

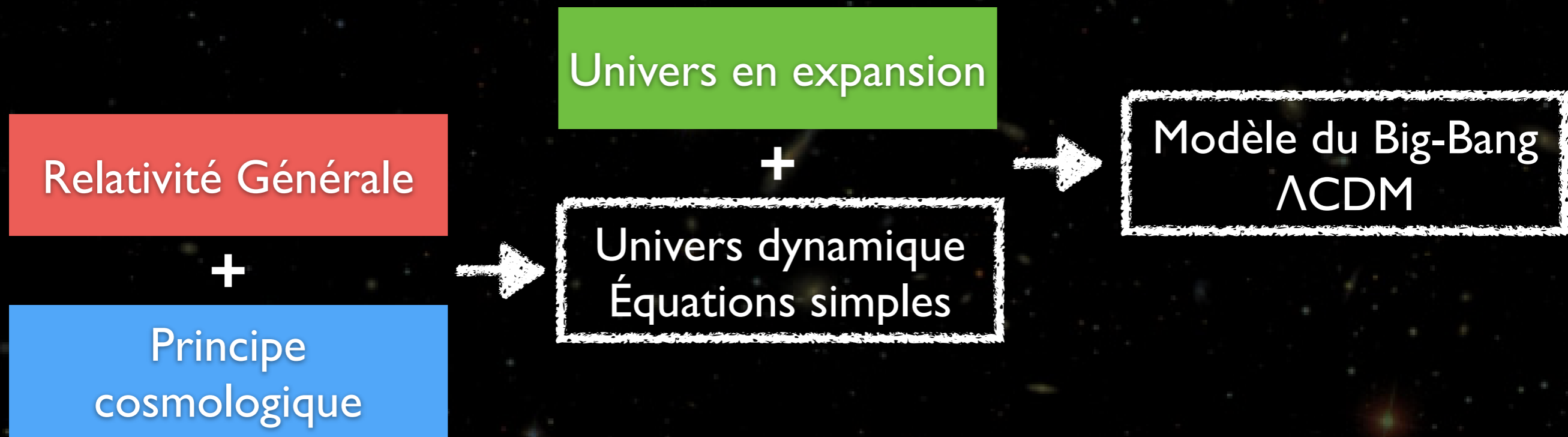
Cosmologie Moderne

Cours 5



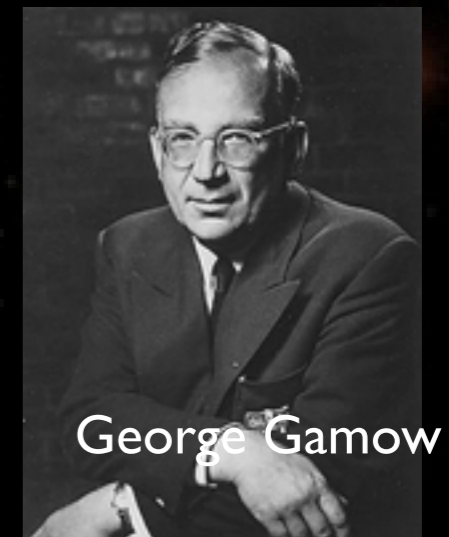
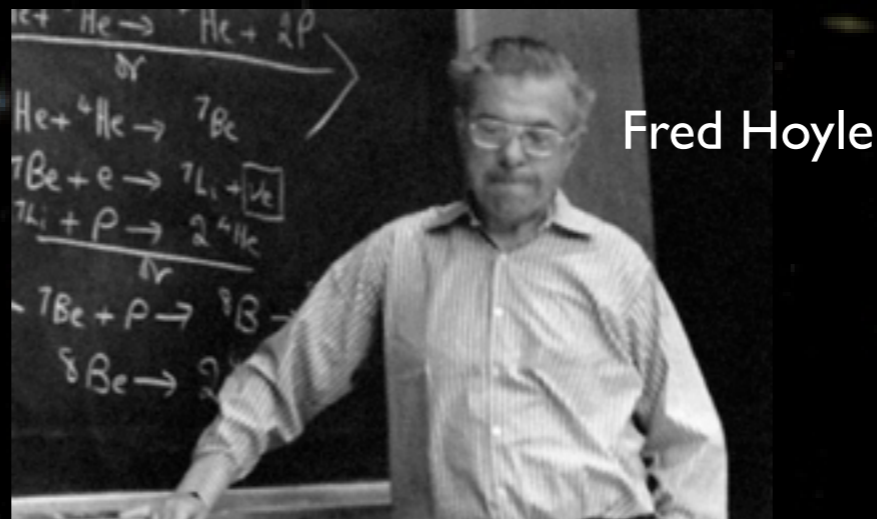
J.-Ch. Hamilton, APC
hamilton@apc.univ-paris7.fr

Les piliers de la cosmologie



Big Bang ?

