Cosmologie Moderne
Cours 7

J.-Ch. Hamilton, APC
hamilton@apc.univ-paris7.fr

Géométrie et contenu

- Densité critique: $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2 H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}\right), \\ &= H_0^2\left(\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda\right) \end{aligned}$$

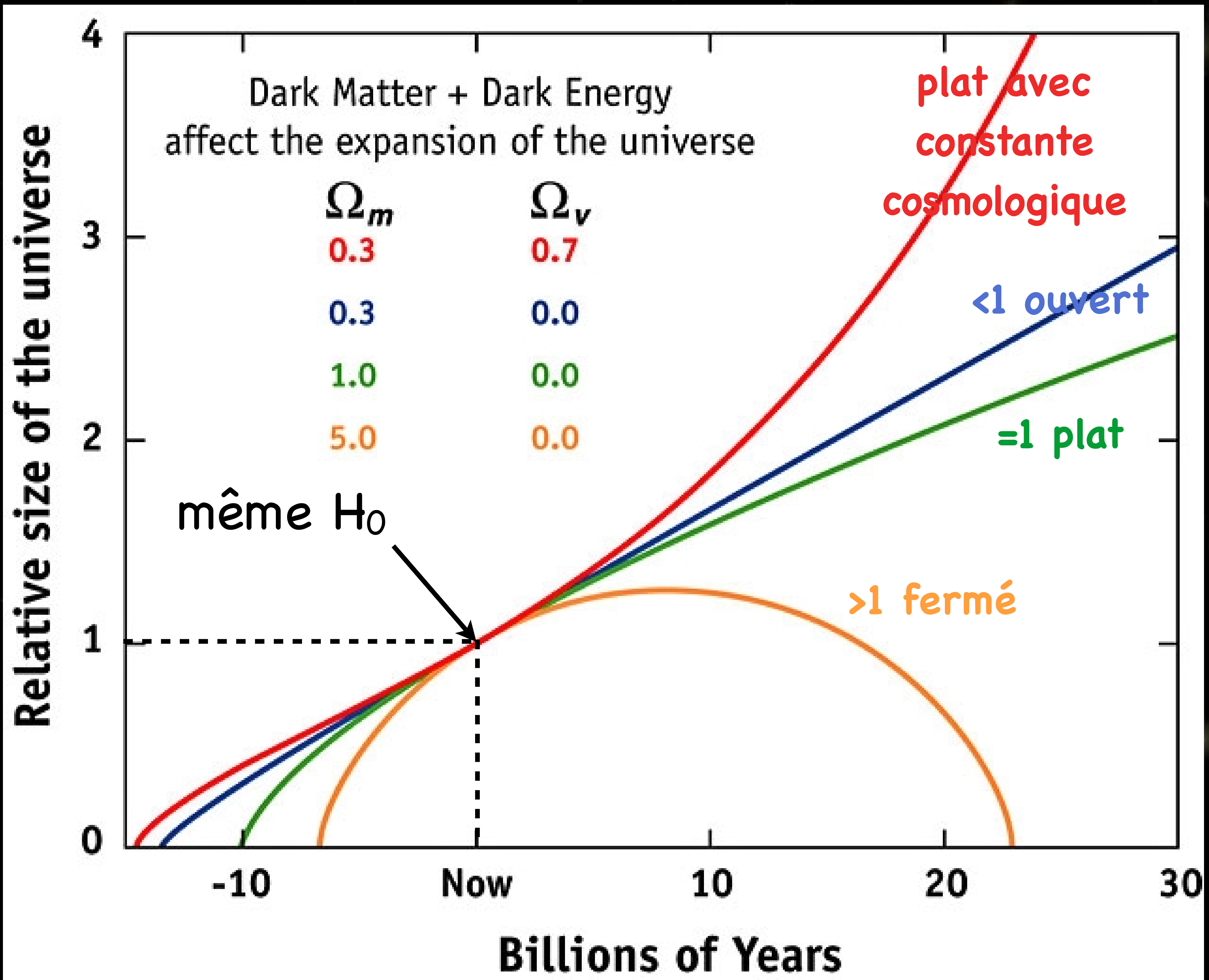
- Densités des espèces dans l'Univers

$$\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \Omega_k = \frac{-k}{a^2 H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

