

OBSERVATOIRE DE PARIS  
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)  
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS VII)  
UNIVERSITÉ PARIS SUD (PARIS XI)

*M2R Astronomie & Astrophysique*  
*Particules de Haute Énergie dans l'Univers (FC9)*

---

FABIEN CASSE

Laboratoire Astroparticule & Cosmologie (APC)  
UMR 7164 CNRS - Université Paris Diderot

Année universitaire 2012-2013



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de relativité restreinte</b>	<b>7</b>
1.1	Postulats de base et transformation de Lorentz . . . . .	7
1.2	Loi de composition relativiste des vitesses et des accélérations . . . . .	10
1.3	Quadrivecteurs et transformation de Lorentz . . . . .	12
1.4	Exercices . . . . .	14
1.4.1	Puissance d'une force et énergie de masse . . . . .	14
1.4.2	Mouvement d'une particule relativiste dans un champ magnétique . . . . .	14
1.4.3	Effet Doppler et focalisation relativiste . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Émission radiative de particules chargées</b>	<b>17</b>
2.1	Le système d'unités CGS Gaussien . . . . .	17
2.2	Accélération de particules chargées et rayonnement . . . . .	18
2.2.1	Puissance de rayonnement d'une particule chargée . . . . .	19
2.2.2	Formule de Larmor : approche géométrique (à faire par vous-même!) . . . . .	20
2.3	Rayonnement cyclo-synchrotron . . . . .	22
2.3.1	Puissance d'émission . . . . .	22
2.3.2	Spectre d'émission en fréquence . . . . .	23
2.3.3	Spectre d'émission synchrotron d'une population de particules . . . . .	28
2.4	Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung (hors programme) . . . . .	29
2.4.1	Spectre d'émission du Bremsstrahlung thermique . . . . .	29
2.4.2	Puissance d'émission du Bremsstrahlung . . . . .	33
2.5	Exercices . . . . .	35
2.5.1	Dynamique d'une particule relativiste dans un champ magnétique uniforme . . . . .	35
2.5.2	Propagation dans un champ électromagnétique . . . . .	35
2.5.3	Rayonnement de courbure . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Interaction Photon-Electron</b>	<b>37</b>
3.1	Production de paires électrons-positrons . . . . .	37
3.2	Emission Compton Inverse . . . . .	39
3.2.1	Diffusion Compton . . . . .	40
3.2.2	Emission Compton Inverse . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Accélération des rayons cosmiques</b>	<b>45</b>
4.1	Données observationnelles des rayons cosmiques . . . . .	45
4.1.1	Spectre en masse des rayons cosmiques . . . . .	46
4.1.2	Spectre en énergie des rayons cosmiques . . . . .	46
4.1.3	Spectre angulaire des rayons cosmiques . . . . .	48
4.2	Principe de base de l'accélération de Fermi . . . . .	49
4.2.1	Gain en énergie . . . . .	49
4.2.2	Structure des chocs astrophysiques non-relativistes . . . . .	51
4.2.3	Gain moyen d'énergie par cycle . . . . .	51
4.2.4	Probabilité d'échappement d'une particule . . . . .	52
4.2.5	Spectre en énergie de l'accélération de Fermi . . . . .	53
4.3	A la recherche des sources de rayons cosmiques . . . . .	54



# Avant-Propos

Ce cours traite de quelques aspects des phénomènes physiques rencontrés en astrophysique des hautes énergies. Dans un premier temps, des rappels élémentaires de relativité restreinte seront présentés afin de disposer des outils nécessaires à la compréhension de la physique des particules de haute énergie. La suite de ce cours s'intéressera aux électrons de haute énergie présents au sein des plasmas astrophysiques ainsi que leurs interactions avec les multiples autres composantes de ces milieux (ions, électrons thermiques, champ de rayonnement, etc...). Nous étudierons alors la physique de ces interactions menant à des émissions photoniques particulières. Dans la dernière partie du cours nous aborderons la physique de l'accélération des particules dans les plasmas astrophysiques et à la problématique des rayons cosmiques.

Ce cours ne nécessite pas de prérequis en dehors de solides connaissances de physique d'un niveau M1 physique fondamentale. Cet enseignement est assez théorique et demande une bonne maîtrise des concepts fondamentaux de la physique et des outils mathématiques associés. Pour aider à l'apprentissage de ces notions nouvelles, des exercices seront donnés en complément du cours et certains de ces exercices seront corrigés pendant les séances d'enseignement par les étudiants.



# Rappels de relativité restreinte

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Postulats de base et transformation de Lorentz</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Loi de composition relativiste des vitesses et des accélérations</b>	<b>10</b>
<b>1.3</b>	<b>Quadrivecteurs et transformation de Lorentz</b>	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Exercices</b>	<b>14</b>
1.4.1	Puissance d'une force et énergie de masse	14
1.4.2	Mouvement d'une particule relativiste dans un champ magnétique	14
1.4.3	Effet Doppler et focalisation relativiste	14

CE premier chapitre a pour but de rappeler les notions fondamentales de la théorie de la relativité restreinte. Cette théorie, version simplifiée de la relativité générale, n'est applicable que dans un contexte où les corps ne sont soumis à aucune force extérieure (et donc ayant une vitesse constante). Nous verrons que cette définition stricte du domaine de validité de la relativité restreinte peut être étendue à quelques mouvements accélérés simples tels que les accélérations rectiligne ou circulaire, ce qui nous permettra de décrire le mouvement de particules de haute énergie.

## 1.1 Postulats de base et transformation de Lorentz

Historiquement, la transformation des vitesses de Galilée a été une des notions fondamentales de la mécanique jusqu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Sur les bases de cette mécanique et des concepts alors en vigueur, il était postulé qu'un fluide nommé Ether devait exister afin que les ondes lumineuses puissent se propager dans l'espace. Ce fluide devait avoir des caractéristiques bien particulières pour satisfaire toutes les contraintes connues à l'époque. Ainsi la propagation de la lumière ne pouvait être vérifiée que si la rigidité de ce fluide était extrêmement grande (la rigidité d'un milieu étant directement liée à la vitesse de propagation d'une onde). Dans le même temps, ce fluide devait n'offrir aucune résistance au passage des corps solides afin de permettre aux astres de graviter autour du Soleil. Ce fluide était considéré comme étant un référentiel absolu et indépendant du référentiel considéré.

A la suite d'une expérience menée par Michelson et Morley en 1887 ayant pour but de mesurer la vitesse de la lumière en deux périodes séparées de six mois. Le résultat obtenu a bouleversé les esprits en montrant de manière irréfutable que la vitesse de la lumière est identique aux deux moments, ce qui ne pouvait que signifier que l'Ether n'existait pas. L'invariance de la vitesse de la lumière quelque soit le référentiel considéré posait un problème majeur à la physique du XIX<sup>ème</sup>

## CHAPITRE 1. RAPPELS DE RELATIVITÉ RESTREINTE

siècle car elle invalidait les concepts de la mécanique newtonienne.

