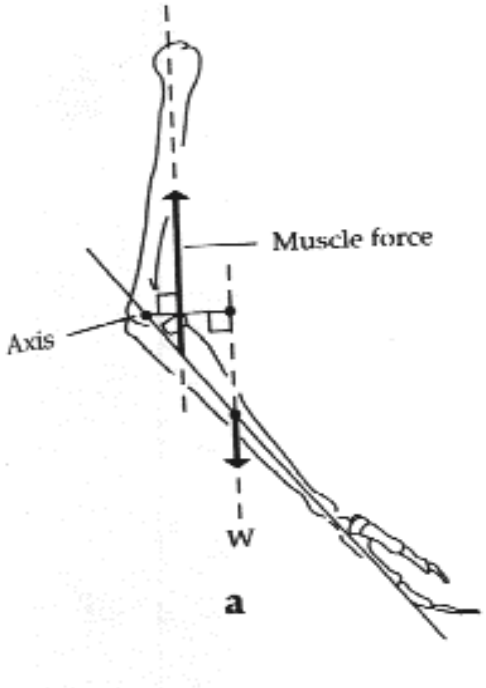


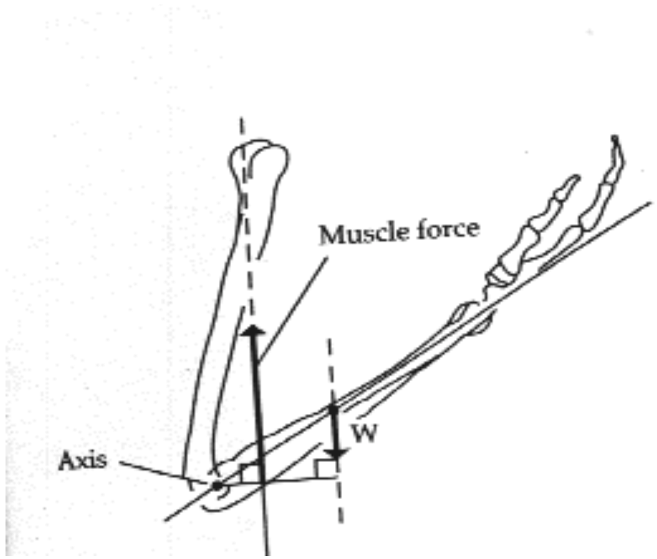
b

Flexion du coude



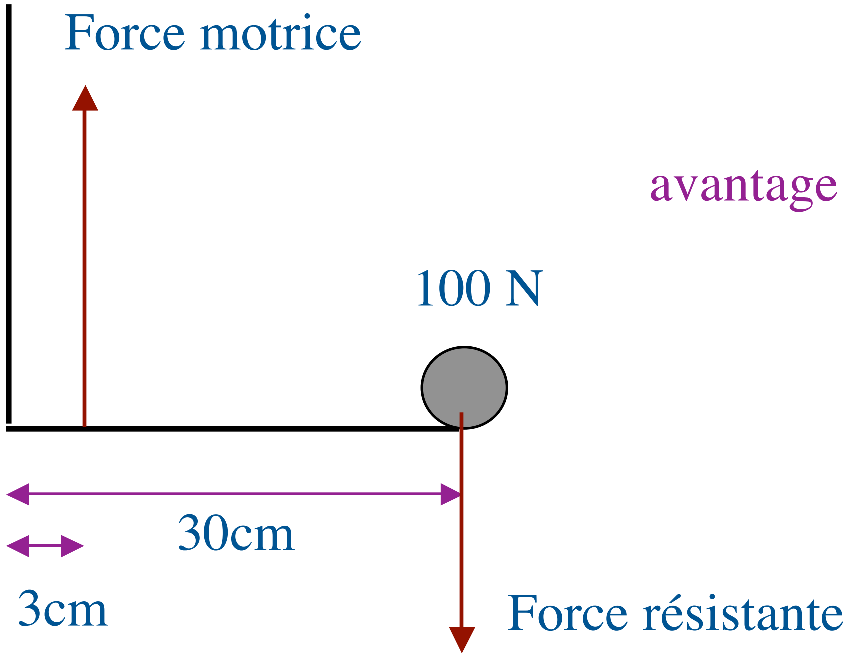
Flexion du coude





- Levier défavorable : force musculaire à exercer supérieure à la force produite