- **Georges Lemaître (1927)**
 - ★ Relativité Générale \Rightarrow Univers dynamique : expansion ou contraction
 - ★ À partir d'observations, il opte pour l'expansion
 - ★ Modèle de «l'atome primitif» :
 - Plus on remonte par le passé tout était plus dense (et donc plus chaud). L'univers est alors né d'un atome primitif qui s'est «désintégré» au cours de l'expansion
 - ★ Cette idée choque nombre de physiciens dont Fred Hoyle qui la qualifie de «Big Bang» de manière moqueuse.
 - ★ Elle ne séduit pas Einstein qui préfère un Univers statique
 - ★ Hubble règle la question en 1929: expansion
 - ★ Gamow l'étudie en détails en 1948



Vue d'ensemble de la cosmologie

- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
 - ★ Relativité Générale
 - ★ Expansion de l'Univers
 - ★ Principe cosmologique
 - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
 - ★ Métrique de F.L.
 - ★ Redshift
 - ★ Équations de Friedman
 - ★ Histoire de l'expansion
 - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



Principe de la cosmologie (observationnelle)



Principe de la cosmologie (observationnelle)

- *a priori* théoriques:

- ★ La relativité Générale décrit la dynamique de l'espace-temps

- Dynamique à grande échelle de l'Univers

- ★ Le modèle standard de physique des particules (Théorie Quantique des Champs) décrit la microphysique

- Univers primordial

- Donne sa forme mathématique au modèle et fait apparaître ~12 paramètres libres

- (Ne peut pas marcher quand les deux théories ne fonctionnent pas ensemble - Univers très primordial - car nous n'avons pas de théorie quantique de la gravitation)



Principe de la cosmologie (observationnelle)

- *a priori* théoriques:

- ★ La relativité Générale décrit la dynamique de l'espace-temps

- Dynamique à grande échelle de l'Univers

- ★ Le modèle standard de physique des particules (Théorie Quantique des Champs) décrit la microphysique

- Univers primordial

- Donne sa forme mathématique au modèle et fait apparaître ~12 paramètres libres

- (Ne peut pas marcher quand les deux théories ne fonctionnent pas ensemble - Univers très primordial - car nous n'avons pas de théorie quantique de la gravitation)

- Observations:

- ★ Un grand nombre d'observations astrophysiques diverses

- ★ relativement indépendantes les unes des autres

- ★ demandent des analyses de données massives, des interprétations complexes pour extraire les informations/quantités importantes

- Donne leurs valeurs aux paramètres libres (certains ~ au %)



a priori théoriques

- Relativité Générale

- ★ Théorie de la dynamique de l'espace-temps (metric g_{mn}): Eqs d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Principe cosmologique

- ★ Principe Copernicien étendu

- «Il n'existe pas de point privilégié dans l'Univers»
- Isotropie pour tous implique homogénéité

➔ L'Univers est homogène et isotrope

➔ (Il existe des tranches d'espaces temps spatialement homogènes à temps constant)

➔ Impose de sévères contraintes aux équations d'Einstein



a priori théoriques

- Relativité Générale

- ★ Théorie de la dynamique de l'espace-temps (metric g_{mn}): Eqs d'Einstein

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{Espace-temps}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}_{\text{Contenu énergétique}}$$

- Principe cosmologique

- ★ Principe Copernicien étendu

- «Il n'existe pas de point privilégié dans l'Univers»
- Isotropie pour tous implique homogénéité

- ➔ L'Univers est homogène et isotrope

- ➔ (Il existe des tranches d'espaces temps spatialement homogènes à temps constant)

➔ Impose de sévères contraintes aux équations d'Einstein



a priori théoriques

➔ Le principe cosmologique impose la forme générale de $g_{\mu\nu}$

★ Métrique de Friedman-Lemaître(-Robertson-Walker)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad k = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{Plat} \\ 1 & \rightarrow \text{Fermé} \\ -1 & \rightarrow \text{Ouvert} \end{cases}$$

★ Équations dynamiques pour le paramètre d'échelle $a(t)$: Eqs. de Friedman

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{Taux d'expansion: } \frac{\dot{a}}{a} = H(z)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{Redshift: } 1 + z = \frac{a_0}{a}$$

➔ L'Univers s'étend ou se contracte selon son contenu

➔ En 1927 Hubble observe l'expansion avec les redshifts des galaxies

➔ Mesurer le taux d'expansion à différents redshifts permet de mesurer le contenu matériel



Fondements de Λ CDM

Hypothèse

Relativité Générale
+
Principe Cosmologique

Calculs

Modèle cosmologique
FLRW
+
~ 12 paramètres libres

Λ CDM

Nombreuses observations
astrophysiques indépendantes
+
interprétations
+
ajustements

- Il reste de peu de place en dehors de ce schéma
 - ★ Récuser le principe cosmologique (contraintes observationnelles)
 - ★ Extensions/modifications à la R.G. (contraintes observationnelles)
 - ★ Modèles du contenu énergétique de l'Univers (contraintes observationnelles + physique des particules)