C'est Albert Einstein qui, dans l'un de ces trois articles de 1905, apporta une interprétation physique à ces résultats expérimentaux en utilisant des avancées théoriques de Henri Poincaré et H.A. Lorentz permettant une réécriture de la transformation de Galilée en incluant l'invariance de la vitesse de la lumière. Nous allons démontrer cette transformation en utilisant une démonstration simple prenant en compte les deux postulats de base de la relativité restreinte :

- Postulat 1 : *La vitesse de la lumière est constante et identique dans tous les référentiels d'inertie*
- Postulat 2 : *Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie. Il n'y a pas de référentiel d'inertie privilégié*

On rappelle au passage qu'un référentiel d'inertie (ou galiléen) est un référentiel où un corps au repos dans ce référentiel n'est soumis à aucune pseudo-force (s'il est au repos, il reste au repos). En s'appuyant sur le premier postulat, il nous est possible de déterminer les relations existantes entre les coordonnées de deux référentiels d'inertie. On appellera  $\mathcal{R}$  un premier référentiel d'inertie repéré par les coordonnées  $(x, y, z, t)$ . Un second référentiel d'inertie noté  $\mathcal{R}'$  se déplace à vitesse constante  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On supposera par simplicité que les axes de ces deux repères sont parallèles entre eux (les axes du repère  $\mathcal{R}'$  seront dénommés  $(x', y', z', t')$ ).

Pour connaître les relations entre les coordonnées de ces deux repères, nous allons réaliser l'expérience de pensée suivante : deux photons sont émis le long de l'axe  $(Ox)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  depuis les points  $(x_{p1}, 0, 0, 0)$  et  $(x_{p2}, 0, 0, 0)$  avec des vitesses opposées de telle façon que ces photons vont se croiser en un point de l'espace-temps que l'on notera  $(x, 0, 0, t_R)$ . En se plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on considèrera les mêmes photons émis depuis les points  $(x'_{p1}, 0, 0, 0)$  et  $(x'_{p2}, 0, 0, 0)$  et se croisant au point  $(x', 0, 0, t')$ . Nous allons rechercher les équations liant les coordonnées de ce même point de croisement dans les deux référentiels.

- Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les photons se croisent au moment où leurs abscisses selon  $(Ox)$  sont identiques, ce qui donne la relation  $x = x_{p1} + ct = x_{p2} - ct$  où nous avons posé arbitrairement que  $x_{p2} > x_{p1}$  ( $c$  est la vitesse de la lumière). Avec le même raisonnement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et en vertu du *premier postulat* de la relativité, nous obtenons sans difficulté que  $x' = x'_{p1} + ct' = x'_{p2} - ct'$ . Pour écrire la première série de relations entre les coordonnées du point de croisement dans les deux référentiels, nous allons former deux constantes  $A$  et  $B$  définies comme

$$\begin{aligned} A &= \frac{x'_{p1}}{x_{p1}} = \frac{x' - ct'}{x - ct} \\ B &= \frac{x'_{p2}}{x_{p2}} = \frac{x' + ct'}{x + ct} \end{aligned} \quad (1.1)$$

ce qui permet de réécrire les équations précédentes comme

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A+B}{2}x - \frac{A-B}{2}ct \\ ct' &= \frac{A+B}{2}ct - \frac{A-B}{2}x \end{aligned} \quad (1.2)$$

En posant que  $\gamma = \frac{A+B}{2}$  et  $\delta = \frac{A-B}{2}$ , on obtient alors les deux relations reliant les coordonnées



spatio-temporelles

$$\begin{aligned}x' &= \gamma x - \delta ct \\ct' &= \gamma ct - \delta x \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1.3}$$

Deux constantes indéterminées restent néanmoins présentes au sein de ce jeu d'équations. Afin de déterminer leurs valeurs, nous pouvons remarquer que ces relations sont valables quelque soit le choix de l'origine de chacun des deux repères et en particulier si ce choix est tel que le point de croisement se situe à l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  ( $x'_{p1} = -x'_{p2}$ ) et si l'origine du repère  $\mathcal{R}$  est telle qu'en  $t = 0$ , l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  coïncide avec l'origine du repère  $\mathcal{R}$ . Dans cette configuration, on aura donc  $x' = 0$  et  $x = vt$ , ce qui permet à partir du système d'équations précédent d'en déduire que  $0 = \gamma vt - \delta ct \rightarrow \frac{\delta}{\gamma} = \frac{v}{c} = \beta$ . Le jeu d'équations se transforme alors en

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1.4}$$

Il reste encore une constante indéterminée dans notre système. Nous allons pouvoir lever cette incertitude en utilisant le *second postulat* de la relativité, c'est à dire que nous allons reprendre tout le raisonnement précédent en nous plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et en considérant le référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement dans  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse égale à  $-v\vec{e}_x$ . En reprenant toutes les étapes du raisonnement précédent, on arrive alors à un jeu d'équation tel que

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{1.5}$$

En utilisant les deux jeux d'équations qui par définition doivent être identiques on arrive à

$$x' = \gamma(\gamma(x' + vt') - \frac{v}{c}\gamma(ct' + \frac{v}{c}x')) = \gamma^2(1 - \beta^2)x'\tag{1.6}$$

On en déduit alors la valeur de la constante  $\gamma = \pm(1 - \beta^2)^{-1/2}$  qui a été baptisée facteur de Lorentz. On obtient par cette approche (une parmi d'autres ...) les relations de concordance entre les coordonnées spatio-temporelles des deux repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , le signe du facteur de Lorentz étant défini comme le signe de  $v$ . Les deux systèmes de passage entre repères se résument ainsi ( $v > 0$ ) :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}\tag{1.7}$$

On peut remarquer que dans le cas où la vitesse  $v$  est très faible devant la vitesse de la lumière, on retrouve l'expression du changement de coordonnées utilisée dans la mécanique classique (on peut

faire dans ce cas là les approximations  $\beta \rightarrow 0$  et  $\gamma \rightarrow 1$ ). La prise en compte des deux postulats de la relativité restreinte amène une nouvelle notion, celle de temps local où le temps perd son caractère universel. On peut noter aussi que si le temps est affecté par le déplacement relatif d'un référentiel, l'espace l'est tout autant en ce qui concerne la direction de propagation. Les directions transverses à ce déplacement restent néanmoins inaltérées par le déplacement.

