

Accélération de Fermi

A photograph of a star with a bright jet of light extending from it, illustrating the concept of Fermi acceleration. The star is a bright yellow-orange point source in the upper left. A long, narrow, and slightly curved jet of light extends from the star towards the lower right. The jet is composed of several distinct, bright, bluish-white segments separated by darker regions, suggesting a series of shock fronts or acceleration sites. The background is a dark, deep blue-green color, speckled with numerous small, distant stars.

Particules énergétiques et astrophysique

- Émission radio, X, gamma, rayons cosmiques
- Les particules énergétiques sont partout !
- Émission non-thermique
 - \Rightarrow particules non-thermiques
 - \Rightarrow accélération !
- Les spectres en loi de puissance sont partout !
- Indices spectraux à peu près universels
- Énergétique \Rightarrow mécanismes efficaces !

Pour accélérer...

- ... il faut prendre de l'énergie quelque part !
 - ◆ Énergie cinétique :
 - ◆ translation (chocs, nuages en mvt → accélération de Fermi)
 - ◆ Rotation (pulsars, trous noirs, étoiles à neutrons)
 - ◆ Énergie gravitationnelle
 - ◆ via l'accrétion...
 - ◆ Énergie électromagnétique (EM)
 - ◆ turbulence, compression, rotation d'aimants...
- *in fine*, les particules chargées interagissent avec les champs EM :
 - ◆ $F = q (E + v \times B)$

→ transfert d'énergie par les champs EM

Champs E et B dans l'univers

- Dans le milieu interstellaire (MIS), $\langle \mathbf{E} \rangle \approx \mathbf{0}$
 - ◆ le MIS est neutre et conducteur
- Champs E transitoires
 - ◆ Reconnexion magnétique (ex. flares solaires...)
 - ◆ Ondes EM (ou MHD)
- Champs E produits dans des “machines”
 - ◆ Machines à induction...
- Champs magnétiques
 - ◆ $\epsilon_B \sim 1 \text{ eV/cm}^3 \sim \epsilon_{\text{opt}} \sim \epsilon_{\text{CMBR}} \sim \epsilon_{\text{CR}} \quad !!!$
 - ◆ Plasmas astrophysiques :
 - ◆ MIS, étoiles, disques d'accrétion, MIG, jets, etc.

Production de champs magnétiques

- Mouvements à grande échelle de milieux ionisés
 - ◆ → génération de champs magnétiques, nuages magnétisés...
- Turbulence du MIS
 - ◆ → turbulence magnétique, inhomogénéités du champ B, ondes plasma...
- Instabilités hydro et MHD
 - ◆ e.g. Rayleigh-Taylor dans les vestiges de supernova
- Instabilité de « streaming »
 - ◆ Les RCs génèrent des ondes dans un plasma magnétoactif
 - ◆ → créent les conditions de leur propre diffusion

Dans de nombreux cas,
l'équipartition peut être atteinte

ex. derrière une onde de choc :
énergie thermique \sim énergie cinétique \sim énergie
magnétique

\Rightarrow Échange d'énergie entre des particules
individuelles et des structures macroscopiques

\Rightarrow Quelques particules peuvent acquérir de très
hautes énergies !

Champs magnétiques et accélération

- Comment est-ce possible ?
 - ◆ Les champs \mathbf{B} ne travaillent pas ($\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$)
- Champs \mathbf{B} variables
 - ◆ $\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$
- Dans un autre référentiel, \mathbf{B} pur est vu comme $\mathbf{E} \dots$
 - ◆ $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (for $v/c \ll 1$)
- En principe, on peut toujours identifier le champ \mathbf{E} effectif qui fait le travail
 - ◆ mais une description en termes de \mathbf{B} est souvent plus simple

→ « accélération par changement de référentiel »

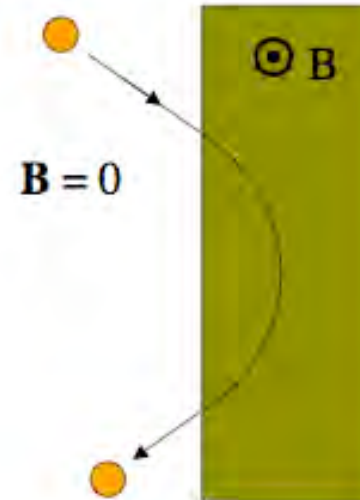
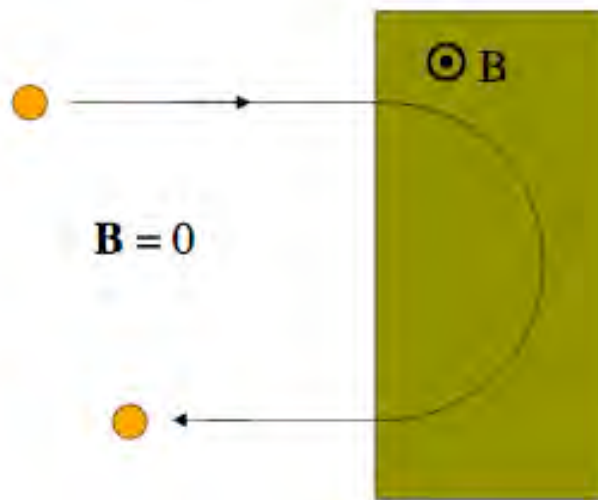
Enrico Fermi: 1949

- « nuages magnétisés » = « miroirs magnétiques »...

Bouteille magnétique, mur magnétique, ligne de champ courbe

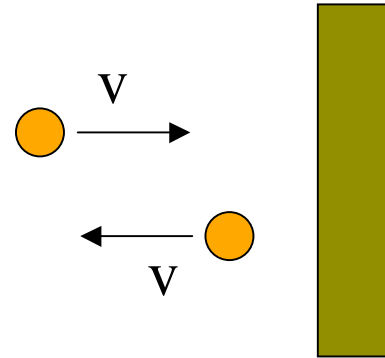


- Rôle central dans le modèle de Fermi

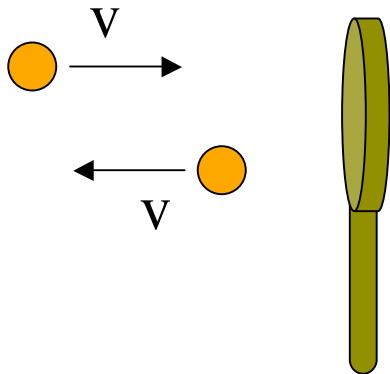


Analogie simple...

- Balle de tennis rebondissant sur un mur
 - ◆ Ni gain ni perte d'énergie



rebond = vitesse inchangée

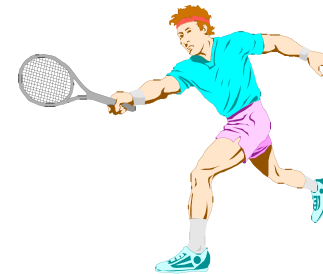
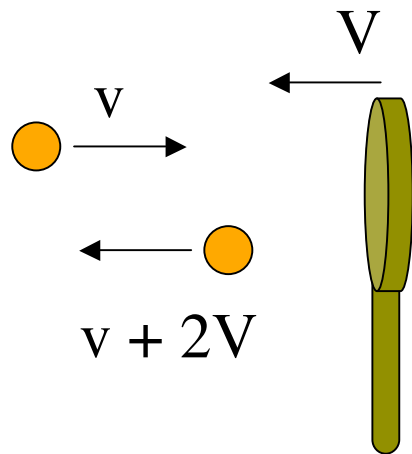


Même chose pour une raquette immobile...

Comment accélérer une balle et jouer au tennis ?!

- Raquette en mouvement

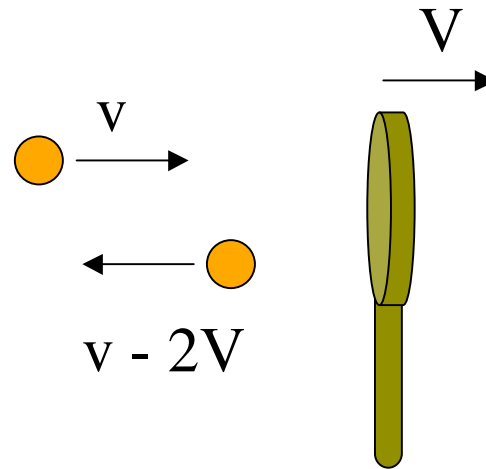
- ◆ Ni gain ni perte d'énergie... dans le réf. de la raquette !