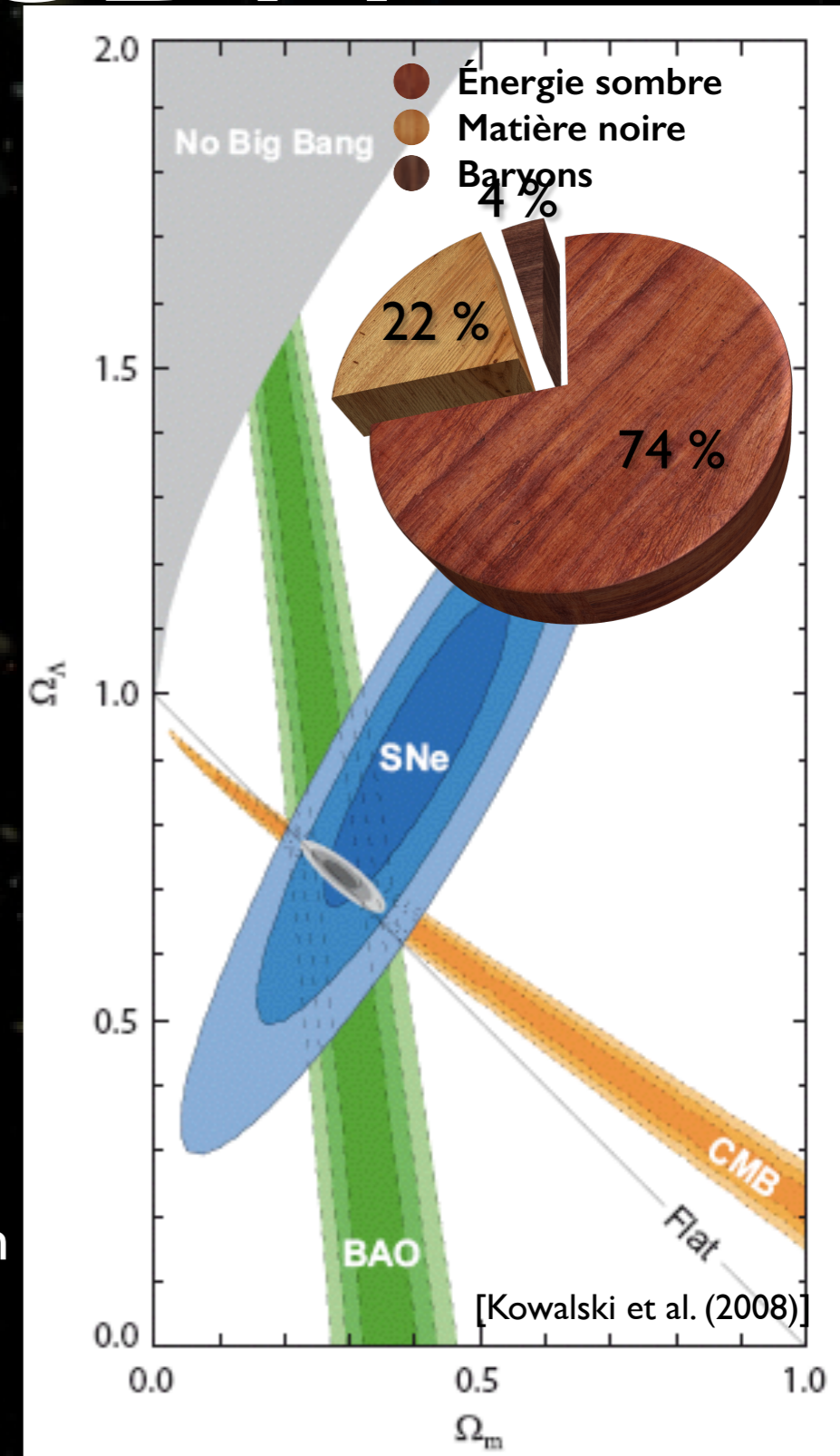
Le modèle Λ CDM

- ★ Univers FLRW en expansion (Big-Bang)
 - Relativité Générale + Principe Cosmologique
 - Constante de Hubble $\sim 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$
 - Corps noir du CMB, Nucléosynthèse primordiale
- ★ L'Univers est \sim plat : $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$
 - Anisotropies du CMB + Constante de Hubble
- ★ $\sim 22\%$ de matière noire (inconnue)
 - Courbes de rotation des galaxies, Amas de Galaxies, lentillage faible, Formation des structures, CMB
- ★ $\sim 74\%$ d'Énergie sombre (inconnue)
 - SNIa plus faibles que prévu \Rightarrow +lointaines \Rightarrow accélération
 - CMB+H, Mesures directes de W_m , effet ISW, CMB seul