« avantage mécanique » = rapport des bras de levier



$$\text{avantage} = \frac{\text{bras de levier moteur}}{\text{bras de levier résistant}} = \frac{3}{30} = 0.1$$

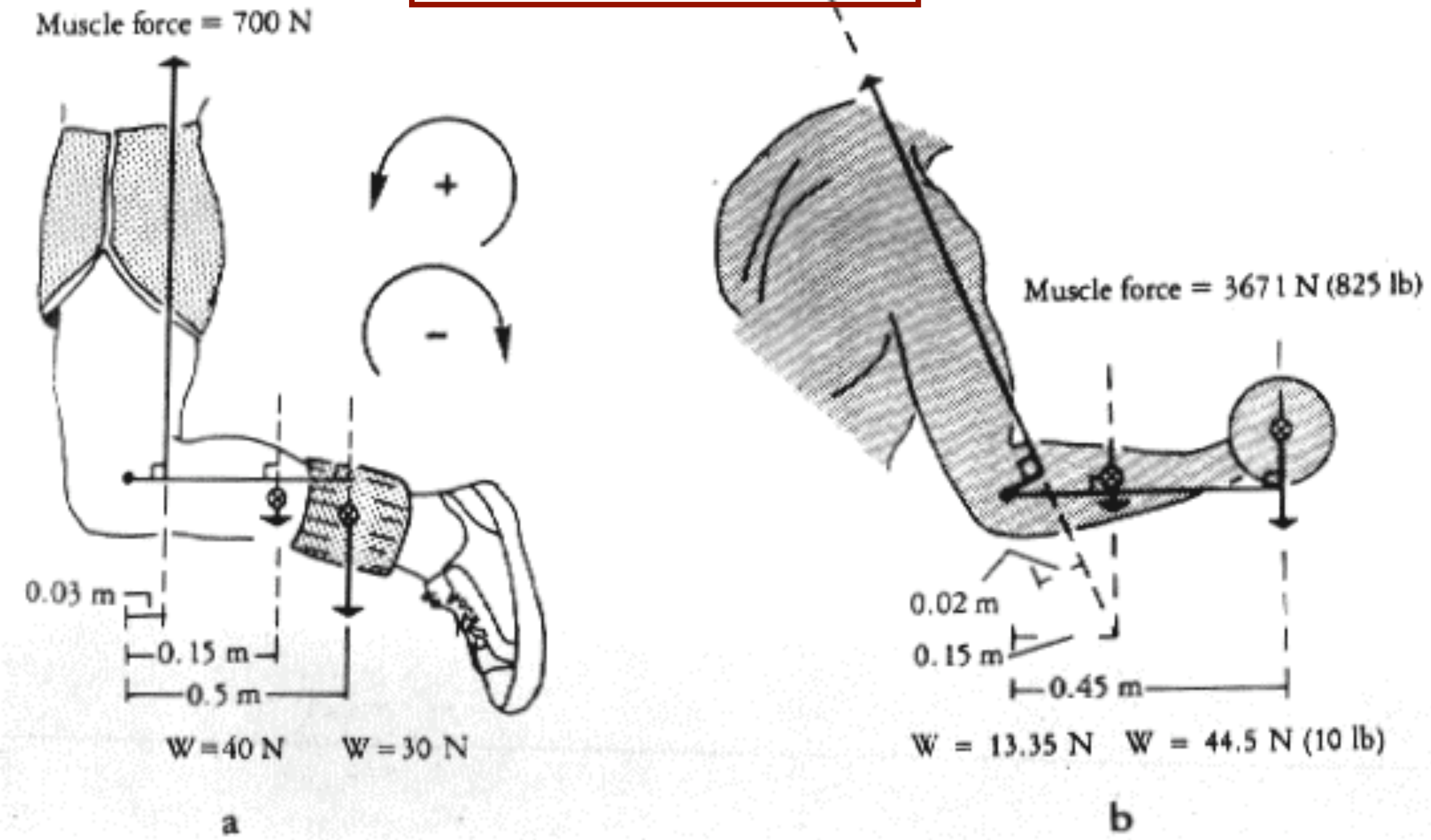
$$\text{force motrice} = \frac{\text{force resistante}}{\text{avantage}}$$