Vitesse inchangée
par rapport à la raquette

→ accélération par changement de référentiel

■ Amortie



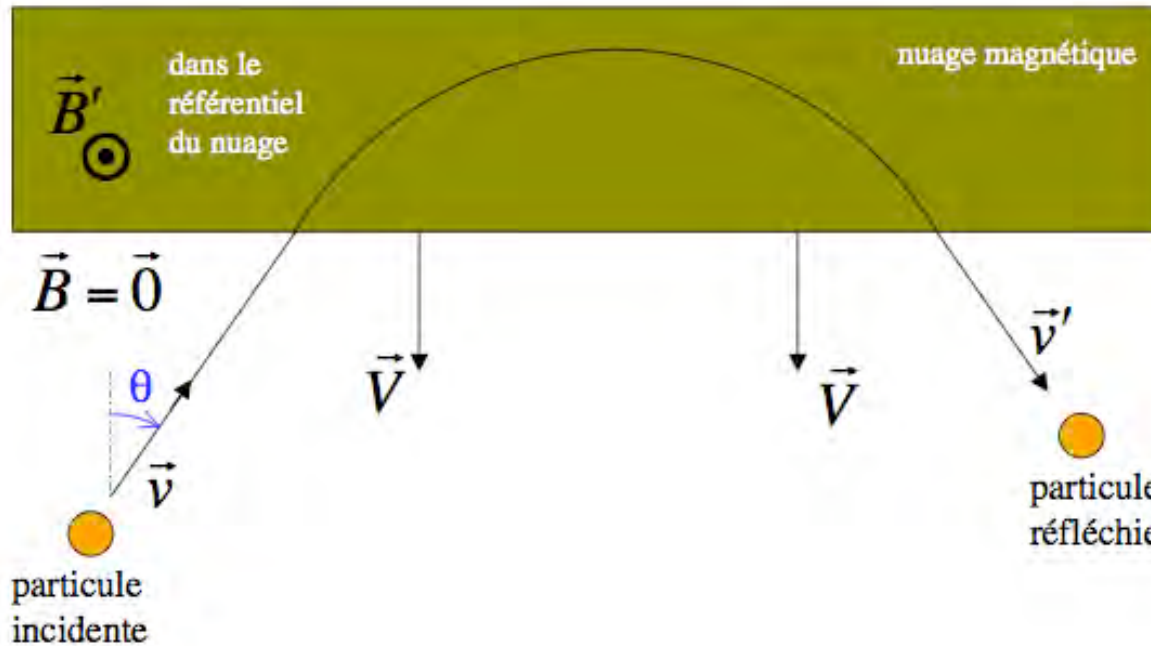
Décélération des particules...

Retour aux particules dans le MIS...

balle \leftrightarrow particule chargée
raquette \leftrightarrow "miroir magnétique"

- Réflexion par un nuage magnétisé en mouvement
 - ◆ Par double changement de référentiel
 - ◆ Par le champ électrique induit



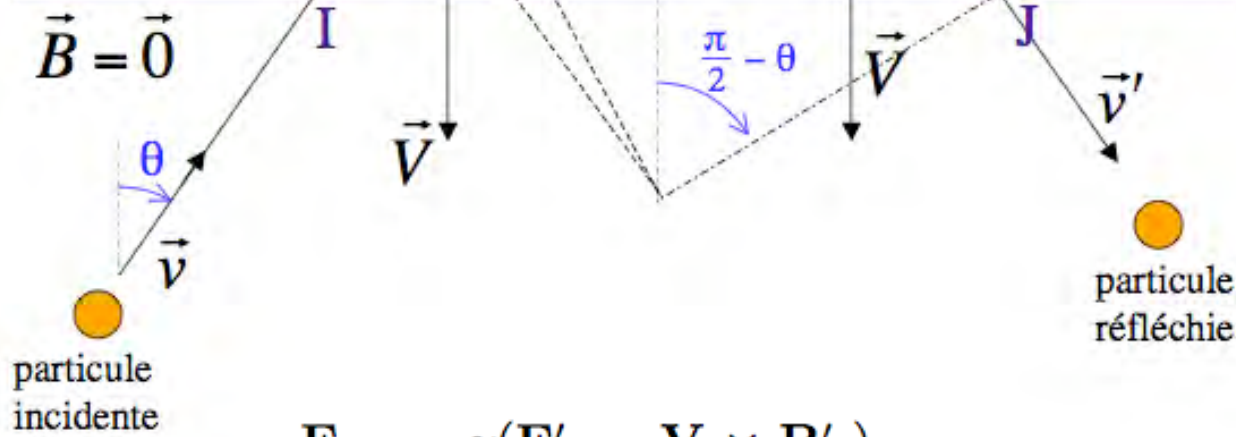
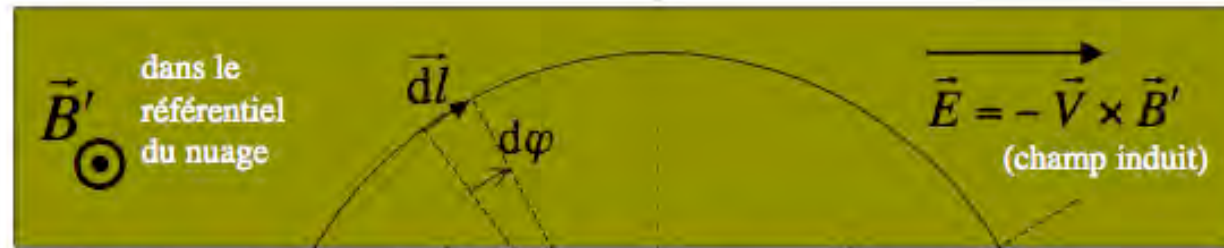


$$\begin{cases} E'_{\text{in}} = \gamma(E_{\text{in}} - p_{\text{in}\parallel} V) \\ p'_{\text{in}\parallel} = \gamma(p_{\text{in}\parallel} - \frac{V}{c^2} E_{\text{in}}) \end{cases} \quad + \quad \begin{cases} E_{\text{out}} = \gamma(E'_{\text{out}} + p'_{\text{out}\parallel} V) \\ p_{\text{out}\parallel} = \gamma(p'_{\text{out}\parallel} + \frac{V}{c^2} E'_{\text{out}}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow E_{\text{out}} = \gamma^2 [E_{\text{in}} (1 + \frac{V^2}{c^2}) - 2p_{\text{in}\parallel} V]$$

$$p_{\parallel} = -Ev \cos \theta / c^2$$

$$\longrightarrow E_{\text{out}} = E_{\text{in}} \left(1 + \frac{2vV \cos \theta}{c^2} \right), \quad \text{soit } \boxed{\frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}$$



$$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{\perp})$$

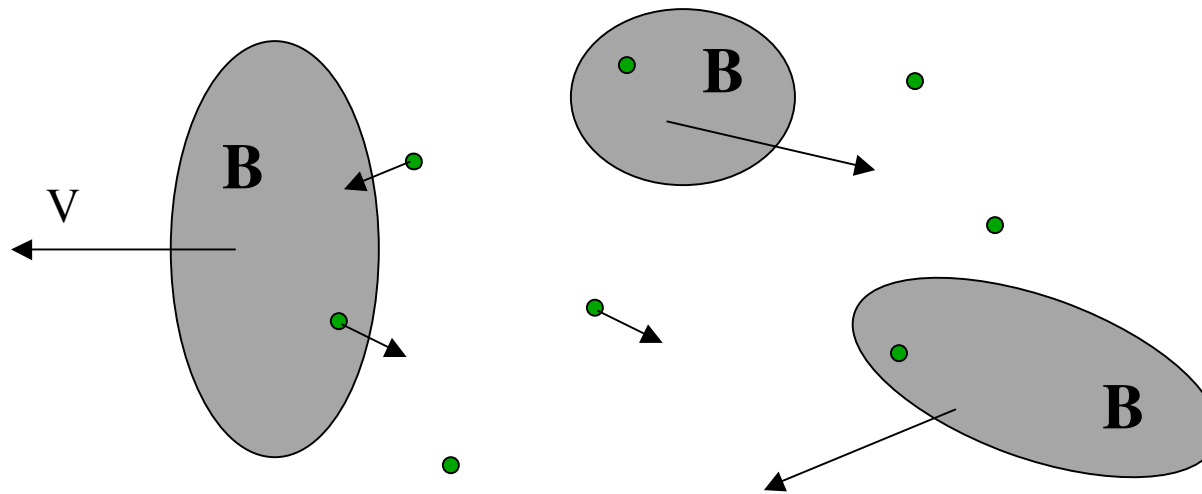
+

$$\Delta E = \int_{\text{arc de cercle}} \mathbf{F}_{\text{el}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{arc}} q\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\varphi} r_g d\varphi$$

→ $\Delta E = 2qVB \cos \theta \frac{p}{qB} = 2E \frac{vV \cos \theta}{c^2},$ soit $\frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}$

Accélération de Fermi

Nuages magnétisés ($M \gg m_p$), de vitesse typique V dans le MIS



- (ou bien « inhomogénéités magnétiques », ondes plasma...)