Parmi les conséquences apportées par la transformation de Lorentz, on peut citer la contraction des longueurs d'un objet se déplaçant dans un référentiel par rapport au même objet immobile. De même il est aisé de voir que si un phénomène se produit avec un temps caractéristique  $\tau$  dans un référentiel d'inertie, alors ce temps caractéristique sera perçu par un observateur en mouvement comme un temps  $\gamma\tau$ , d'où une dilatation du temps. Nous reviendrons sur ces notions dans les exercices en fin de chapitre.

### 1.2 Loi de composition relativiste des vitesses et des accélérations

Une des conséquences directes de la transformation de Lorentz est bien évidemment d'invalider la transformation de Galilée donnant la vitesse d'un corps dans un référentiel par rapport à sa vitesse dans un autre référentiel. Ce changement est induit par la perte du caractère universel du temps car la vitesse instantanée est la dérivée par rapport au temps de la position d'un corps. Reprenons nos deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et notons l'expression de la vitesse d'un objet dans  $\mathcal{R}$  comme

$$V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.8)$$

où on mesure les intervalles de distance  $dx, dy$  et  $dz$  pendant un intervalle de temps  $dt$  infiniment court. On peut obtenir l'expression des intervalles correspondants mesurés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  grâce à la transformation de Lorentz. Ainsi on a

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (1.9)$$

ce qui permet d'exprimer les composantes de la vitesse de ce même corps dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Par exemple, la vitesse selon la direction  $(Ox')$  sera

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} \quad (1.10)$$

## 1.2. LOI DE COMPOSITION RELATIVISTE DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS

De même pour les autres composantes on arrive au double système de relations

$$\left\{ \begin{array}{l} V'_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} \\ V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)} \\ V'_z = \frac{V_z}{\gamma \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}} \\ V_y = \frac{V'_y}{\gamma \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right)} \\ V_z = \frac{V'_z}{\gamma \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right)} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

On retrouve bien évidemment la transformation de Galilée dans la limite classique où  $v/c \rightarrow 0$ . Contrairement à la transformation des coordonnées spatio-temporelles, toutes les composantes de la vitesse sont affectées par un changement de référentiel. Cette modification provient de la modification du temps lui-même qui intervient dans la définition de la vitesse.

On peut continuer la même approche pour en déduire les lois de composition des composantes de l'accélération ressentie par un corps dans un référentiel donné vers un autre référentiel. Ainsi en prenant l'exemple de la composante de l'accélération le long de l'axe ( $Ox$ ), on calcule la différentielle de  $V_x$  en supposant que  $\gamma$  reste une constante ( $v$  constante donc), ce qui donne

$$dV'_x = \frac{dV_x}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} + \frac{dV_x(V_x - v)\frac{v}{c^2}}{\left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^2} \quad (1.12)$$

En utilisant l'expression de  $dt'$  obtenue précédemment, on obtient l'expression de l'accélération le long de ( $Ox'$ ) en fonction de l'accélération ressentie dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ainsi que des composantes de la vitesse

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dV_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^2 \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^3} \quad (1.13)$$

Le même calcul appliqué aux autres composantes donne les systèmes suivants de passage entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  pour l'accélération

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^3} \\ a'_y = \frac{a_y \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right) + a_x \frac{vV_y}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^3} \\ a'_z = \frac{a_z \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right) + a_x \frac{vV_z}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vV_x}{c^2}\right)^3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right)^3} \\ a_y = \frac{a'_y \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right) - a'_x \frac{vV'_y}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right)^3} \\ a_z = \frac{a'_z \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right) - a'_x \frac{vV'_z}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{vV'_x}{c^2}\right)^3} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Comme on peut le voir, la transformation des accélérations est loin d'être linéaire et implique à la fois les différentes composantes de l'accélération mais aussi celles de la vitesse. On retrouve évidemment à nouveau la transformation de Galilée qui donne des accélérations identiques dans les deux référentiels dans le cas où  $v/c \rightarrow 0$ .

### 1.3 Quadrivecteurs et transformation de Lorentz

La mécanique newtonienne se repose beaucoup sur l'utilisation de vecteurs au travers de la conservation de la quantité de mouvement. De par l'hypothèse de l'existence d'un temps universel valide dans tous les référentiels, ces vecteurs ne nécessitent qu'une structure spatiale, i.e. de trois composantes dans l'espace. La connaissance de ces trois composantes est suffisante pour déterminer ce même vecteur dans tout référentiel considéré.

Dans le cadre de la relativité restreinte, le caractère local du temps nécessite de définir des vecteurs à quatre composantes (une temporelle plus trois spatiales) pour pouvoir prendre en compte la relativité de chaque référentiel d'inertie. L'utilité d'un quadrivecteur est réalisée si certaines propriétés de ces quadrivecteurs se conservent lors d'un changement de référentiel. Ainsi la norme d'un quadrivecteur doit être conservée par la transformation de Lorentz d'après le second postulat de la relativité qui ne privilégie aucun observateur en particulier. On note un quadrivecteur comme

$$A^\alpha = (A^t, A^x, A^y, A^z) \quad (1.15)$$

où  $A^\alpha$  est la version covariante de ce quadrivecteur. Le passage à la version contravariante de ce quadrivecteur s'obtient en utilisant la métrique de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  qui décrit la géométrie d'un référentiel d'inertie en relativité restreinte :

$$A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta \text{ avec } \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

### 1.3. QUADRIVECTEURS ET TRANSFORMATION DE LORENTZ

La notion de vecteurs covariants et contravariants provient de la généralisation de la relativité restreinte aux espaces courbes et aux référentiels non-inertiels (relativité générale). Il ne nous appartient pas d'aborder ce genre de notion dans ce cours et c'est pourquoi je laisse le lecteur se référer à des cours de géométrie riemannienne ou de relativité générale pour plus d'information à ce sujet. Notons simplement qu'une des différences entre vecteur covariant et contravariant est la façon dont ils se transforment suivant la géométrie de l'espace considéré. On définit le carré de la norme du vecteur  $A$  comme

$$A^2 = A^\alpha A_\alpha = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 \quad (1.17)$$

Le quadrivecteur le plus simple que nous ayons vu est le quadrivecteur position dans l'espace-temps  $X^\alpha = (ct, x, y, z)$ . On voit facilement que la norme de ce quadrivecteur est invariante par changement de référentiel puisque

$$X^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = X'^2 \quad (1.18)$$

d'après la transformation de Lorentz définie par les équations (1.7). On peut au passage définir un quadrivecteur vitesse en dérivant le quadrivecteur position par rapport au temps. La question est : par rapport à quel temps devons nous dériver ce vecteur ? En effet, chaque référentiel ayant un temps propre, il existe une infinité de définition de ce vecteur. La définition la plus pertinente est celle qui ne fait pas appel au temps propre d'un observateur extérieur mais à celui du temps propre de l'objet repéré par le quadrivecteur position. Ce temps propre  $\tau$  au corps considéré est celui du référentiel qui se déplace avec l'objet, i.e. le référentiel où l'objet est immobile dans l'espace. Pour un observateur voyant l'objet se déplacer avec une vitesse constante  $v$ , ce temps propre est relié au temps de l'observateur  $t$  via la transformation de Lorentz  $d\tau = dt/\gamma$ . Le quadrivecteur vitesse  $U^\alpha$  s'écrit alors

$$U^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dX^\alpha}{dt} = \gamma(c, V_x, V_y, V_z) \quad (1.19)$$