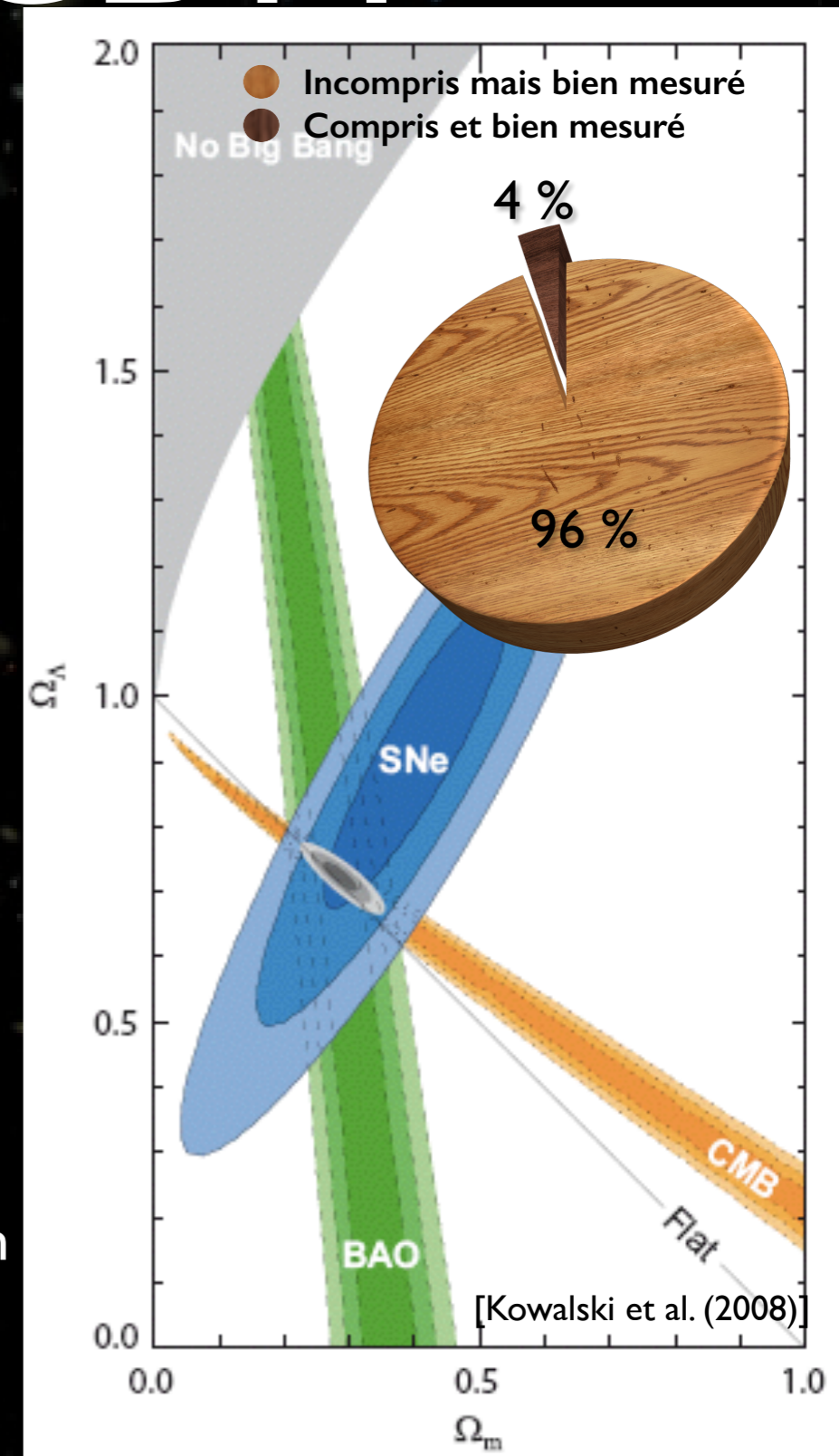
Le modèle Λ CDM

- ★ Univers FLRW en expansion (Big-Bang)
 - Relativité Générale + Principe Cosmologique
 - Constante de Hubble $\sim 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$
 - Corps noir du CMB, Nucléosynthèse primordiale
- ★ L'Univers est \sim plat : $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$
 - Anisotropies du CMB + Constante de Hubble
- ★ $\sim 22\%$ de matière noire (inconnue)
 - Courbes de rotation des galaxies, Amas de Galaxies, lentillage faible, Formation des structures, CMB
- ★ $\sim 74\%$ d'Énergie sombre (inconnue)
 - SNIa plus faibles que prévu \Rightarrow +lointaines \Rightarrow accélération
 - CMB+H, Mesures directes de W_m , effet ISW, CMB seul