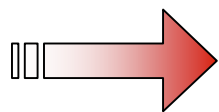
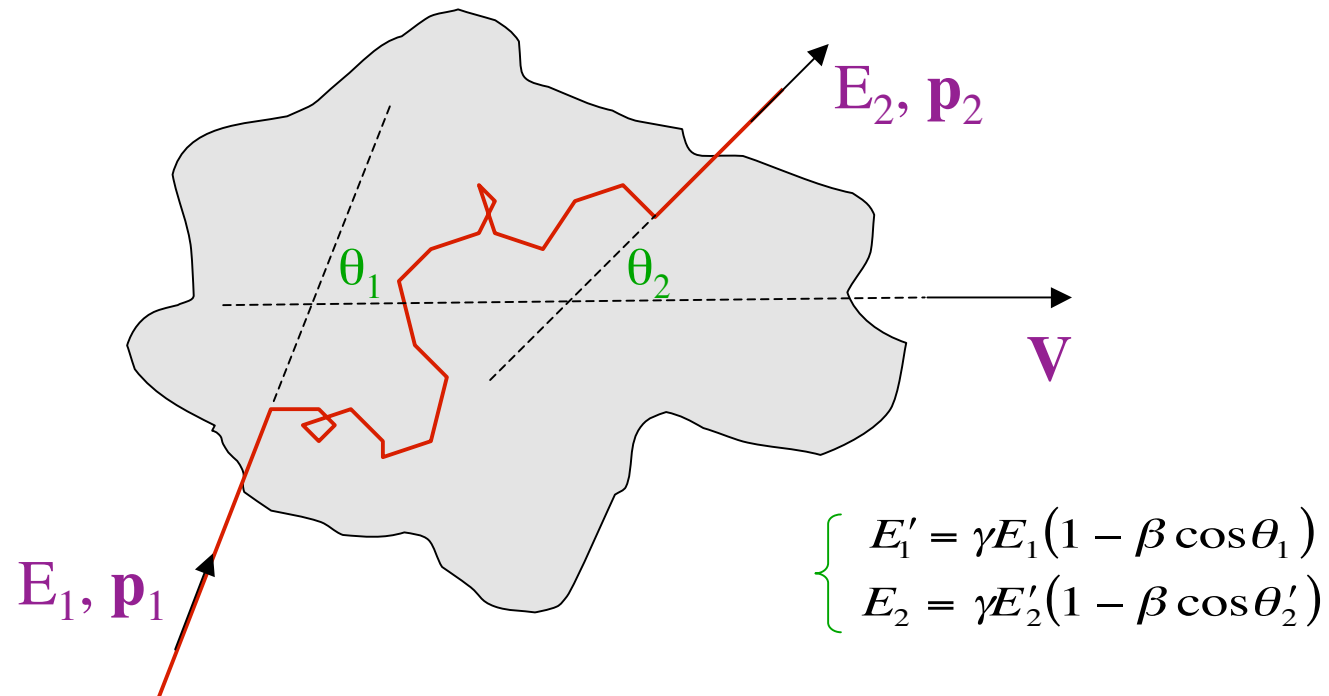
L'essence de l'accélération stochastique de Fermi

- 1 Quand une particule est réfléchiée sur un miroir magnétique venant vers elle, dans une collision **frontale**, elle **gagne** de l'énergie
- 2 Quand une particule est réfléchiée sur un miroir magnétique s'éloignant d'elle, dans une collision **fuyante**, elle **perd** de l'énergie
- 3 Les collisions frontales sont **plus fréquentes** que les collisions fuyantes

⇒ Gain d'énergie net, en moyenne (processus stochastique)

Accélération de Fermi du 2nd ordre

- Direction randomisée par les diffusions sur les champs magnétiques ancrés dans le nuage



$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta'_2 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta'_2}{1 - \beta^2} - 1$$

En moyenne :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta'_2 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta'_2}{1 - \beta^2} - 1$$

Angle de sortie : $\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0$

Angle d'entrée :

probabilité \propto vitesse relative ($v - V \cos \theta$)

$$\rightarrow \langle \cos \theta_1 \rangle = -\beta / 3$$

Finalement...

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1 + \beta^2 / 3}{1 - \beta^2} - 1 \approx \frac{4}{3} \beta^2$$

second ordre en V/c

Taux de gain d'énergie

Libre parcours moyen entre les nuages
le long d'une ligne de champ : L

Temps moyen entre deux collisions

$$\langle L/(c \cos \phi) \rangle = 2L/c$$

Taux d'accélération

$$dE/dt = 2/3 (V^2/cL) \times E \equiv E/\tau_{\text{acc}}$$

C'est la définition d'un processus de Fermi !

Les lois de puissance de Fermi...

- Taux d'accélération : $dE / dt = E / \tau_{\text{acc}}$,
avec τ_{acc} indépendant de E
- Taux d'échappement indépendant de E
 $\Rightarrow P_{\text{esc}} = dt / \tau_{\text{esc}}$
- Injection continue à une énergie E_0



- \Rightarrow loi de puissance d'indice $x = - (1 + \tau_{\text{acc}}/\tau_{\text{esc}})$

Problèmes du modèle de Fermi

- Inefficace

- ◆ $L \sim 1 \text{ pc} \rightarrow \tau_{\text{coll}} \sim \text{quelques années}$
- ◆ $\beta \sim 10^{-4} \rightarrow \beta^2 \sim 10^{-8}$



$$\tau_{\text{acc}} > 10^8 \text{ yr} !!! \quad (\tau_{\text{CR}} \sim 10^7 \text{ yr})$$

→ échelles plus petites

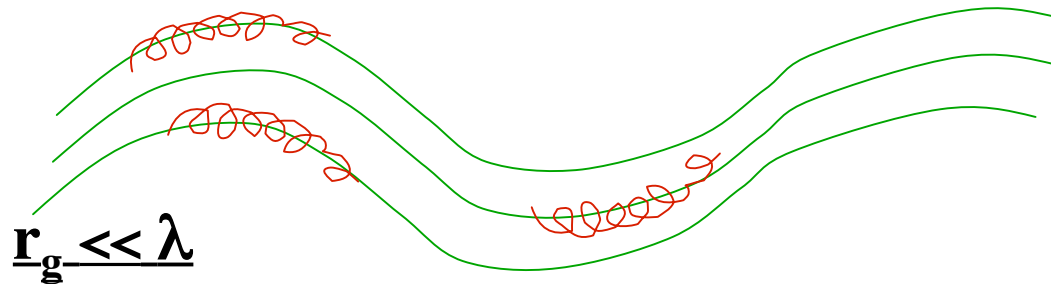
- Les pertes dominant à basse énergie, ainsi que pour les électrons
- Loi de puissance, certes, mais pas universelle

Fermi après Fermi

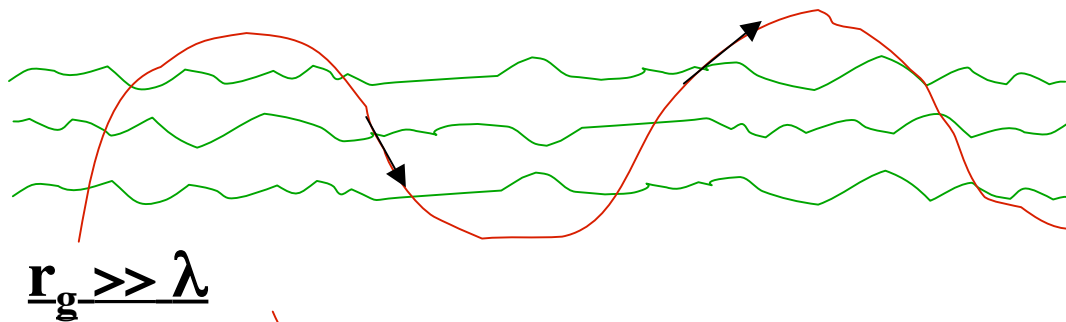
- Les particules peuvent interagir avec n'importe quel type de centres diffuseurs
- Accroissements de densité (= miroirs magnétiques) remplacés par de la turbulence MHD, représentée par des champs MHD aléatoires ou des ondes plasma
- Les particules interagissent avec les ondes par l'intermédiaire de résonances EM, permettant un transfert d'énergie et d'impulsion

Interaction onde-particule

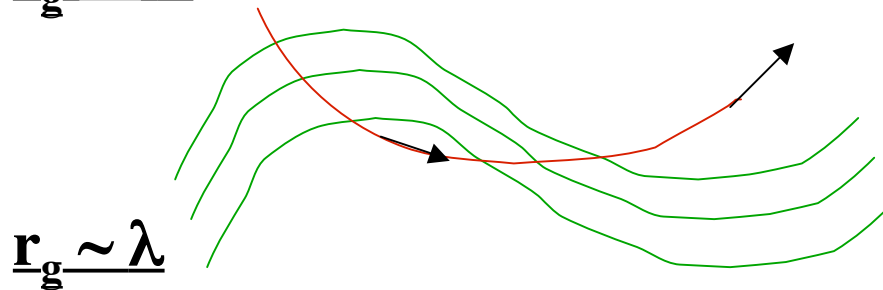
- Inhomogénéités magnétique \approx ligne de champ perturbée



Ajustement du premier invariant adiabatique :
 $p_{\perp}^2 / B \sim \text{const}$



Rien de spécial...