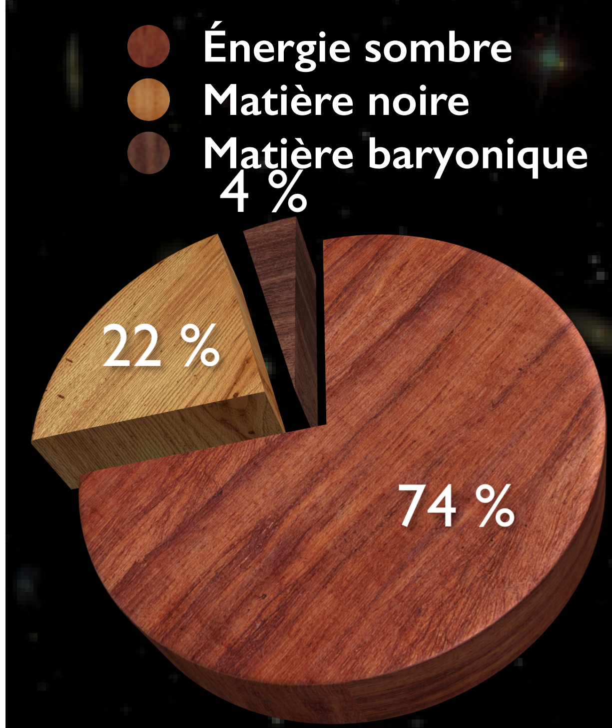
→ On a toujours: $\Omega_k = 1 - (\Omega_m + \Omega_\Lambda)$

En particulier, pour un Univers plat: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$

Facteur d'échelle en FLRW



Mesures actuelles



Friedman et Newton ?

- Dérivation Newtonienne des équation de Friedman
  - ★ Pas rigoureux !
    - Le problème que l'on se pose est un peu « artificiel » mais sûrement pas si faux car la gravitation Newtonienne est correcte en champ faible, ce qui est le cas de la cosmologie
  - ★ Permet une compréhension intuitive des équation de Friedman
  - ★ Sphère en expansion de rayon R et densité ρ
    - soumise à son propre poids

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad -G\frac{M(R)}{R^2} = \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho R$$

- Multiplions par $2\dot{R}$

$$2\dot{R}\ddot{R} = -\frac{8\pi}{3}G\rho R\dot{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{R}^2\right) = \frac{8\pi}{3}G \times \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho R^2\right)\right]$$

$$\int \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2 + A$$

- Conservation de la masse

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

$$\Rightarrow \quad R^3\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + 3\rho R^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\rho}R^2 + 3\rho R\dot{R}\rho = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\rho}R^2 + 2\rho R\dot{R}\rho = -\rho R\dot{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho R^2\right) = -\rho R\dot{R}$$

Friedman et Newton

★ Donc: $\int \mathrm{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho R^2 + A$

★ Soit : $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} = H$ et on divise par R^2

★ $$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{B}{a^2}$$ avec $$B = A\left(\frac{a}{R}\right)^2 = \mathrm{Cst}$$

★ Valeur de la Cste: $t = t_0 \Rightarrow a = 1$ et $H = H_0$

- donc $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + B$ c'est à dire $B = H_0^2\,(1 - \Omega_0)$ si $\rho_0 = \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{a^2}}$$