Force résistante = 100 N

➡ Force motrice = 1000 N

Leviers dans le corps : « défavorables »

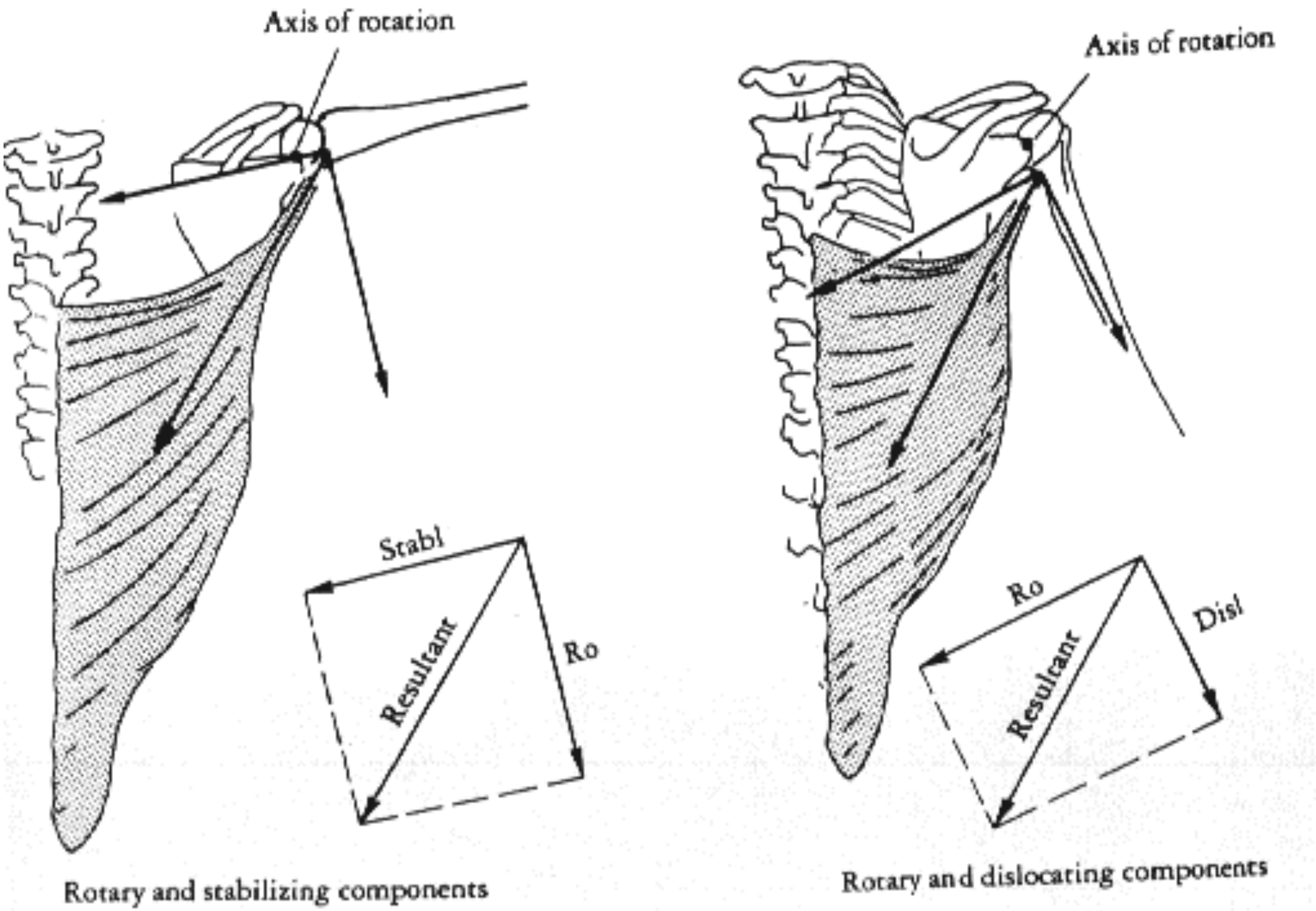