Diffusion du pitch-angle :

$$\Delta\alpha \sim B_1/B_0$$

Dérive du centre de guidage :

$$r \sim r_g \Delta\alpha$$

Génération d'ondes

- L'accélération turbulente nécessite un apport de puissance externe.
- Si $\beta > 1$ ($4\pi\rho v^2/B^2$), les sources sont essentiellement des instabilités MHD grande-échelle
 - ◆ Instabilités de surface sur un jet
 - ◆ Les chocs sont accompagnés de turbulence MHD...
- Si $\beta < 1$, le transport d'énergie est sous forme de champs et de courants
 - ◆ Instabilités « current driven » + résistives
 - ◆ \Rightarrow turbulence MHD et plasma
 - ◆ ex.: un plasma à faible β relaxe spontanément vers un état d'énergie magnétique faible (via une turbulence MHD auto-générée conduisant à une reconnexion locale des lignes de champs)

Ondes plasma

■ Ondes d'Alfvén

- ◆ polarisées circulairement, transverses et se propageant le long du champ B (ou avec un angle)
- ◆ non compressives (à faible amplitude)
- ◆ « oscillations transverse des lignes de champ »
- ◆ $\omega^2 = k^2 c_A^2 \cos^2 \theta / (1 + c_A^2 / c^2)$, $c_A = (B^2 / 4\pi\rho)^{1/2}$
- ◆ existent pour $\omega < \Omega_p = eB/m_p$ (siffleurs si $\Omega_p < \omega < \Omega_e$)

■ Ondes magnétosoniques

- ◆ compressives, se propageant à travers le champ B (ou avec un angle)
- ◆ principalement longitudinales (quand $\theta \rightarrow \pi/2$)
- ◆ force de rappel = pression plasma et magnétique
- ◆ Deux branches (rapide et lente)

Résonance Onde-Particule

- Les ondes affectent les particules relativistes à travers leurs champs électriques fluctuants
- L'influence est la plus grande quand il y a résonance, i.e. les vitesses de l'onde et de la particule sont bien ajustées
- Pour les ondes d'Alfvén: résonance cyclotron (ou Doppler):

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = n\Omega \quad (\Omega = qB/\gamma m)$$

- Le ΔB tournant de l'onde est en phase avec l'électron pour $n=-1$ (+1 pour les protons) (\rightarrow force de Lorentz cohérente)

Résonance Onde-Particule

- $n = 0 : \omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$: résonance Landau (ou Cherenkov)
- L'onde est vue Doppler shiftée à fréquence nulle : interaction entre le moment magnétique de la particule et le gradient du champ de l'onde...
- Les particules peuvent interagir de cette façon avec n'importe quelle longueur d'onde, si elles ont le bon pitch-angle
- NB: le taux de gain d'énergie dépend de p_{\perp} , mais l'énergie va à $p_{\parallel} \Rightarrow$ l'isotropisation des pitch-angles est nécessaire !

Isotropisation et ralentissement

- Une distribution anisotrope de particules relativistes génère des ondes d'Alfvén résonantes à un taux proportionnel à l'anisotropie et à la vitesse relative de streaming.
- Les ondes auto-générées vont ensuite diffuser les particules, maintenant l'isotropie et réduisant la vitesse de streaming à $\sim c_A$
- NB: si elle sont générées de l'extérieur, les ondes d'Alfvén peuvent aussi transférer de l'énergie aux particules, mais taux d'accélération plus faible que taux de diffusion par $c_A/c...$

Accélération turbulente de Fermi

- Les particules sont diffusées par les ondes comme elles l'étaient par les nuages magnétisés dans le modèle initial de Fermi
- L'influence de l'accélération turbulente par les ondes MHD sur le spectre des particules dépend du spectre de puissance des ondes, des mécanismes de pertes d'énergie concurrents, et de l'échappement des particules...
- NB: il existe un moyen générique d'obtenir un spectre en loi de puissance (= idée originale de Fermi)

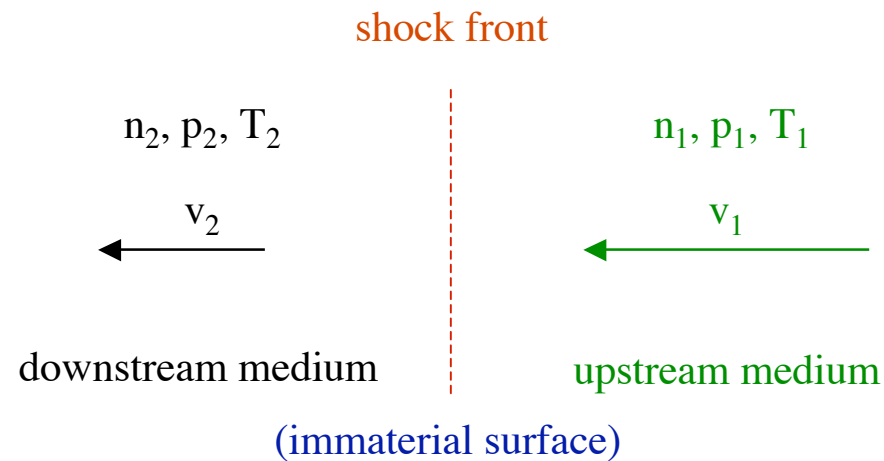


Accélération diffusive par onde de choc

Un processus de Fermi du 1^{er} ordre !

Shock waves

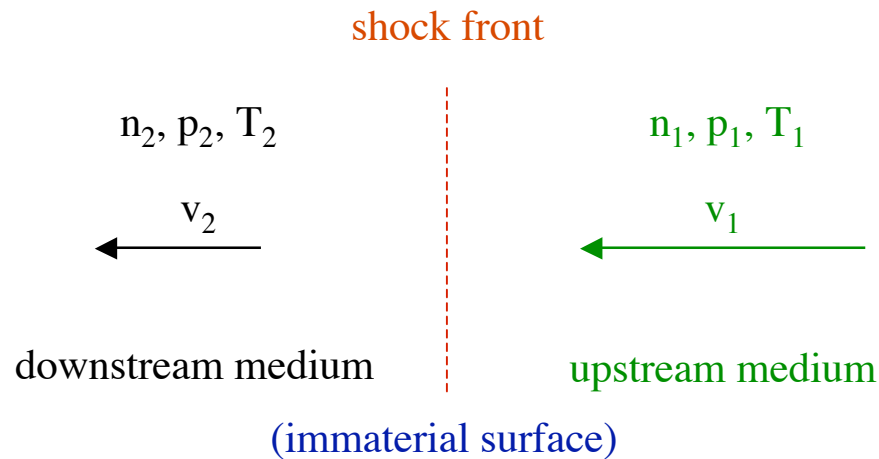
- Discontinuity in physical parameters



- What can we tell from the purely macroscopic point of view?

Shock waves “jump conditions”

- Conservation equations



mass

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1$$

momentum

$$p_2 + \rho_2 v_2^2 = p_1 + \rho_1 v_1^2$$

energy

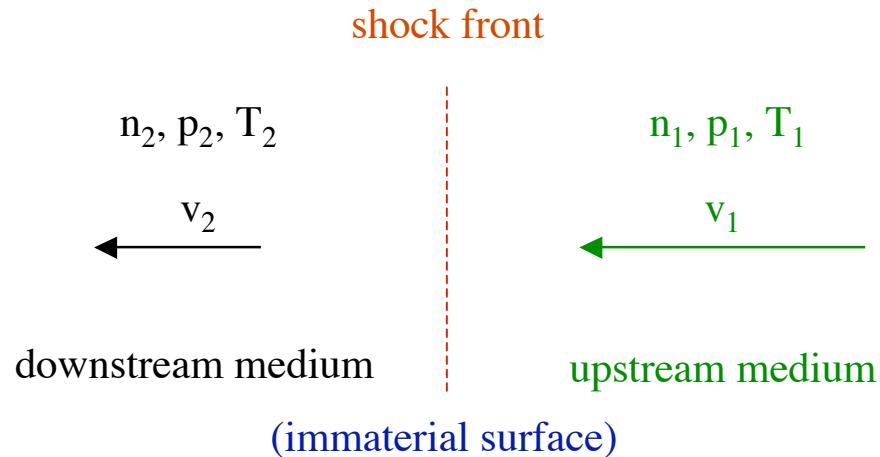
$$\rho_2 v_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 \right) = \rho_1 v_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 \right)$$

$$e_i = \frac{1}{\gamma - 1} (p_i / \rho_i)$$

adiabatic index

Shock waves “jump conditions”

- Solve macroscopic conservation equations



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma + M_1^{-2} \pm (1 - M_1^{-2})}{\gamma + 1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2M_1^{-2}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][\gamma - 1 + 2M_1^{-2}]}{(\gamma + 1)^2}$$

$$M_1 = v_1/c_1$$

- Solution:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma + 1/M_1^2 \pm (1 - 1/M_1^2)}{\gamma + 1}$$

- Trivial solution: $v_2 = v_1$!
- Shock wave solution:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\gamma - 1 + 2/M_1^2}{\gamma + 1} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

- NB: M_1 can be either > 1 or < 1 , but

$$[M_1^2 - (\gamma - 1)/2\gamma] \times [M_2^2 - (\gamma - 1)/2\gamma] = ((\gamma + 1)/2\gamma)^2$$