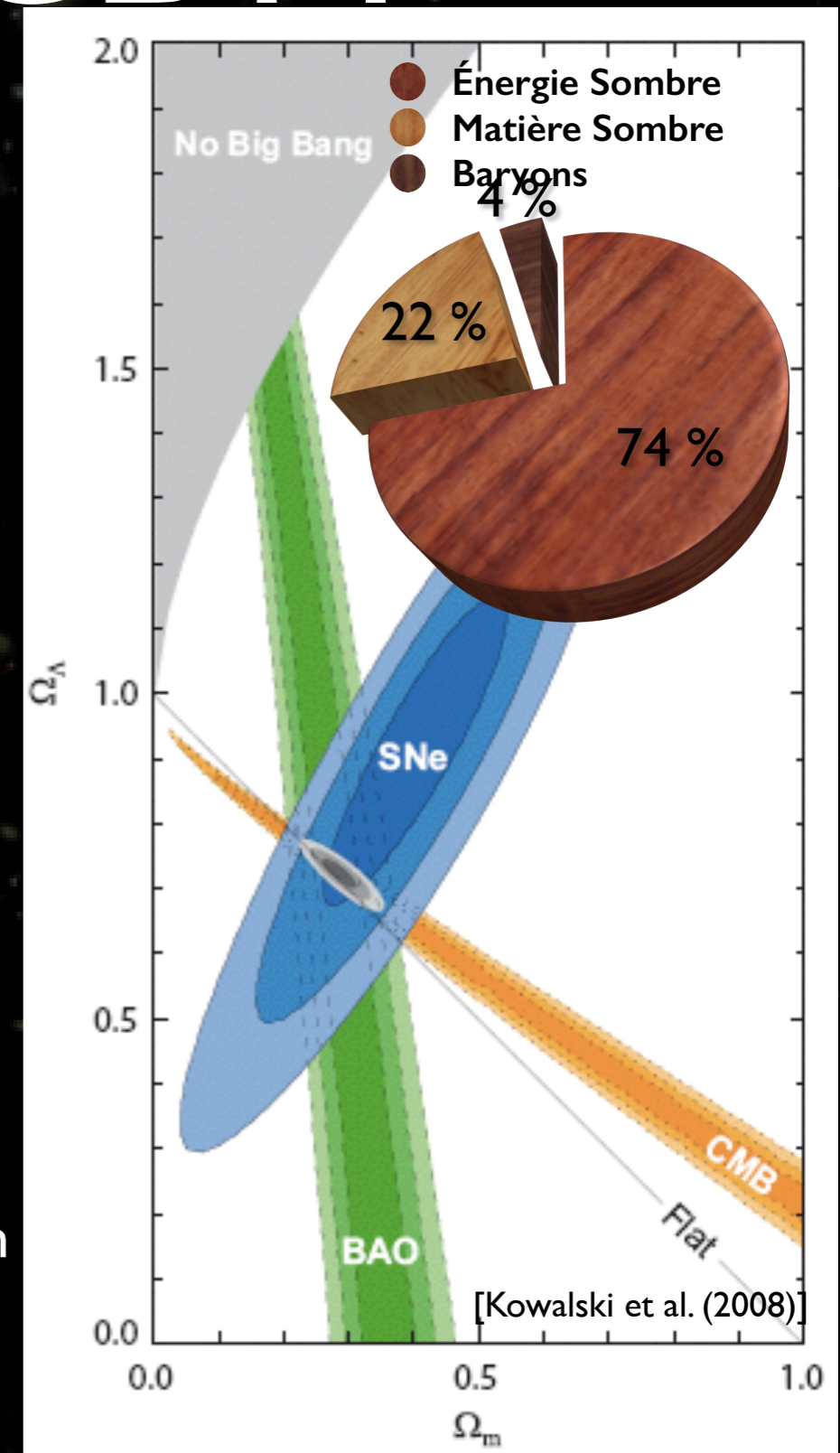
Le modèle Λ CDM

- ★ Univers FLRW en expansion (Big-Bang)
 - Relativité Générale + Principe Cosmologique
 - Constante de Hubble $\sim 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$
 - Corps noir du CMB, Nucléosynthèse primordiale
- ★ L'Univers est \sim plat : $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$
 - Anisotropies du CMB + Constante de Hubble
- ★ $\sim 22\%$ de matière noire (inconnue)
 - Courbes de rotation des galaxies, Amas de Galaxies, lentillage faible, Formation des structures, CMB
- ★ $\sim 74\%$ d'Énergie sombre (inconnue)
 - SNIa plus faibles que prévu \Rightarrow +lointaines \Rightarrow accélération
 - CMB+H, Mesures directes de W_m , effet ISW, CMB seul



Le modèle Λ CDM

- ★ Univers FLRW en expansion (Big-Bang)
 - Relativité Générale + Principe Cosmologique
 - Constante de Hubble $\sim 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$
 - Corps noir du CMB, Nucléosynthèse primordiale
- ★ L'Univers est \sim plat : $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$
 - Anisotropies du CMB + Constante de Hubble
- ★ $\sim 22\%$ de matière noire (inconnue)
 - Courbes de rotation des galaxies, Amas de Galaxies, lentillage faible, Formation des structures, CMB
- ★ $\sim 74\%$ d'Énergie sombre (inconnue)
 - SNIa plus faibles que prévu \Rightarrow +lointaines \Rightarrow accélération
 - CMB+H, Mesures directes de W_m , effet ISW, CMB seul