$$\boxed{Fd = F_1 d_1 + F_2 d_2}$$



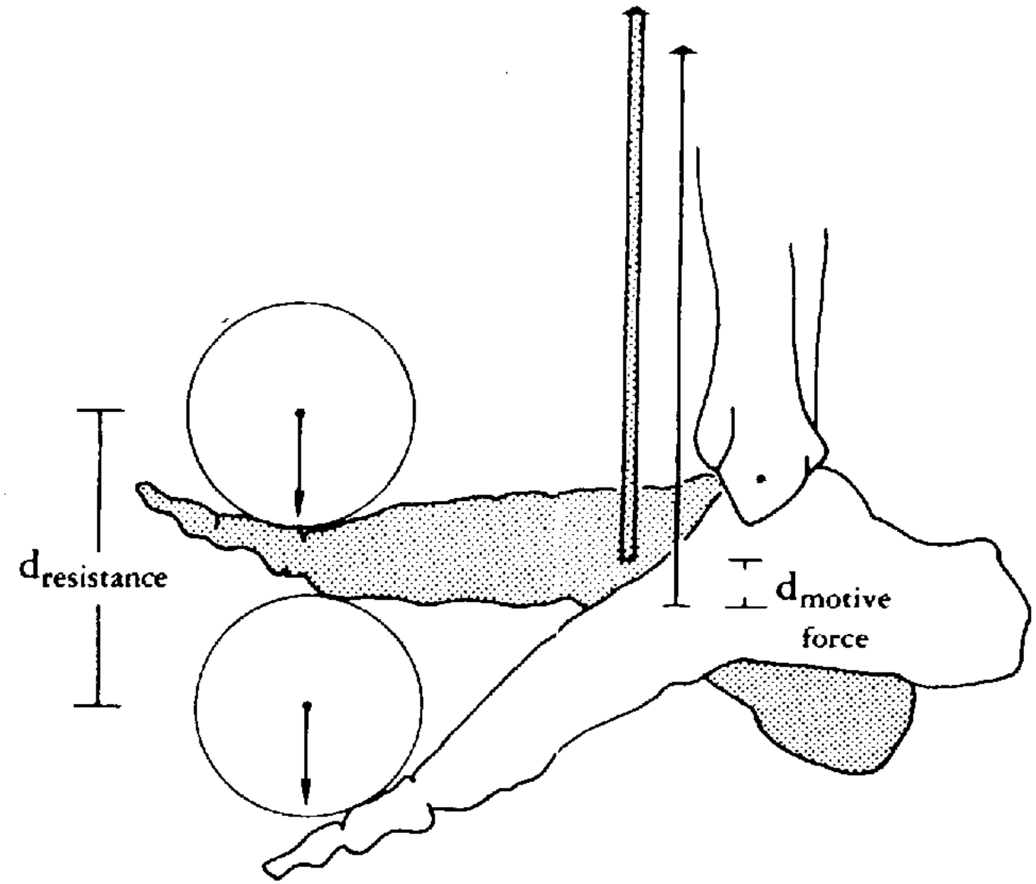
$$F \times 3 = 40 \times 15 + 30 \times 50$$