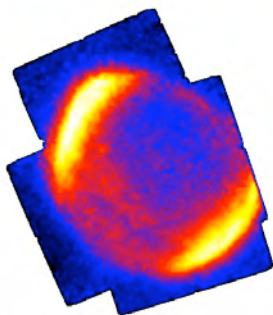
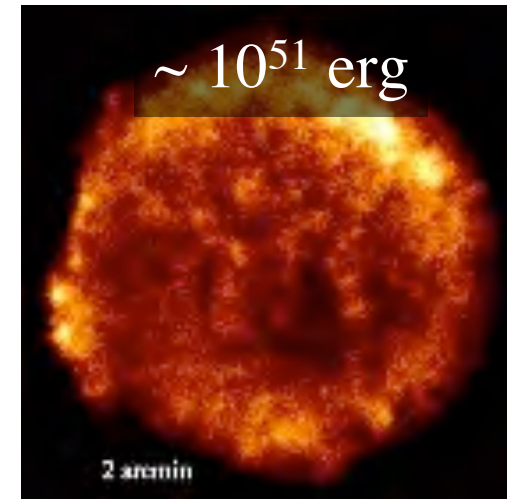
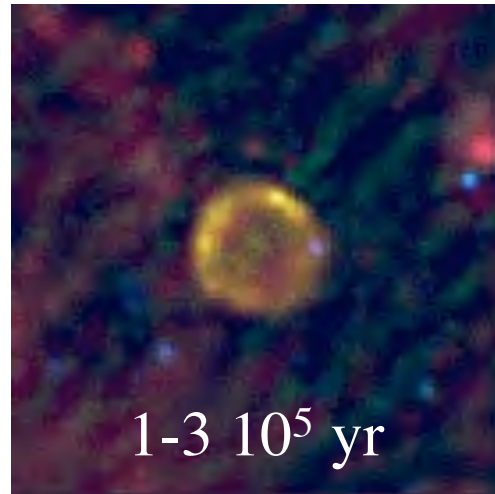
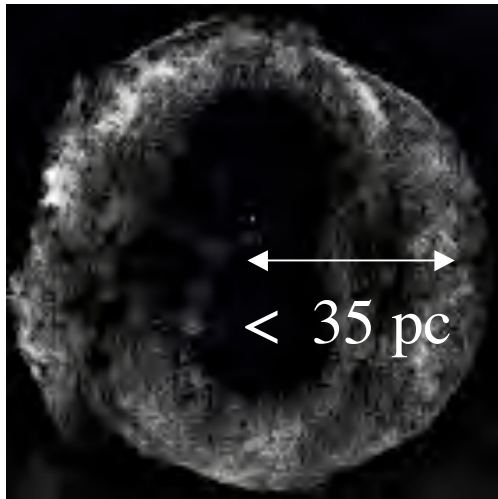
$$M_1 > 1 \Leftrightarrow M_2 < 1$$

But entropy must increase!

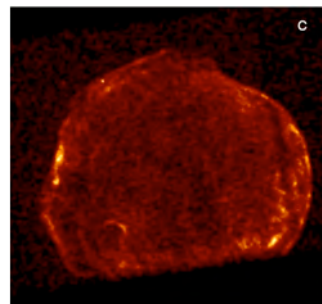
Astrophysical shocks

- Supernovae eject supersonic material

S
N
R



SN 1006




Tycho

- + gamma-ray bursts (relativistic fireballs)
- Stellar mass black holes emit plasma blobs

Astrophysical shocks

- Active galactic nuclei produce jets with internal shocks and huge shocks at the end (hot spots)

3C 219

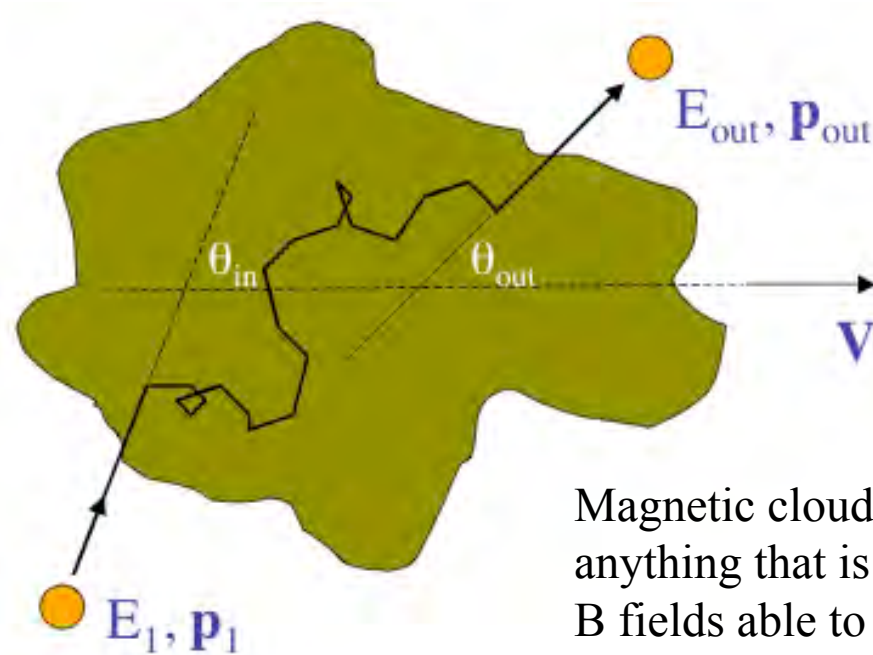
The image shows the radio galaxy 3C 219, also known as the 'Twin Lobes' galaxy. It features two large, bright, orange-red lobes extending from a central region. A narrow jet of material connects the two lobes, with a bright spot at its base. The central region is also very bright, indicating the presence of an active galactic nucleus. The background is dark, highlighting the structure of the galaxy.

- In the interstellar or intergalactic medium, all the shocks are “collisionless”!

What is a collisionless shock?!

- SN shocks: $V \sim 10\,000$ km/s ; $E \sim 2$ MeV/proton
- Stopping length ~ 1 kpc !
- But: interaction with B and E fields
 - ◆ $R_L = p/qB \sim 10^{-8}$ pc
 - ◆ Streaming with $v > c_A$ “impossible”.

“Acceleration by change-of-frame”

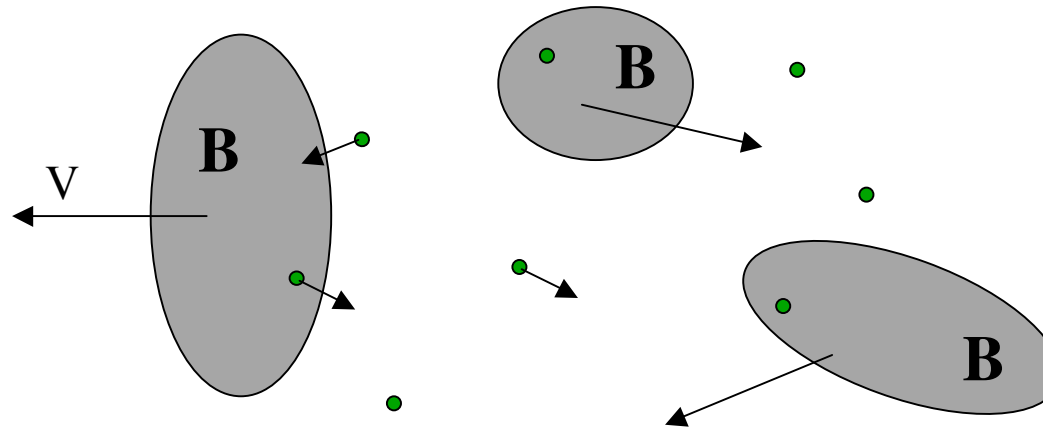


Magnetic cloud, MHD wave, etc.:
anything that is moving are carrying
B fields able to scatter particles...

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\beta(\cos \theta'_{out} - \cos \theta_{in}) + \beta^2(1 - \cos \theta_{in} \cos \theta'_{out})}{1 - \beta^2}$$

Second order, stochastic Fermi accélération

- More head-on collisions than overtaking collisions



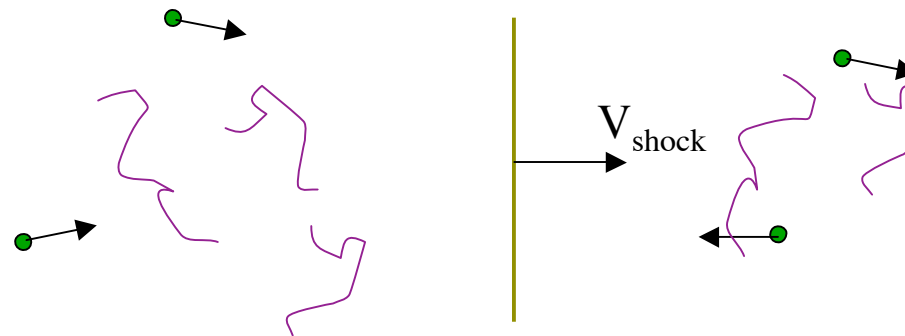
- The energy gain is only due to the difference in both collision rates, which is $\propto V/c$
- Energy change at each “collision”: $\propto V/c$
- Resulting average energy gain: $\propto (V/c)^2$