Le carré de la norme de ce vecteur est  $U^2 = c^2 \gamma^2 (1 - V^2/c^2) = c^2$  qui est invariante par changement de référentiel. A partir de ce quadrivecteur, on peut facilement construire le quadrivecteur énergie-impulsion  $P^\alpha$  en multipliant le quadrivecteur vitesse par la masse au repos de la particule considérée fois la vitesse de la lumière. Ce quadrivecteur s'exprime alors comme

$$P^\alpha = mcU^\alpha = (\gamma mc^2, \gamma mcV_x, \gamma mcV_y, \gamma mcV_z) = (E, \vec{p}c) \quad (1.20)$$

où  $E$  est l'énergie totale de la particule et  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  la quantité de mouvement relativiste. La norme de ce quadrivecteur est elle aussi invariante et égale à  $P^2 = m^2 c^4$ .

Les quadrivecteurs sont construits sur les repères de l'espace-temps et se transforment de la même façon que celui-ci. Cela revient à dire que tous les quadrivecteurs se transforment de la même façon que le quadrivecteur position dans l'espace-temps. En généralisant la transformation de Lorentz vue précédemment, on peut écrire en reprenant la même configuration entre les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  que

$$\begin{pmatrix} A'_t \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

ainsi que la transformation inverse soit

$$\begin{pmatrix} A_t \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A'_t \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

La transformation d'un quadrivecteur quelconque d'un référentiel d'inertie à un autre conserve la norme de ce quadrivecteur car en calculant cette norme on voit rapidement que

$$A'^2 = \gamma^2(A_t^2 + \beta^2 A_x^2 - A_x^2 - \beta^2 A_t^2) - A_y^2 - A_z^2 = \gamma^2(1 - \beta^2)(A_t^2 - A_x^2) - A_y^2 - A_z^2 = A^2 \quad (1.23)$$

Cette invariance de la norme des quadrivecteur nous sera d'une grande utilité dans les diverses applications que nous rencontrerons dans la suite de ce cours.

### 1.4 Exercices

Les exercices proposés ici ne seront pas tous corrigés durant les séances d'enseignement. Vous êtes fortement invité à chercher (et résoudre ...) ces problèmes pour votre bénéfice personnel.

#### 1.4.1 Puissance d'une force et énergie de masse

On considère une particule de masse  $m$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Cette particule est soumise à une force  $F$  quelconque. A tout instant  $t$ , l'énergie de la particule est notée  $E(t)$ .

- Donner la relation existant entre la puissance de la force  $F$  et la variation d'énergie  $E$  de la particule.
- En utilisant le principe fondamental de la dynamique relativiste, montrer que la variation temporelle du facteur de Lorentz est proportionnelle à la puissance de la force  $F$ .
- En déduire que l'énergie de la particule est  $E = \gamma mc^2$  et qu'au repos, cette particule a une énergie de masse  $E = mc^2$ .

#### 1.4.2 Mouvement d'une particule relativiste dans un champ magnétique

Dans cet exercice, on considère un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  dans lequel une particule de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  quelconque se propage. On décomposera la vitesse de la particule comme  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  selon une composante parallèle et une composante perpendiculaire au champ magnétique.

- Montrer que la trajectoire de la particule est une hélice centrée autour de la direction du champ magnétique.
- En déduire le rayon de cette hélice ainsi que la pulsation de rotation autour du champ magnétique (pulsation et rayon de Larmor). Quelles sont les modifications induites par la dynamique relativiste ?
- Ecrire l'expression de l'accélération subie par la particule et en déduire l'expression de cette accélération vue depuis le référentiel propre de la particule (on supposera que localement ce référentiel est inertiel).

#### 1.4.3 Effet Doppler et focalisation relativiste

Un élément de plasma chaud, émettant un rayonnement isotrope dans l'espace au repos, se déplace avec une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  constante dans un référentiel d'inertie noté  $\mathcal{R}$ . On appellera  $\mathcal{R}'$  le référentiel propre de l'élément de plasma (dans ce référentiel l'élément de plasma est situé à l'origine de  $\mathcal{R}'$ ). Les deux référentiels possèdent des axes parallèles entre eux et l'élément de plasma se déplace le long d'une trajectoire décrite par l'équation ( $y = d, z = 0$ ) dans  $\mathcal{R}$ . Nous supposons que la Terre se situe à l'origine du repère  $\mathcal{R}$  à tout instant.

Un photon de fréquence  $\nu'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est émis par le plasma en direction de la Terre.

Sa vitesse de déplacement fait un angle  $\theta'$  avec l'axe  $(Ox')$ . Ce photon est reçu sur Terre où l'on mesure une fréquence  $\nu$  et où la vitesse d'arrivée du photon fait un angle  $\theta$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- Donner l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion du photon dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $\nu'$  et de  $\theta'$ . Faire de même dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
- En utilisant la transformation de Lorentz, donner les relations existantes entre  $\nu, \theta, \nu'$  et  $\theta'$ .
- Montrer que, si le plasma est ultra-relativiste, alors son rayonnement n'est plus isotrope mais concentré dans un cône d'angle  $2/\gamma$  où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz du plasma.





# 2

## Émission radiative de particules chargées

### Sommaire

---

2.1	Le système d'unités CGS Gaussien . . . . .	17
2.2	Accélération de particules chargées et rayonnement . . . . .	18
2.2.1	Puissance de rayonnement d'une particule chargée . . . . .	19
2.2.2	Formule de Larmor : approche géométrique (à faire par vous-même!) . . . . .	20
2.3	Rayonnement cyclo-synchrotron . . . . .	22
2.3.1	Puissance d'émission . . . . .	22
2.3.2	Spectre d'émission en fréquence . . . . .	23
2.3.3	Spectre d'émission synchrotron d'une population de particules . . . . .	28
2.4	Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung (hors programme) . . . . .	29
2.4.1	Spectre d'émission du Bremsstrahlung thermique . . . . .	29
2.4.2	Puissance d'émission du Bremsstrahlung . . . . .	33
2.5	Exercices . . . . .	35
2.5.1	Dynamique d'une particule relativiste dans un champ magnétique uniforme . . . . .	35
2.5.2	Propagation dans un champ électromagnétique . . . . .	35
2.5.3	Rayonnement de courbure . . . . .	36

---

**N**ous abordons dans ce deuxième chapitre la physique de l'émission de rayonnement provenant de particules électriquement chargées. Nous commencerons par introduire un système d'unités physiques très commode pour l'étude de la dynamique des particules chargées, puis dans un deuxième temps, nous aborderons une propriété fondamentale de ces particules chargées, celle de pouvoir rayonner dès qu'elles sont soumises à une force quelconque. Nous verrons au passage pourquoi les électrons sont les principaux émetteurs de rayonnement dans l'Univers. Nous verrons une application directe de cette notion au travers de l'étude du rayonnement cyclotron et de sa version relativiste le synchrotron.