Vue d'ensemble de la cosmologie

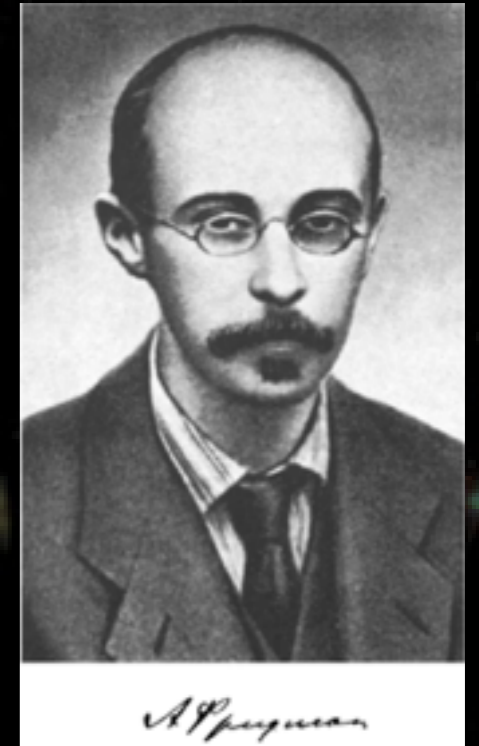
- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
 - ★ Relativité Générale
 - ★ Expansion de l'Univers
 - ★ Principe cosmologique
 - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
 - ★ Métrique de F.L.
 - ★ Redshift
 - ★ Équations de Friedman
 - ★ Histoire de l'expansion
 - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



Friedman et Lemaître

● Alexandre Friedman

- ★ Russe - 1888-1925
- ★ petit génie : 1er article de maths à 17 ans...
- ★ Professeur à St Petersburg/Petrograd/Leningrad
- ★ Découvre le R.G. en 1922
 - décide de trouver des solutions exactes
 - Comprend que l'on peut décrire l'Univers entier
 - Découvre les trois évolutions possibles selon la valeur de k
 - Controverse avec Einstein partisan d'un Univers statique
- ★ Meurt prématurément de la typhoïde après un vol en ballon (7400 m)



● Georges Lemaître

- ★ Belge - 1894-1966
- ★ Études chez les jésuites, prêtre et mathématicien
- ★ Découvre la R.G. avec Eddington vers 1922
 - Découvre les solutions non statiques pour l'Univers indépendamment
 - prédit l'expansion et avec les données de Slipher et Hubble la confirme en 1927 (deux ans avant Hubble) - publication ignorée car en français
 - Tente en vain de convaincre Einstein
 - Élabore l'idée de l'atome primitif
 - après la guerre, devient un des pionniers des «machines à calculer»
 - devient président de l'académie pontificale des sciences



Histoire de la métrique FLRW

- ★ le premier à la découvrir est Friedman entre 1922 et 1924
 - Publie ses résultats, via Einstein qui décrit ces résultats (Univers dynamique) comme mathématiquement corrects mais physiquement épouvantables
- ★ Lemaître retrouve indépendamment les mêmes résultats et prouve l'expansion via les observations de Slipher et Hubble
 - publié en français en 1927 l'article passe inaperçu
 - Eddington lui fait traduire et il republie en 1931 en anglais
 - moins précis et deux ans après l'article de Hubble...
- ★ Lemaître en déduit l'idée du Big-Bang (atome primitif)
- ★ Robertson et Walker étudient rigoureusement ces solutions dans les années 30, leur donnent leur forme finale et en prouvent l'unicité pour un Univers homogène et isotrope.
 - ils montrent en particulier que leur forme ne dépend en fait pas de la R.G. mais est un résultat purement géométrique



Métrieque de Friedman-Lemaître (R.W.)

- Principe cosmologique:

- ★ En moyenne la métrieque de l'Univers est indépendante de la position spatiale

- ➔ Il existe UNE métrieque pour tout l'Univers à un instant fixé !

$$ds^2 = c^2 dt(t)^2 - dX(t)^2$$

- Expansion de l'Univers:

- ➔ La partie spatiale de la métrieque doit exhiber l'expansion et donc dépendre du temps (on introduit ici des coordonnées «comobiles»)

$$dX(t)^2 = a(t)^2 \times dX^2$$

- ➔ La partie temporelle ne dépend pas du temps

$$dt(t)^2 = dt^2$$

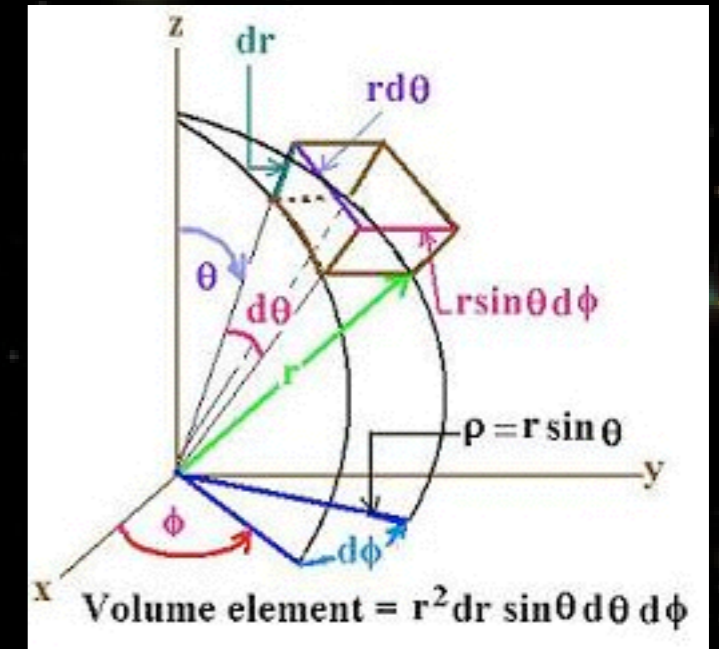
➔ Donc on doit avoir : $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \times dX^2$



Métrie de Friedman-Lemaître (R.W.)

- La partie spatiale doit être isotrope
 - ★ Sa partie radiale ne dépend pas des angles
 - ★ Sa partie angulaire doit être tirée de l'élément de volume en coordonnées sphériques

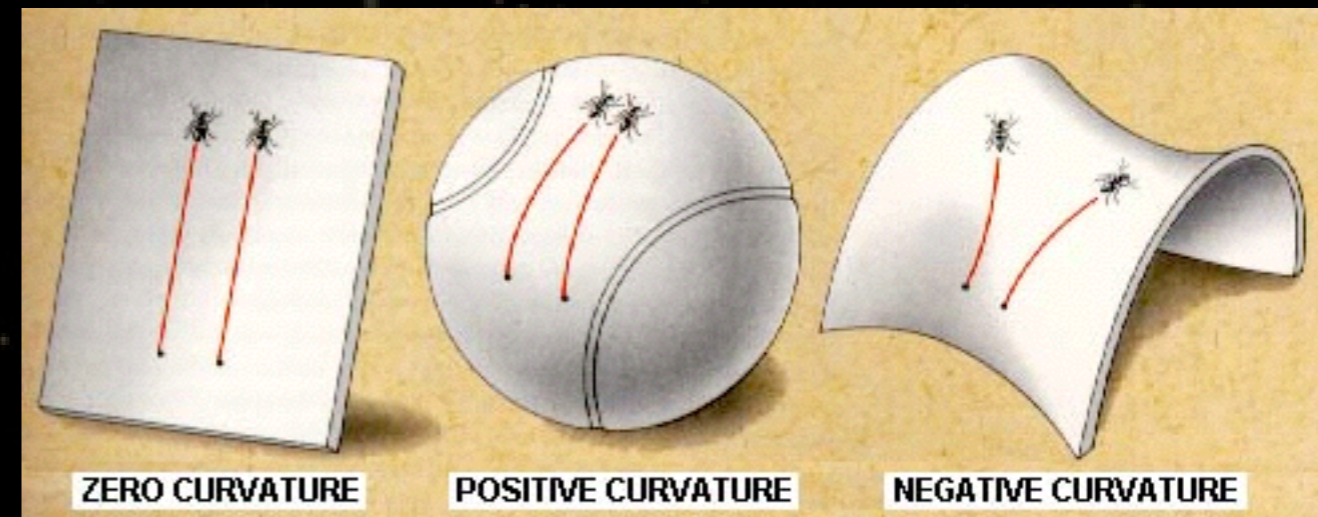
$$dX^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



- La partie radiale doit correspondre aux trois courbures possibles

$$dR^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

$$k = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{Plat} \\ 1 & \rightarrow \text{Fermé} \\ -1 & \rightarrow \text{Ouvert} \end{cases}$$



Métrieque de Friedman-Lemaître (R.W.)

- **Finalement:**

- ★ Métrieque de Friedman-Lemaître (Robertson-Walker):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad k = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{Plat} \\ 1 & \rightarrow \text{Fermé} \\ -1 & \rightarrow \text{Ouvert} \end{cases}$$

- ★ C'est la forme générale de la métrieque de l'Univers.

- ★ Elle n'a que deux inconnues (au premier coup d'oeil...) :

- la forme de la courbure: négative, nulle ou positive
- la fonction $a(t)$: paramètre d'échelle de l'Univers

- ★ En réécrivant l'équation d'Einstein pour cette métrieque on va obtenir des relations décrivant la dynamique de ces quantités

- la dérivation est «simple» mais un peu inutile ici...