Diffusive shock acceleration

- Shock wave (e.g. supernova explosion)

Shocked medium

Interstellar medium

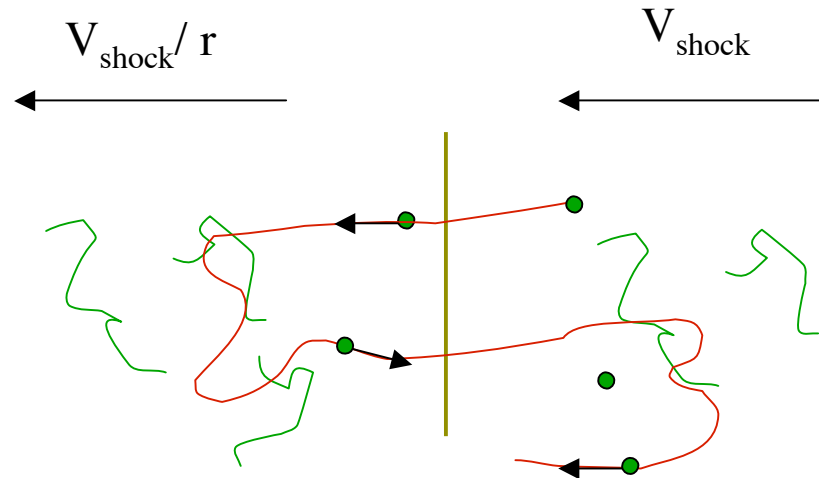


- Magnetic wave production
 - ◆ **Downstream** : by the shock (compression, turbulence, hydro and MHD-instabilities, shear flows, etc.)
 - ◆ **Upstream** : by the cosmic rays themselves !
- → ‘isotropisation’ of the distribution (in local rest frame)

You're always lucky!

Shocked medium

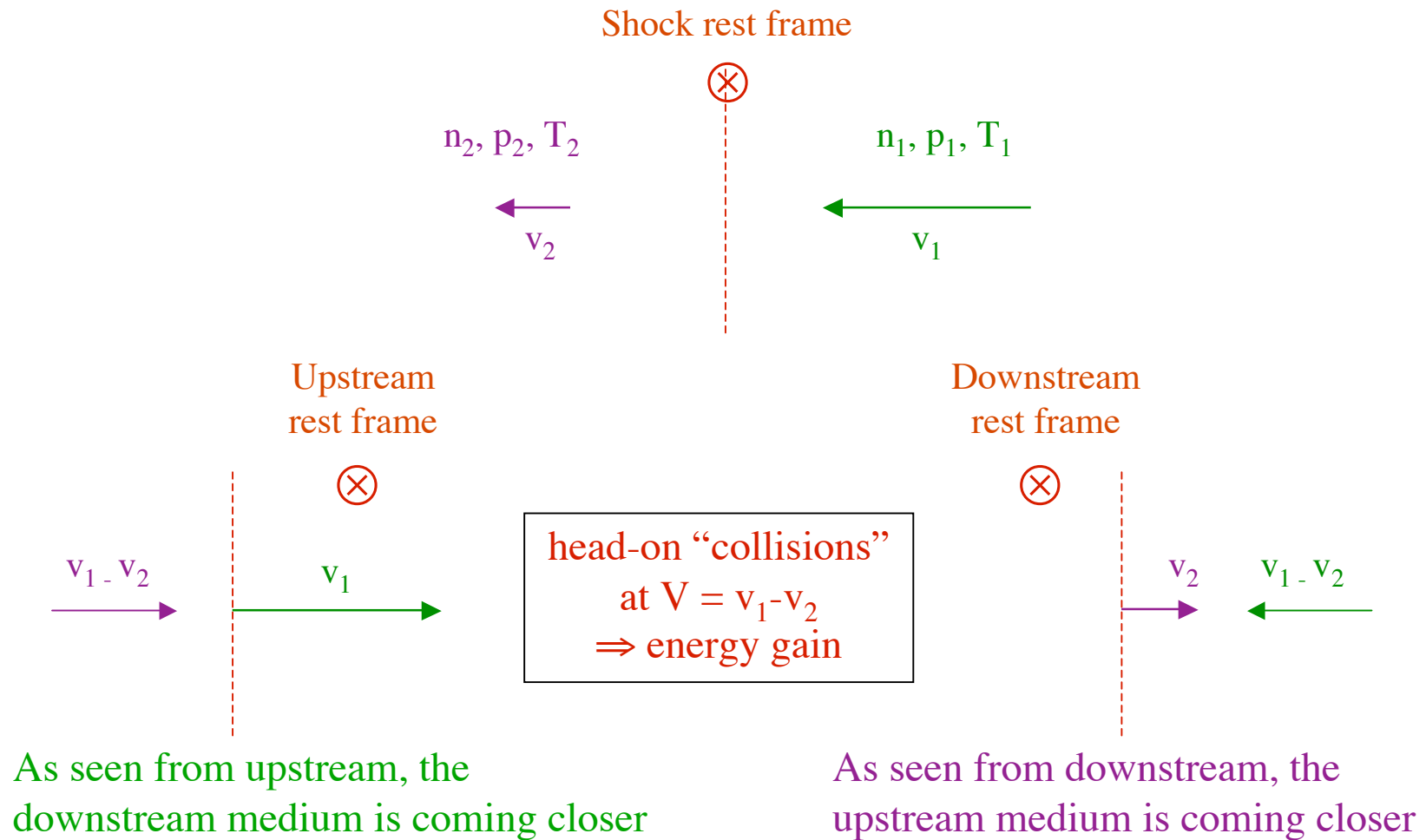
Interstellar medium



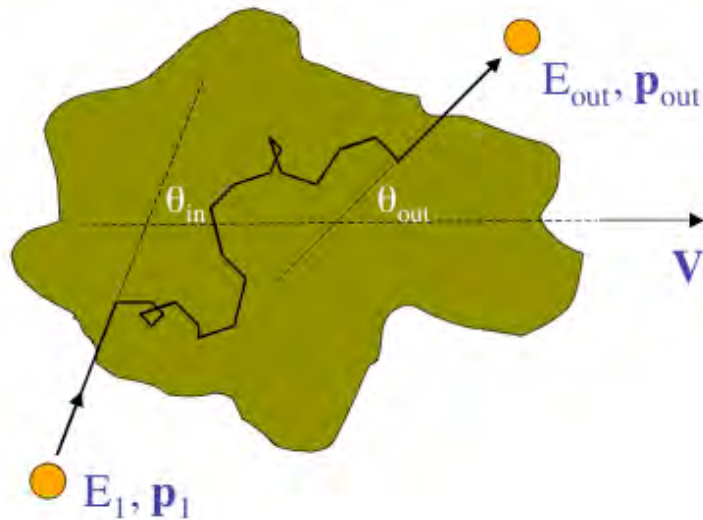
- At each crossing, the particle sees a 'magnetic wall' at $V = (1-1/r)$
- → only head-on collisions...

Shock acceleration

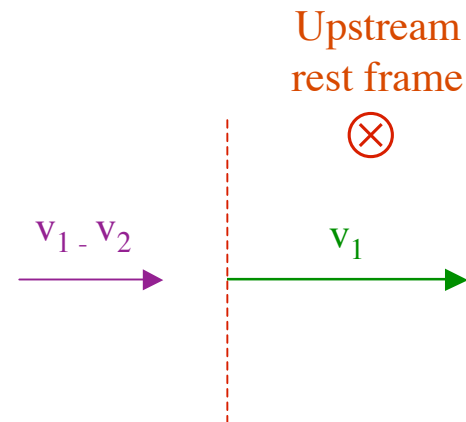
- 3 points of view...



New version of the same calculation



- Magnetic cloud replaced by the plasma on the other side of the shock front



$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\beta(\cos \theta'_{out} - \cos \theta_{in}) + \beta^2(1 - \cos \theta_{in} \cos \theta'_{out})}{1 - \beta^2}$$

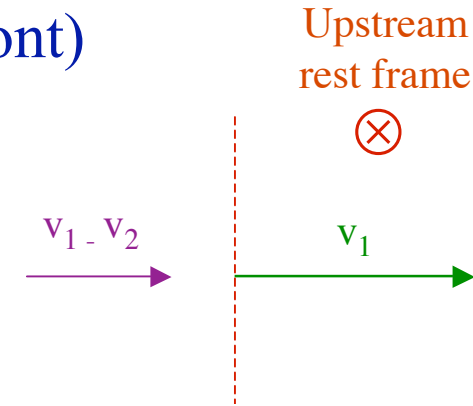
- Angular distribution at the crossing of the shock
(isotropy on either side of the shock front)

$$dn(\theta) = \frac{n_0}{4\pi} d\Omega(\theta) = \frac{1}{2} n_0 \sin \theta d\theta$$



$$d^4N = \underbrace{v \cos \theta}_{\text{relative velocity}} dn(\theta) dt d^2S = \frac{1}{2} n_0 v \cos \theta \sin \theta d\theta dt d^2S$$

relative velocity




- Average crossing angles

$$\langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle = \frac{\int_{\pi}^{\pi/2} \cos \theta_{\text{in}}^2 \sin \theta_{\text{in}} d\theta_{\text{in}}}{\int_{\pi}^{\pi/2} \cos \theta_{\text{in}} \sin \theta_{\text{in}} d\theta_{\text{in}}} = -\frac{2}{3}$$

and $\langle \cos \theta'_{\text{out}} \rangle = 2/3$

Average energy gain

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\beta(\cos \theta'_{\text{out}} - \cos \theta_{\text{in}}) + \beta^2(1 - \cos \theta_{\text{in}} \cos \theta'_{\text{out}})}{1 - \beta^2}$$


$$\langle \Delta E \rangle = \frac{4}{3}\beta E = \frac{4\Delta v}{3c}E$$

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{r-1}{r}V_{\text{choc}}$$



$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{4r-1}{3r} \frac{V_{\text{choc}}}{c}$$