### 2.1 Le système d'unités CGS Gaussien

Le système d'unités CGS (on devrait plutôt parler des systèmes), se base sur trois unités fondamentales pour décrire l'ensemble des phénomènes dits mécaniques. Les trois unités de base sont le centimètre (C), le gramme (G) et la seconde (S). A partir de ces trois entités, on peut définir les grandeurs mécaniques comme

- Force  $\rightarrow$  dyne (dyn) =  $10^{-5}$  N
- Energie  $\rightarrow$  erg =  $10^{-7}$  J

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

- Puissance  $\rightarrow \text{erg/s} = 10^{-7} \text{ W}$
- Pression  $\rightarrow \text{barye} = 10^{-1} \text{ Pa}$
- etc ...

en ce qui concerne les phénomènes électriques et magnétiques, il existe de multiples façons de définir les grandeurs électriques. Le système CGS Gaussien a la particularité de prendre une définition de la charge électrique telle que les constantes reliées à l'électromagnétisme s'expriment comme  $\epsilon_0 = 1/4\pi c^2$  et  $\mu_0 = 4\pi$  (on vérifie alors bien que  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ). Cette propriété est très utile car elle simplifie l'expression de la loi de Coulomb (et de Biot-Savart) car maintenant l'amplitude de la force de répulsion entre deux charges électriques identiques s'écrit en CGS Gaussien :

$$F = \frac{q^2}{d^2} \quad (2.1)$$

où  $q$  est la charge électrique et  $d$  la distance entre les deux charges. Dans ce système d'unité, la charge électrique s'exprime en Franklins (Fr) ou statcoulombs. **La charge électrique en CGS Gaussien n'est pas dimensionnellement comparable avec une charge électrique exprimée dans le système MKSA!!**. En effet ce choix de définition modifie les dimensions du champ électrique de telle façon qu'il est maintenant dimensionnellement comparable à un champ magnétique. A titre d'exemple, on peut associer un champ électrique en CGS Gaussien à un champ électrique en MKSA via la relation  $E_{\text{MKSA}} \equiv cE_{\text{CGSG}}$  ( $q_{\text{MKSA}} \equiv q_{\text{CGSG}}/c$ ) où  $c$  est la vitesse de la lumière. L'unité légale en CGS Gaussien du champ électrique est le statVolt/cm alors que l'unité du champ magnétique est le Gauss  $1G = 10^{-4} \text{ T}$ . Ces deux unités sont en réalité équivalentes car les deux champs possèdent les mêmes dimensions.

Il est important de noter que suite à cette redéfinition du champ électrique, des termes supplémentaires sont incorporés dans diverses lois physiques afin de la prendre en compte. Ainsi en CGS Gaussien, tout terme faisant intervenir une charge électrique et/ou un champ électrique verra son expression altérée pour prendre en compte la redéfinition de ces termes. On citera quelques relations écrites dans ce système particulier :

$$\begin{aligned} \text{Force de Lorentz : } \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \\ \text{Flux de Poynting : } \vec{S} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \\ \text{Equations de Maxwell : } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho ; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 2.2 Accélération de particules chargées et rayonnement

On considère une particule possédant une charge électrique  $q$  et initialement au repos dans son référentiel propre qui subit une accélération telle que dans son référentiel propre, elle acquière une vitesse  $\Delta v \ll c$  sur un intervalle de temps  $\Delta t$ . Par simplicité on considèrera que le gain de vitesse est orienté selon l'axe ( $Oz$ ). Cette particule rayonne en permanence un champ électrique qui, quand elle est au repos, est décrit par la loi de Coulomb. Les lignes de champ sont alors purement radiales. L'accélération subie par la particule modifie les lignes de champ électrique à cause du déplacement de la source émettrice de ce champ.

### 2.2.1 Puissance de rayonnement d'une particule chargée

Le calcul du rayonnement associé à l'accélération subie par une particule chargée se réalise grâce à l'expression des potentiels électromagnétiques engendrés par cette particule. L'expression générale de ces potentiels est donnée par les formules de Lienard et Wiechert qui stipule qu'une particule se trouvant à l'origine d'un repère à un instant  $t$  génère un potentiel électrique  $V$  et un potentiel-vecteur  $\vec{A}$  en un point  $M$  repéré par  $\vec{r}$  qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r - (\vec{v}(t - r/c) \cdot \vec{r})/c} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{v}(t - r/c)}{c^2(r - (\vec{v} \cdot \vec{r})/c)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $r = |\vec{r}|$  et où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule à l'instant  $t' = t - r/c$ . Dans le cas où la vitesse de la particule dans le référentiel considéré est très faible par rapport à la vitesse de la lumière, les expressions précédentes se simplifient et deviennent au premier ordre en  $v/c$  (on pourra approximer  $t' \simeq t$  si on reste dans le voisinage de la particule)

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r} + \frac{q\vec{v}(t - r/c) \cdot \vec{r}}{cr^2} = \frac{q}{r} + \frac{qv(t - r/c) \cos \theta}{cr} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{v}(t - r/c)}{cr} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où l'angle  $\theta$  est un des angles des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . L'approximation faite ici est semblable avec l'approximation dipolaire faite en électrostatique. A ce stade nous devons écrire l'expression de la vitesse de la particule a été choisie arbitrairement comme orienté selon un axe  $(Oz)$  faisant l'angle  $\theta$  avec  $\vec{r}$ . L'expression de la vitesse de la particule est alors  $\vec{v} = (v(t - r/c) \cos \theta, -v(t - r/c) \sin \theta, 0)$ . A partir de ces potentiels, nous pouvons calculer les champs électriques et magnétiques portés par la perturbation soit

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \wedge \vec{A} = \frac{q}{r} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \frac{v(t - r/c) \sin \theta}{c} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{v(t - r/c) \cos \theta}{rc} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour mener à bien ce calcul, il faut garder à l'esprit que la vitesse  $v$  dépend du rayon  $r$  et que si on pose  $t' = t - r/c$  on a

$$\frac{\partial v(t - r/c)}{\partial r} = \frac{dv(t')}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{dv(t')}{dt'} = -\frac{\dot{v}}{c} \quad (2.6)$$