-k

Éq. de Friedman pour Λ=0

Evolution simple

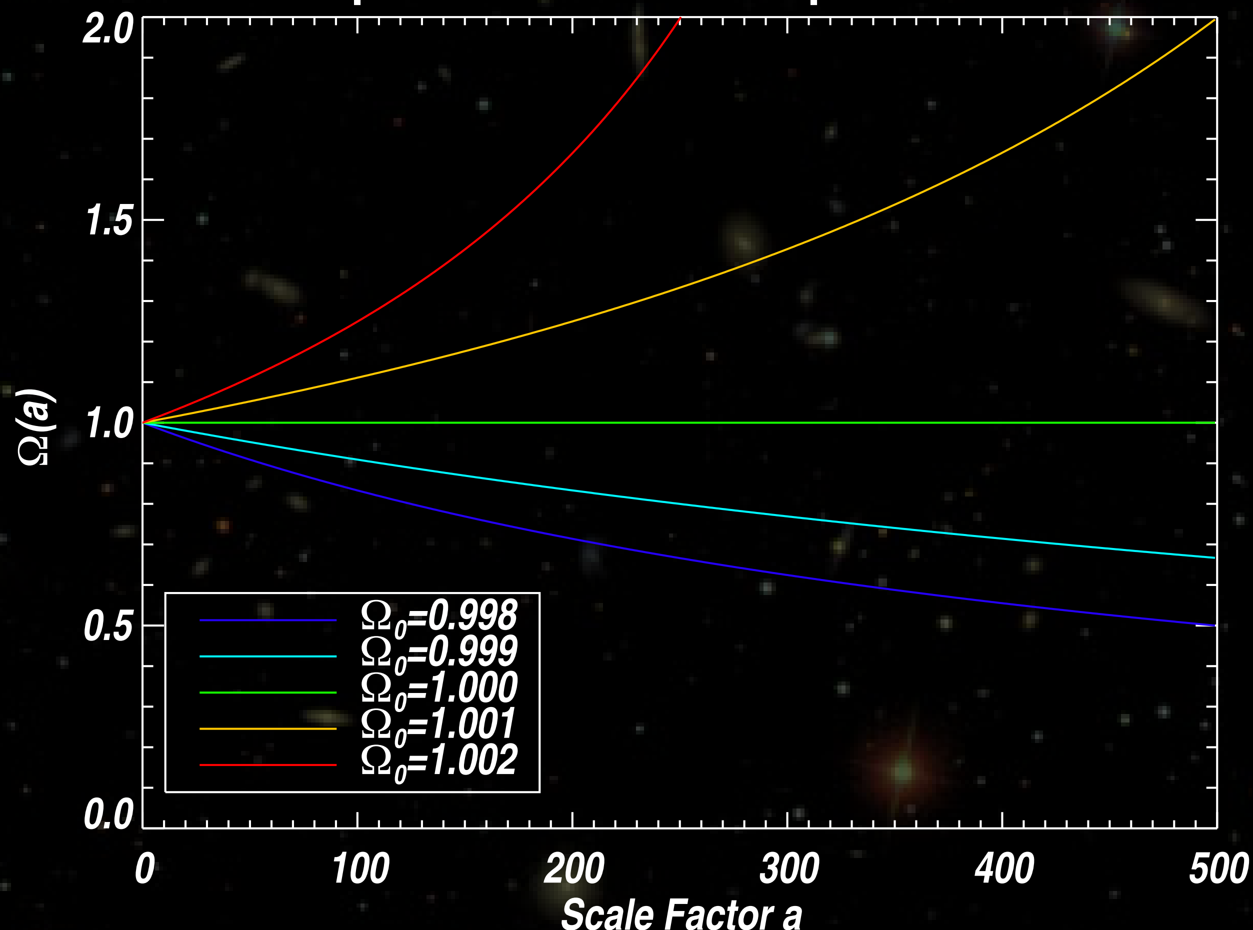
- Supposons un cas de matière non relativiste
  - ★ $\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \Rightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \times \frac{1}{a^3} = \frac{\Omega_0 H_0^2}{a^3}$
  - ★ Donc on réécrit l'éq. de Friedman:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(1-\Omega_0)}{a^2}$$

  - ★ soit: $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$
  - ★ alors : $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = \frac{\Omega_0}{a^3}\left(\frac{H_0}{H}\right)^2$
  - ★ et: $\boxed{\Omega(t) = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 + (1-\Omega_0)a}}$

$\Rightarrow \Omega=1$ est instable

Le problème de la platitude



or on mesure Ω_{tot}=1 avec 1% de précision !

$\Rightarrow$ à t=10^{-43} sec : $|\Omega_{tot}-1|<10^{-60}$

Evolution de H

- on vu que: $$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(1-\Omega_0)}{a^2}$$