Shock acceleration:

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{4r - 1}{3} \frac{V_{\text{choc}}}{c}$$

$$\Delta E > 0$$

- Acceleration process

$$\Delta E \propto E$$

$$(\Delta E/E = \text{cst})$$

- Fermi process

$$\Delta E/E \propto \Delta v/c$$

- First order process

- Acceleration cycles

$$E_n = (1 + k)^n E_0 \quad \text{where} \quad k = \frac{4r - 1}{3} \beta_{\text{choc}}$$

Shock acceleration cycles

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{4r-1}{3} \frac{V_{\text{choc}}}{c}$$

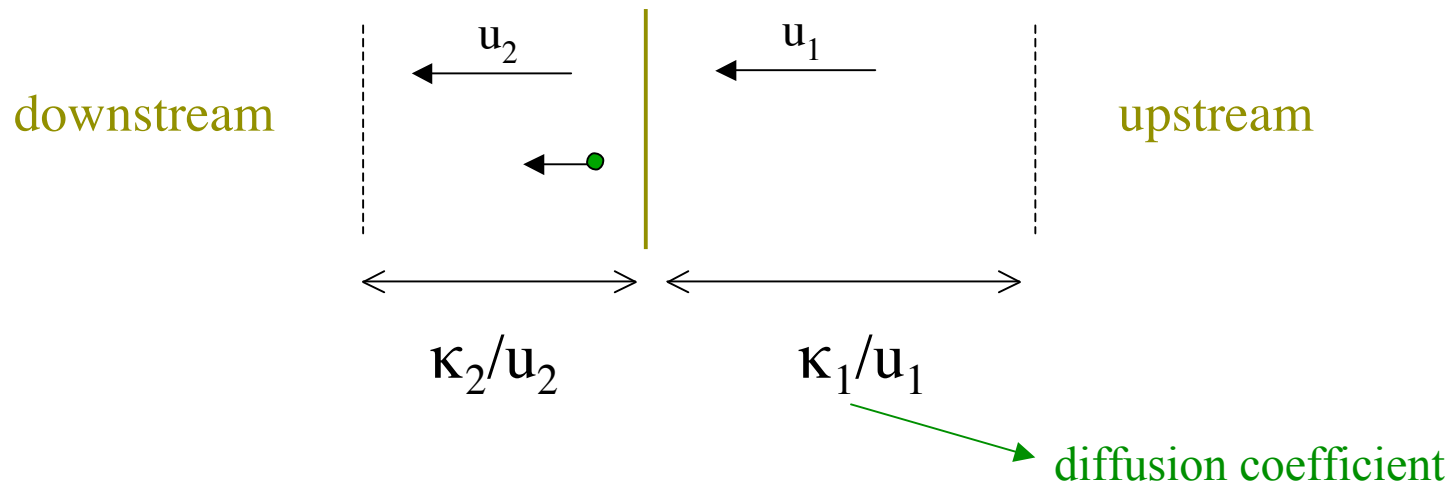
- After n cycles

$$E_n = (1+k)^n E_0 \quad \text{where} \quad k = \frac{4r-1}{3} \beta_{\text{choc}}$$

$$\Delta E = kE$$

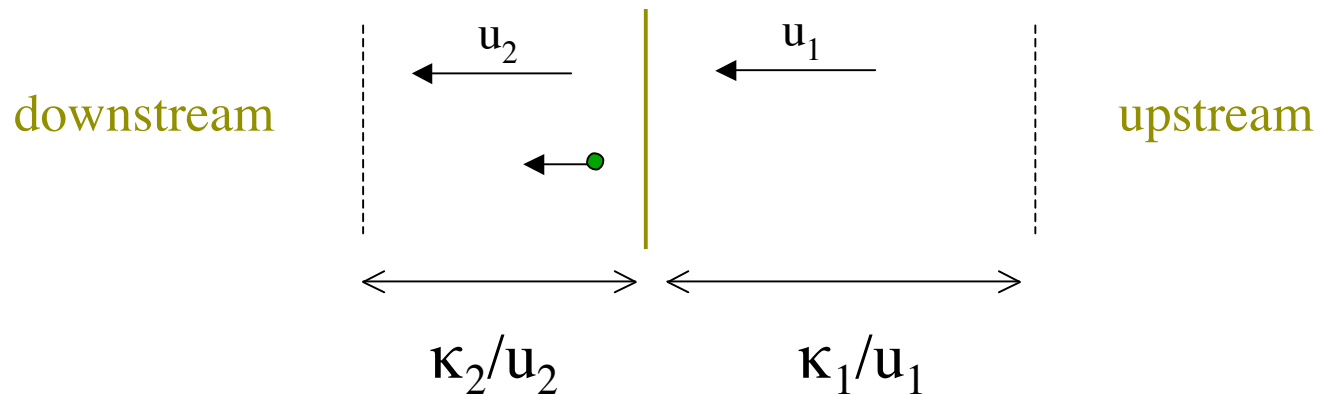
- Cf. stochastic, second order Fermi acceleration process: exponential growth of the energy
- Acceleration rate: $dE/dt = E/\tau_{\text{acc}}$
with τ_{acc} independent of E
- Escape rate independent of $E \Rightarrow dP_{\text{esc}} = dt/\tau_{\text{esc}}$

Acceleration rate



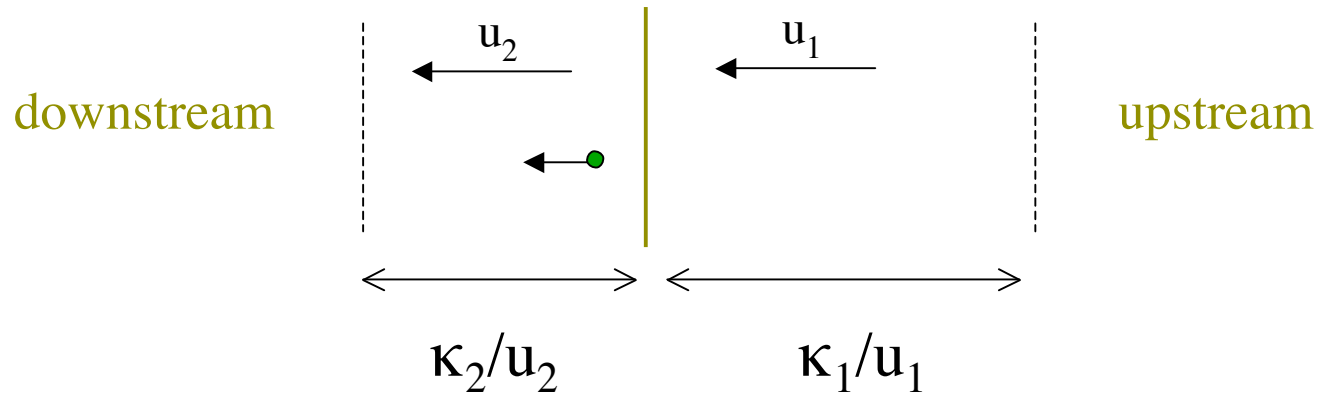
- Time to complete one cycle:
 - ◆ Confinement distance: κ/u
 - ◆ Average time spent upstream: $t_1 \approx 4\kappa / cu_1$
 - ◆ Average time spent upstream: $t_2 \approx 4\kappa / cu_2$

Acceleration rate



- Bohm limit: $\kappa = r_g v/3 \sim E\beta^2/3qB$
 - ◆ Proton at 10 GeV: $\kappa \sim 10^{22} \text{ cm}^2/\text{s}$
 - ◆ $\Rightarrow t_{\text{cycle}} \sim 10^4 \text{ seconds !}$
- Finally, $\tau_{\text{acc}} \sim t_{\text{cycle}} \times V_s/c \sim 1 \text{ month !}$

Beware!



$$\tau_{\text{acc}} = \frac{E}{\Delta E / \Delta t} \quad \text{with} \quad \langle \Delta t \rangle = 4 \left(\frac{\langle \kappa_1 \rangle}{v_1 c} + \frac{\langle \kappa_2 \rangle}{v_2 c} \right)$$

$$\text{and} \quad \kappa \propto E^\alpha$$

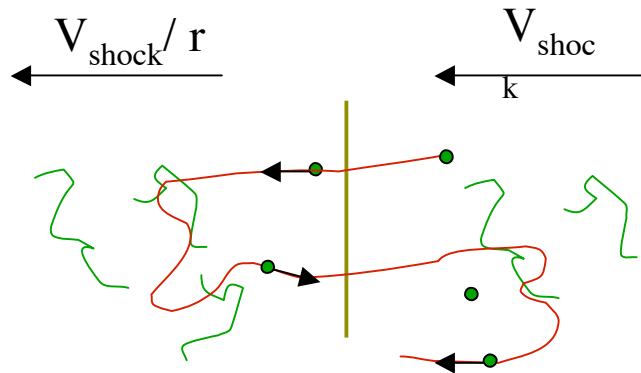


The acceleration timescale depends on E



But this was required to get a power-law spectrum (cf. Fermi miracle!)