L'expression du champ magnétique à laquelle nous arrivons est

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = q \sin \theta \left( \frac{\dot{v}}{rc^2} + \frac{v}{r^2c} \right) \vec{e}_\phi \quad (2.7)$$

alors que pour l'expression du champ électrique nous obtenons

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_r \left( \frac{q}{r^2} + \frac{qv \cos \theta}{r^2c} \right) + \vec{e}_\theta \left( \frac{qv}{cr^2} + \frac{q\dot{v}}{c^2r} \right) \sin \theta \quad (2.8)$$

Cette dernière expression du champ électrique comporte un terme bien connu en électrostatique, celui du champ coulombien généré par la charge au repos. Dans le cas où la particule subie une

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

accélération dans un référentiel où elle initialement au repos, une contribution dépendente du temps se rajoute au champ coulombien. Le champ électromagnétique s'écrit alors (la contribution du champ coulombien au flux d'énergie est nulle de par son orientation)

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{q\dot{v}}{c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r^2} \vec{e}_r + \frac{q\dot{v}}{c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (2.9)$$

Le flux d'énergie associé à cette onde électromagnétique nous est donné par le vecteur de Poynting

$$\vec{S}_{\text{poy}} \cdot \vec{e}_r = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r = \frac{q^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{r^2 c^4}\quad (2.10)$$

Le flux d'énergie orienté dans la direction radiale est similaire à une onde sphérique qui décroît en  $1/r^2$  et qui conserve le flux d'énergie. Il n'y a pas de dissipation d'énergie électromagnétique durant le transport de ce rayonnement. La puissance totale émise par la particule s'obtient en intégrant sur une sphère de rayon  $r$  quelconque

$$P = 2\pi r^2 \int_0^\pi \vec{S}_{\text{poy}} \cdot \vec{e}_r \sin \theta d\theta = \frac{q^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta\quad (2.11)$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement en linéarisant l'expression et ainsi on a  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ . La puissance rayonnée par une particule dont la vitesse  $v$  dans un référentiel est très inférieure à la vitesse de la lumière et subissant une accélération  $\dot{v}$  est donnée par la formule de Larmor

$$P = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3}\quad (2.12)$$

Il est très important de garder à l'esprit que cette formule n'est valide dans un référentiel que si la particule considérée est non relativiste dans ce référentiel.

### 2.2.2 Formule de Larmor : approche géométrique (à faire par vous-même !)

L'accélération subie par la particule provoque un déplacement de cette particule dans son référentiel qui initialement était son référentiel propre. Afin de quantifier la déformation des lignes de champ électrique, nous pouvons tout d'abord écrire qu'à tout instant  $t$  compris entre 0 et  $\Delta t$ , un photon émis par la particule à l'instant  $t_e$  avec un angle  $\theta$  par rapport à  $(Ox)$  parcourra la trajectoire

$$\begin{cases} x = c(t - t_e) \cos \theta + \Delta v t_e & 0 \leq t_e \leq t \leq \Delta t \\ y = c(t - t_e) \sin \theta \end{cases}\quad (2.13)$$

Quand  $t = \Delta t$ , nous pouvons réexprimer les coordonnées de tous les photons émis selon l'angle  $\theta$  pour obtenir les nouvelles lignes de champ soit

$$y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{\Delta v}{c}} (x - \Delta v \Delta t)\quad (2.14)$$

ce qui correspond à l'équation d'une droite dont le coefficient directeur est  $\sin \theta / (\cos \theta - \Delta v/c)$  et passant, quelque soit l'angle  $\theta$ , par le point  $(x = \Delta v \Delta t, y = 0)$  qui correspond à la position de la particule chargée. En nous plaçant dans le référentiel d'inertie de la particule où elle est

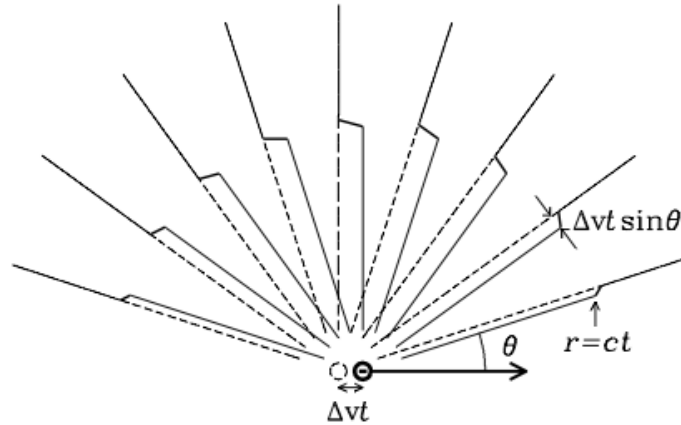


FIGURE 2.1 – Modifications des lignes de champ électrique engendrées par le déplacement de la charge électrique.

initialement au repos, nous avons  $\Delta v \ll c$  ce qui permet de voir que les lignes de champ électriques déformées conservent quasiment (à  $\Delta v/c$  près) leur formes initiales à une translation selon  $(Ox)$  près. A l'interface entre la zone perturbée et la zone non perturbée, nous aurons une contribution non-radiale du champ électrique telle que

$$\frac{E_{\perp}}{E_r} = \frac{\Delta v \Delta t \sin \theta}{c \Delta t} \quad (2.15)$$

où le champ radial est donné par la loi de Coulomb  $E_r = q^2/c^2 \Delta t^2$ . On en déduit donc que la composante orthoradiale peut s'écrire

$$E_{\perp} = \frac{q \Delta v \sin \theta}{c^3 \Delta t^2} = \frac{q a \sin \theta}{c^2 r} \gg E_r \propto \frac{1}{r^2} \quad (2.16)$$

L'accélération subie par la particule dans son référentiel propre est  $a = \Delta v/\Delta t$ . Comme on peut le voir dans la dernière expression, le champ orthoradial présent à l'interface des zones perturbée et non-perturbée sera très dominant à grande distance car celui-ci ne décroît qu'en  $1/r$ . De plus cette composante électrique est dépendante du temps, ce qui implique qu'elle induit une composante magnétique donnant naissance à une onde électromagnétique se propageant dans l'espace. Le flux d'énergie emportée par cette onde est donné par le flux de Poynting  $\vec{S}$  d'une onde électromagnétique sphérique où en moyenne sur une période de l'onde  $|E_r| = |B|$ . Ce flux d'énergie s'écrit alors

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E_{\perp}^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{c^3 r^2 4\pi} \quad (2.17)$$

La puissance totale  $P$  emportée par l'onde s'obtient à partir de ce flux en intégrant sur une sphère de rayon  $r$  centrée sur la particule, ce qui donne

$$P = \iint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q^2 a^2 r^2 \sin^3 \theta}{c^3 r^2 4\pi} d\theta d\phi = \frac{q^2 a^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \quad (2.18)$$

On calcule la dernière intégrale en posant un changement de variable  $\alpha = \cos \theta$  et on obtient

$$P = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (2.19)$$

Je rappelle ici que ce résultat n'est valide que dans le référentiel propre de la particule de charge  $q$  subissant une accélération  $a$  dans ce même référentiel. Ainsi dans les diverses applications que nous rencontrerons nous aurons à déterminer cette accélération grâce aux transformations de Lorentz vues dans le précédent chapitre.