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- ★ Deux autres inconnues des équations d'Einstein s'ajoutent:

- le terme constant Λ
- la densité moyenne de l'Univers ρ dans le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$



Vue d'ensemble de la cosmologie

- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
 - ★ Relativité Générale
 - ★ Expansion de l'Univers
 - ★ Principe cosmologique
 - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
 - ★ Métrique de F.L.
 - ★ Redshift
 - ★ Équations de Friedman
 - ★ Histoire de l'expansion
 - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



Équations de Friedman

- La partie temporelle des Éq. d'Einstein d'une part et leur trace d'autre part donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right.$$

- ★ La première équation est souvent appelée «L'équation de Friedman»
 - elle permet de calculer l'évolution de $a(t)$ compte tenu du contenu matériel de l'Univers
- ★ La seconde équation (d'accélération) n'est pas indépendante de la première
 - Elle montre bien que l'accélération est ralentie par ce qui pèse ou rayonne et est accélérée par Λ

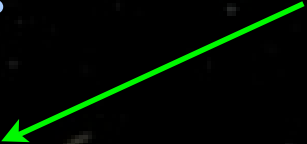


Équations de Friedman

- La partie temporelle des Éq. d'Einstein d'une part et leur trace d'autre part donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right.$$

Courbure



- ★ La première équation est souvent appelée «L'équation de Friedman»
 - elle permet de calculer l'évolution de $a(t)$ compte tenu du contenu matériel de l'Univers
- ★ La seconde équation (d'accélération) n'est pas indépendante de la première
 - Elle montre bien que l'accélération est ralentie par ce qui pèse ou rayonne et est accélérée par Λ



Équations de Friedman

- La partie temporelle des Éq. d'Einstein d'une part et leur trace d'autre part donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ \frac{\ddot{a}}{a} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{array}$$

Courbure

Énergie sombre

- ★ La première équation est souvent appelée «L'équation de Friedman»
 - elle permet de calculer l'évolution de $a(t)$ compte tenu du contenu matériel de l'Univers
- ★ La seconde équation (d'accélération) n'est pas indépendante de la première
 - Elle montre bien que l'accélération est ralentie par ce qui pèse ou rayonne et est accélérée par Λ



Équations de Friedman

- La partie temporelle des Éq. d'Einstein d'une part et leur trace d'autre part donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ \frac{\ddot{a}}{a} \end{array} \right. = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

Pression et densité
Équation d'état

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad p = w\rho$$

(conservation du tenseur Énergie-Impulsion)

Courbure (pointing to k/a^2)
 Énergie sombre (pointing to Λ)

- ★ La première équation est souvent appelée «L'équation de Friedman»
 - elle permet de calculer l'évolution de $a(t)$ compte tenu du contenu matériel de l'Univers
- ★ La seconde équation (d'accélération) n'est pas indépendante de la première
 - Elle montre bien que l'accélération est ralentie par ce qui pèse ou rayonne et est accélérée par Λ



Paramètre de Hubble

- Rappel : loi de Hubble

$$v = H \times d$$

- Coordonnées comobiles des galaxies:

$$\vec{x}_{\text{mes}}(t) = a(t) \times \vec{x}_{\text{comobile}}$$

$$\vec{v}_{\text{mes}}(t) = \dot{a}(t) \times \vec{x}_{\text{comobile}}$$

$$\vec{v}_{\text{mes}}(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \times \vec{x}_{\text{mes}}(t)$$

- On voit donc apparaître le paramètre de Hubble dans l'équation de Friedman

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$



redshift

- Le temps n'est pas une observable cosmologique
- On mesure des décalages vers le rouge (redshift)
- Les longueurs d'onde des photons «suivent» le paramètre d'échelle

$$1 + z = \frac{a_0}{a}$$

- Le redshift est directement l'effet de l'expansion
 - ★ résultante de tous les effets doppler infinitésimaux entre tous les référentiels de Minkowski entre moi et un objet cosmologique
 - Ce n'est pas vraiment une «vitesse de récession des galaxies»
 - Ce n'est pas vraiment la «boîte» qui gonfle ni l'espace qui se crée...
 - C'est la résultante à grande échelle de l'expansion : pas de redshift localement car pas d'expansion



z



redshift

- Le temps n'est pas une observable cosmologique
- On mesure des décalages vers le rouge (redshift)
- Les longueurs d'onde des photons «suivent» le paramètre d'échelle

$$1 + z = \frac{a_0}{a}$$

- Le redshift est directement l'effet de l'expansion
 - ★ résultante de tous les effets doppler infinitésimaux entre tous les référentiels de Minkowski entre moi et un objet cosmologique
 - Ce n'est pas vraiment une «vitesse de récession des galaxies»
 - Ce n'est pas vraiment la «boîte» qui gonfle ni l'espace qui se crée...
 - C'est la résultante à grande échelle de l'expansion : pas de redshift localement car pas d'expansion