Second ingredient: escape timescale



- Flux of particles crossing from upstream to downstream

$$\Phi_{ud} = \frac{1}{4} n_0 v$$

- Flux of particles escaping downstream

$$\Phi_{esc} = n_0 v_2 = \frac{n_0 V_{choc}}{4}$$

- Escape probability

$$\mathcal{P}_{esc} = \frac{\Phi_{esc}}{\Phi_{ud}} = \frac{4v_2}{v} = \frac{4V_{choc}}{r v} = \frac{4}{r} \beta_{choc}$$

- Escape timescale $\tau_{esc} = \mathcal{P}_{esc} \times \Delta t_{cycle}$ also depends on E!

A power-law spectrum anyway!

- Both τ_{acc} and τ_{esc} depend on E , but $\tau_{\text{acc}}/\tau_{\text{esc}}$ does not!
- So let's forget about time, and think in terms of cycles...
 - ◆ Both the relative energy gain and the escape probability **per cycle** are independent of E : this is enough!

$$\mathcal{P}_{\text{esc}} = \frac{\Phi_{\text{esc}}}{\Phi_{\text{ud}}} = \frac{4v_2}{v} = \frac{4V_{\text{choc}}}{r v} = \frac{4}{r} \beta_{\text{choc}}$$

$$\Delta E = kE \quad \text{where} \quad k = \frac{4r-1}{3r} \beta_{\text{choc}}$$

Resulting energy spectrum

- Return probability: $\mathcal{P}_{\text{ret}} = 1 - \mathcal{P}_{\text{esc}}$

- Remaining number of particles after n cycles:

$$N_n = N_0 \mathcal{P}_{\text{ret}}^n = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^n$$

- Energy after n cycles $E_n = (1 + k)^n E_0$

$$n = \frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)} \implies N(\geq E) = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^{\frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)}}$$

$$\implies N(\geq E) = N_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{\log(1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})}{\log(1+k)}} \implies N(E)$$

Resulting energy spectrum

- Return probability: $\mathcal{P}_{\text{ret}} = 1 - \mathcal{P}_{\text{esc}}$

- Remaining number of particles after n cycles:

$$N_n = N_0 \mathcal{P}_{\text{ret}}^n = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^n$$

- Energy after n cycles $E_n = (1 + k)^n E_0$

$$n = \frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)} \implies N(\geq E) = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^{\frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)}}$$

$$\implies N(\geq E) = N_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{\log(1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})}{\log(1+k)}} \implies N(E) = \left| \frac{dN(\geq E)}{dE} \right|$$

Universal power-law index

- One obtains:

$$N(E) = (x - 1) \frac{N_0}{E_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-x} \quad \text{with} \quad x = 1 - \frac{\ln(1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})}{\ln(1 + k)}$$

- For a non-relativistic shock

- ◆ $\mathcal{P}_{\text{esc}} \ll 1$
- ◆ $\Delta E/E \ll 1$

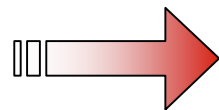


$$x = 1 + \frac{\mathcal{P}_{\text{esc}}}{k} = \frac{r + 2}{r - 1}$$

- ... where 'r' is the shock compression ratio

- ◆ $r = \gamma + 1 / \gamma - 1$ for a strong shock

- For a monoatomic or fully ionised gas, $\gamma = 5/3$

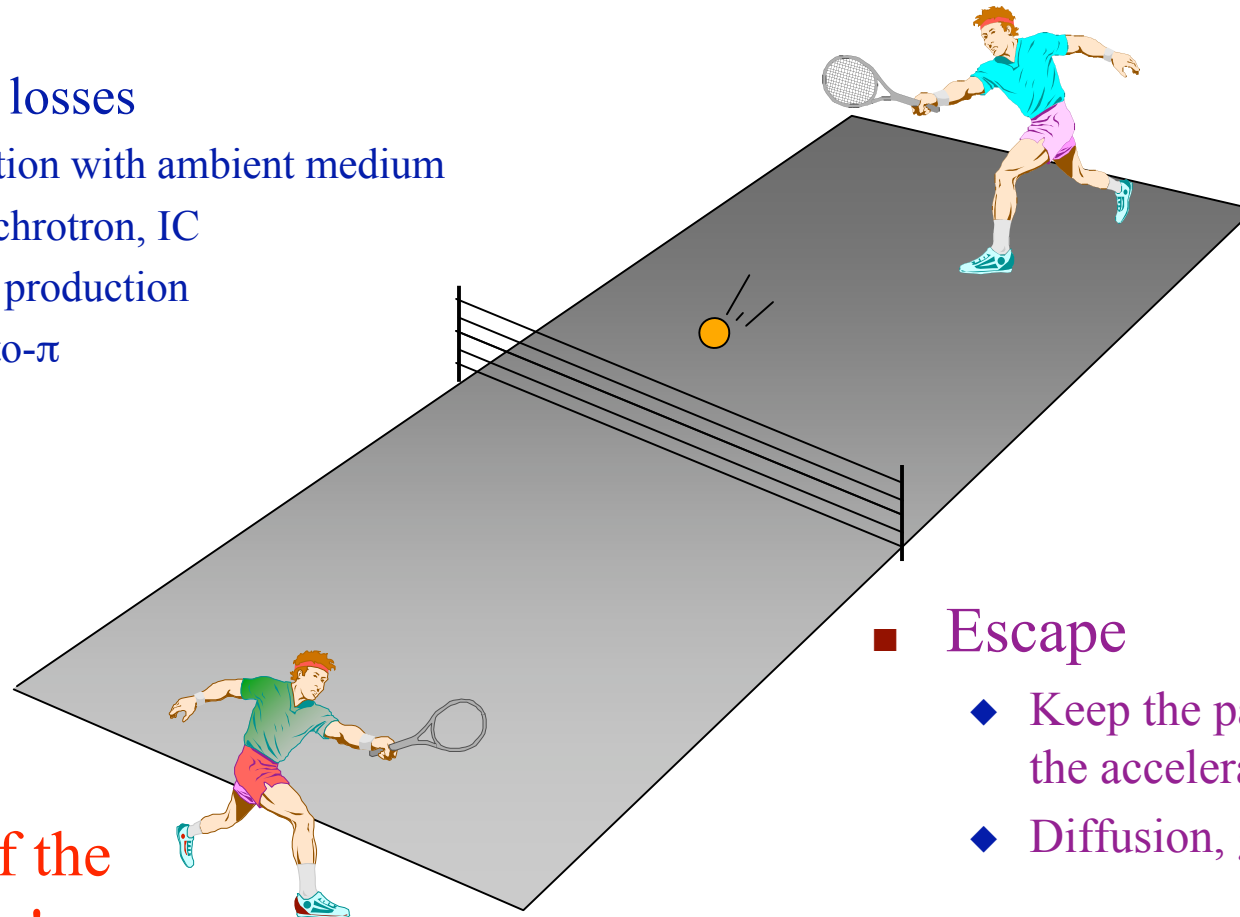


$x = 2$, compatible with observations

Maximum energy achievable?

■ Energy losses

- ◆ Friction with ambient medium
- ◆ Synchrotron, IC
- ◆ Pair production
- ◆ photo- π



■ Age of the players!

■ Escape

- ◆ Keep the particle in the accelerator
- ◆ Diffusion, gyroradius

■ Destruction

- ◆ Photo-disintegration

Fermi 1 vs Fermi 2

- Acceleration timescale

$$\tau_{\text{acc}} = \frac{\Delta t_{\text{coll}}}{\langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}}}$$

- Second order (stochastic) Fermi acceleration

$$\Delta t_{\text{coll}} \sim \tau_s \quad \text{and} \quad \langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}} \sim \beta_A^2 \quad \text{with} \quad \beta_A \equiv v_A / c$$

so

$$\tau_{\text{acc,II}} \sim \tau_s / \beta_A^2$$

- First order (shock) Fermi acceleration

$$\Delta t_{\text{coll}} \sim \kappa / V_{\text{choc}} c \quad \text{and} \quad \langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}} \sim \beta_{\text{choc}} \quad \text{with} \quad \beta_{\text{choc}} = V_{\text{choc}} / c$$

so

$$\tau_{\text{acc,I}} \sim \tau_s / \beta_{\text{choc}}^2$$