Pour conclure ce paragraphe, nous pouvons remarquer que la puissance émise par une charge accélérée ne dépend pas de la masse de la particule. Cela ne signifie en rien que protons et électrons vont émettre la même quantité de rayonnement car à force égale, l'accélération ressentie par le proton sera  $m_p/m_e = 1836$  fois plus petite que celle ressentie par l'électron. On voit ici une explication simple du fait que les électrons sont les principaux émetteurs de lumière dans l'Univers.

### 2.3 Rayonnement cyclo-synchrotron

L'essentiel de la matière dans l'Univers se trouve sous la forme de plasma, c'est à dire sous la forme de gaz ionisés. Au sien de ces plasmas, on trouve naturellement des champs magnétiques de différentes intensités. Nous avons vu précédemment que des particules soumises à une accélération généraient une émission dont nous avons estimé la puissance. Nous allons estimer et analyser l'émission des particules chargées d'un plasma au travers de leur interaction avec le champ magnétique ambiant.

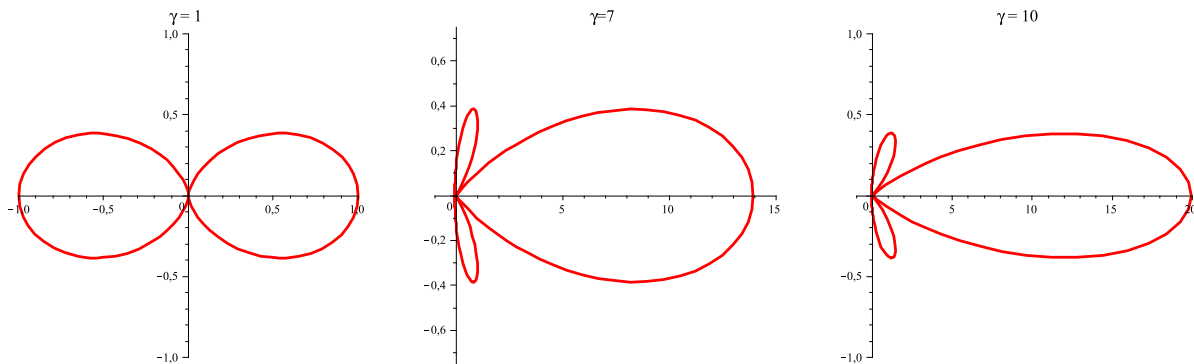


FIGURE 2.2 – Déformation des lobes d'émission dipolaire due à l'effet Doppler relativiste. Le rayon des lobes est proportionnel à la quantité d'énergie émise dans la direction considérée. La particule se trouve à l'origine du repère pendant que sa vitesse est alignée avec l'axe horizontal. L'accélération dans le cas présent est parallèle à l'axe vertical des figures.

#### 2.3.1 Puissance d'émission

On considère une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , nous avons vu alors dans les exercices du premier chapitre que l'accélération ressentie par cette particule dans le référentiel de l'observateur est orthogonale à sa vitesse et d'amplitude  $a$  telle que

$$a = \frac{|q|v_{\perp}B}{\gamma mc} \quad (2.20)$$

où  $\gamma$  est son facteur de Lorentz et  $v_{\perp}$  est la composante de la vitesse orthogonale au champ magnétique. L'accélération étant toujours orthogonale à la vitesse d'après l'expression de la force de Lorentz, on peut donc voir que l'expression de cette accélération dans le référentiel propre  $\mathcal{R}'$  de la particule sera

$$a' = \gamma^2 a = \frac{\gamma |q| v_{\perp} B}{mc} \quad (2.21)$$

D'après le paragraphe précédent, on en déduit alors la puissance d'émission de cette particule dans son référentiel propre

$$P' = \frac{2\gamma^2 q^4 v_{\perp}^2 B^2}{3m^2 c^5} \quad (2.22)$$

Cette puissance exprimée dans le référentiel propre de la particule est identique à celle perçue par l'observateur car la puissance est une grandeur physique invariante par transformation de Lorentz ( $P = P'$ ). En effet, la puissance étant définie comme  $dE/dt$  et sachant que l'énergie  $E$  et le temps  $t$  se transforment de la même façon dans une transformation de Lorentz, on voit que la puissance reste inchangée lors d'une telle transformation.

Nous avons déjà évoqué que les électrons étaient les meilleurs émetteurs de rayonnement grâce à leur faible masse donc en nous intéressant aux électrons nous aurons l'essentiel de cette émission (nous reviendrons plus tard sur le cas des protons). Dans le cas d'un électron, la puissance exprimée plus haut peut se réécrire en utilisant la section efficace de Thomson  $\sigma_T = 8\pi e^4/3m^2 c^4$  :

$$P = 2\sigma_T c \gamma^2 \frac{v_{\perp}^2}{c^2} U_B \quad (2.23)$$

où  $U_B$  représente la densité d'énergie magnétique du milieu  $U_B = B^2/8\pi$ . Pour avoir une estimation de la puissance moyenne rayonnée, il nous faut prendre en compte la valeur moyenne de l'angle  $\alpha$  entre la vitesse de l'électron et le champ magnétique  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Ainsi la valeur moyenne de la puissance s'obtient en posant

$$P_{SYN} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P \sin \alpha d\alpha d\phi = \sigma_T c U_B \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad (2.24)$$

où on rappelle que  $\beta = v/c$ . La puissance moyenne rayonnée par particule est ainsi obtenue. On constate facilement que les électrons relativistes seront de très puissants émetteurs par rapport aux électrons thermiques non-relativistes. Nous allons voir que ces deux types de populations sont respectivement responsables du rayonnement dit synchrotron (relativistes) et cyclotron (non-relativistes).

### 2.3.2 Spectre d'émission en fréquence

Avant d'aborder la question du spectre en fréquence émis par une particule plongée dans un champ magnétique, nous devons d'abord étudier la façon dont le déplacement de cette particule altère son propre rayonnement. En premier lieu, si nous reprenons la présentation de la puissance émise par une particule accélérée, nous avons vu que l'énergie émise par cette particule est de type dipolaire, i.e.  $P \propto \sin^2 \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre la direction de visée et la direction définie par le vecteur accélération.