$$F \times 2 = 13.35 \times 15 + 44.5 \times 45$$

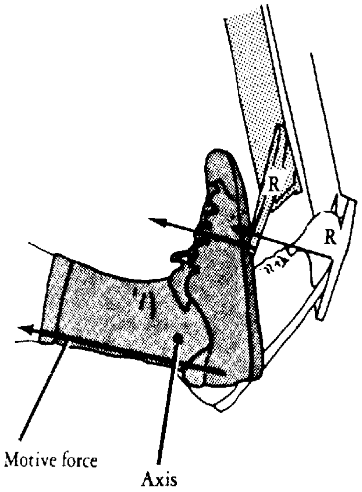
Adduction de l'épaule



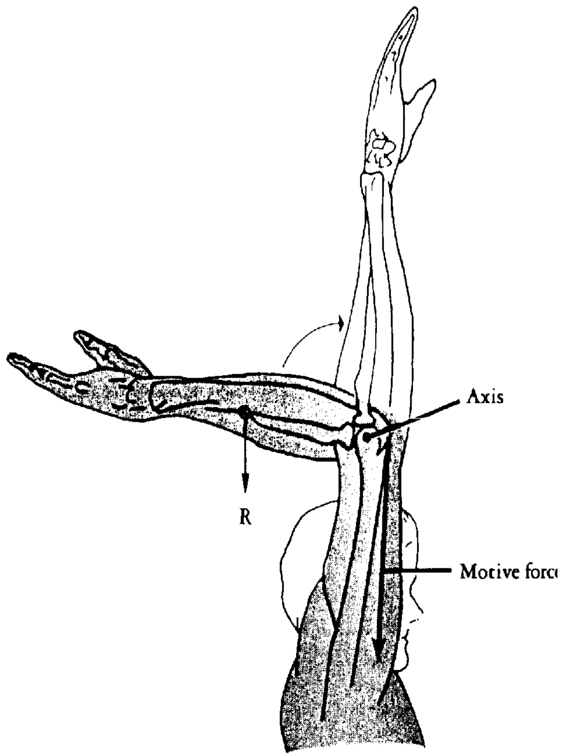
Levier de la cheville

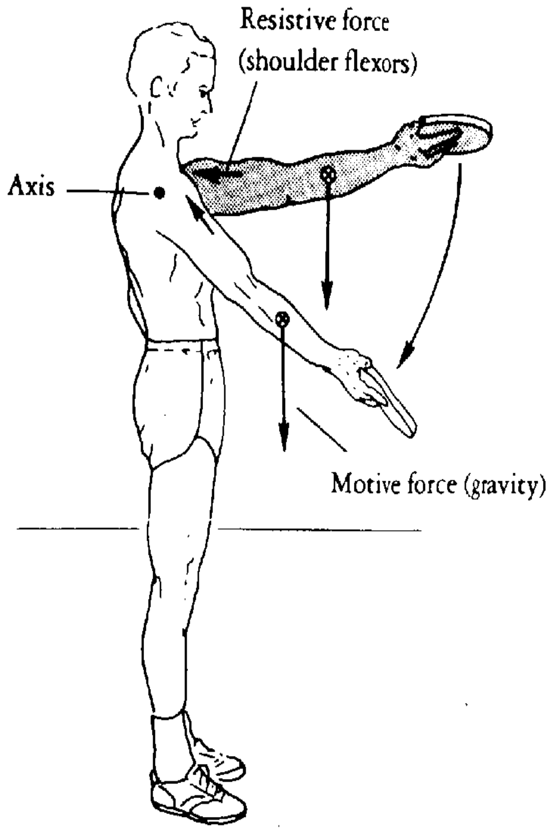


Autres leviers du corps humain

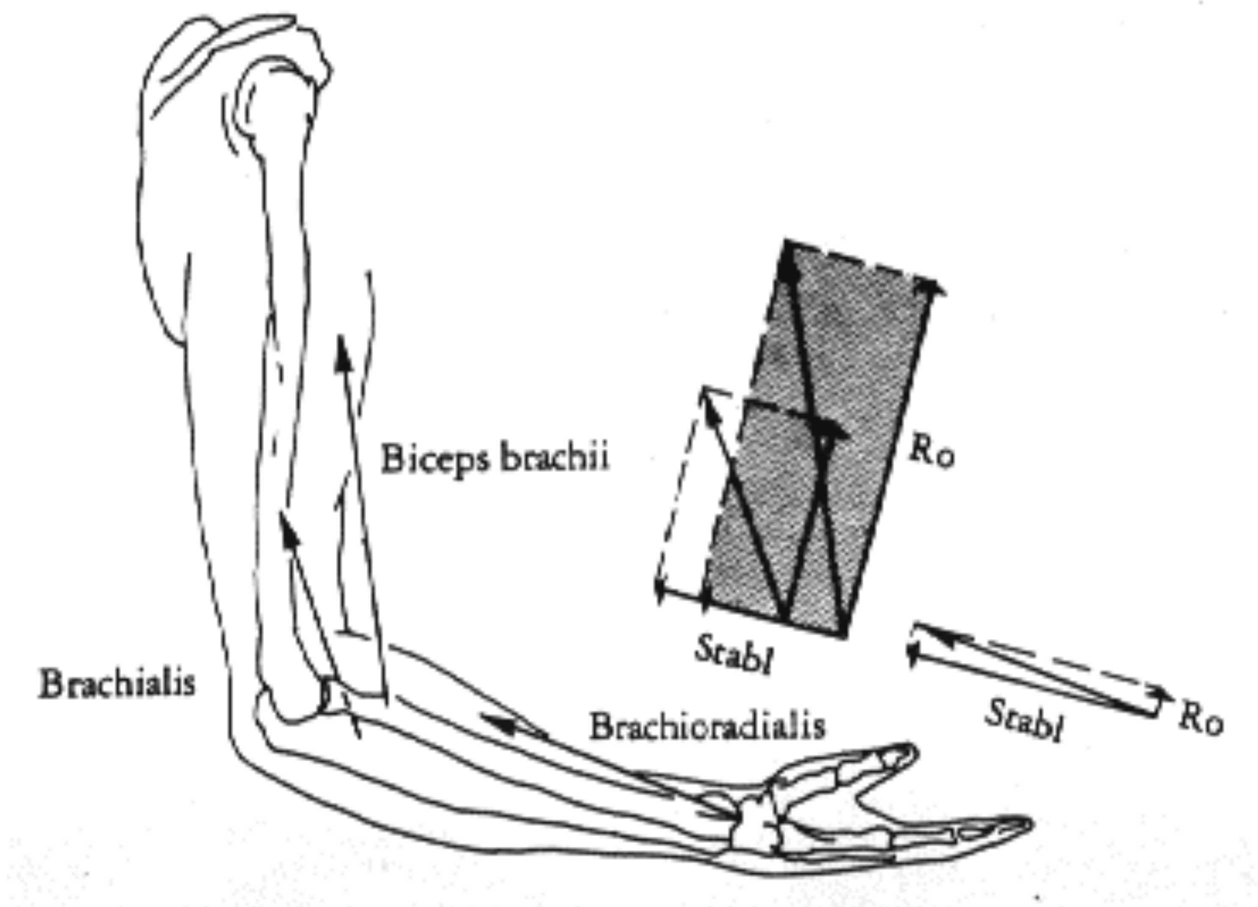


a





Action simultanée de plusieurs muscles



Système de poulie dans le corps humain