Dans le cas qui nous intéresse ici, l'accélération subie par la particule est toujours perpendiculaire à sa vitesse dans le référentiel de l'observateur. Nous nous trouvons alors dans la configuration décrite par la figure (2.2). Dans l'exercice portant sur l'effet Doppler, nous avons montré

qu'un photon émis par une source en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel de l'observateur n'était pas perçu par l'observateur avec le même angle que celui vu par un observateur placé dans le référentiel de la particule. Ainsi si on appelle  $\alpha'$  l'angle que font la vitesse et la direction d'émission du photon dans le référentiel propre de la particule  $\mathcal{R}'$ , l'angle  $\alpha$  avec lequel sera reçu le photon par un observateur dans  $\mathcal{R}$  sera

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'} \\ \sin \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma(1 + \beta \cos \alpha')} \\ \nu = \gamma(1 + \beta \cos \alpha')\nu' \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\beta = v/c$  et où  $\nu$  et  $\nu'$  sont les fréquences de réception et d'émission du photon considéré. Le rayonnement dipolaire émis par la particule dans un champ magnétique sera donc déformé par le mouvement de la particule. A un instant donné, on oriente les axes d'un repère cartésien centré sur la particule de telle manière que la vitesse est orientée selon  $(Ox)$  et l'accélération selon  $(Oy)$ . Si  $\alpha$  est l'angle entre la direction considérée et la vitesse, on a  $\alpha = \pi/2 - \theta$ , ce qui fait que la puissance rayonnée par la particule sera de la forme  $P \propto \cos^2 \alpha$ . En utilisant les relations données par l'effet Doppler, on en déduit que la relation entre l'énergie du photon émis  $\nu_o$  et l'énergie du photon reçu selon la direction  $\alpha$  par l'observateur immobile sera

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_o} = \frac{(\cos \alpha - \beta)^2}{\gamma(1 - \beta \cos \alpha)^3} \quad (2.26)$$

La figure (2.2) montre la forme des lobes d'émission pour quatre valeurs du facteur de Lorentz de la particule émettrice. On voit que dès que  $\gamma$  devient plus grand que l'unité qu'un effet de focalisation intervient, concentrant l'essentiel de l'émission d'énergie dans la direction de la vitesse de la particule. La largeur du lobe principal d'émission, peut s'estimer en constatant que la frontière entre lobe principal et lobe secondaire se trouve en  $\cos \alpha = \beta$ . Pour des facteurs de Lorentz assez grands ( $\gamma \geq 5$ ), cela correspond alors à  $\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2$  et  $\cos \alpha \simeq 1 - \alpha^2/2$ . On voit alors que la largeur angulaire du cône d'émission principal est  $\Delta\alpha \simeq 2/\gamma$ .

Au cours d'une rotation autour du champ magnétique, une particule chargée émet de la lumière visible pour un observateur fixe durant seulement une partie de son orbite (voir figure 2.3). Si on note  $\Delta x$  la portion de l'orbite où la particule envoie de la lumière vers l'observateur,  $x$  la distance entre la particule et l'observateur et si on pose  $t = 0$  comme le temps où la particule commence à rentrer dans la zone d'émission visible par l'observateur, alors le temps  $\Delta t_p$  pendant lequel la particule envoie de la lumière vers l'observateur sera

$$\Delta t_p = \frac{x - \Delta x}{c} + \frac{\Delta x}{v_{\perp}} - \frac{x}{c} = \frac{\Delta x}{v_{\perp}} \left(1 - \frac{v_{\perp}}{c}\right) \quad (2.27)$$

Selon la configuration de la vitesse de la particule dans le champ magnétique, on peut se trouver alors dans deux types de configuration :

- **Régime cyclotron** : la configuration de la vitesse est telle que  $v_{\perp} \ll c$ . Il n'y a alors pas de focalisation relativiste en direction de l'observateur (la vitesse parallèle au champ peut néanmoins être proche de la vitesse de la lumière mais dans ce cas là les particules rayonneront peu car elles ne subissent pas d'accélération importante). La durée d'émission sera alors de l'ordre de grandeur de la période de rotation de la particule.
- **Régime synchrotron** : la configuration est telle que  $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \simeq c$ . Le mouvement de la particule est essentiellement perpendiculaire au champ magnétique. On peut écrire dans cette



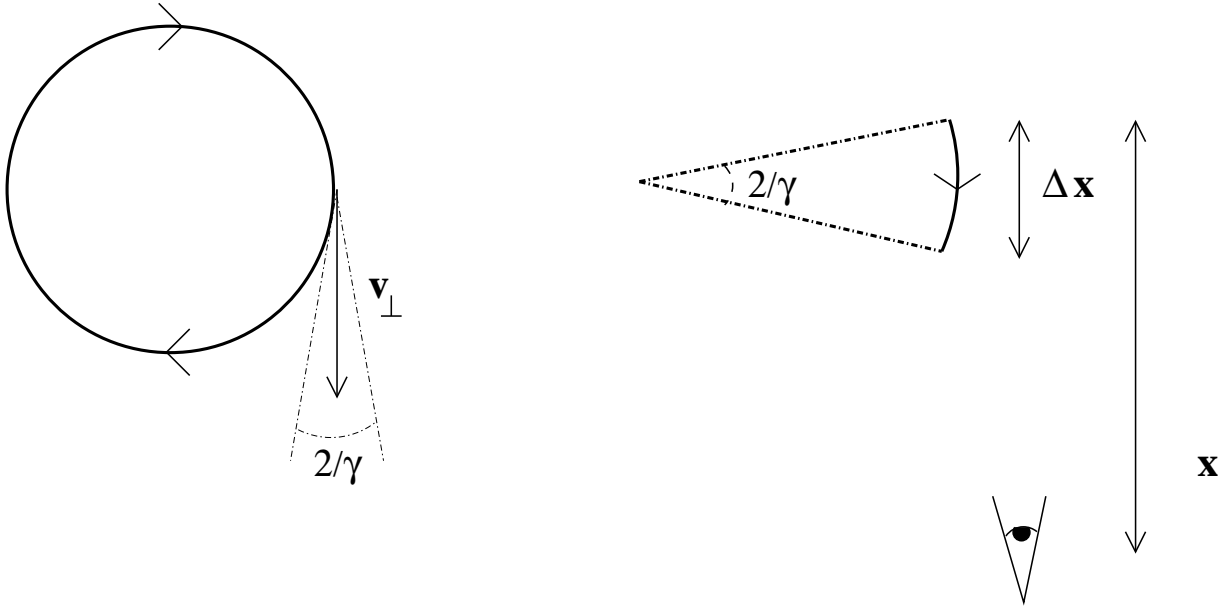


FIGURE 2.3 – Description de la zone d'émission visible d'une particule relativiste en rotation dans un champ magnétique par un observateur fixe avec un facteur de Lorentz  $\gamma \gg 1$ . Dans le cas où la vitesse perpendiculaire au champ magnétique est proche de celle de la lumière, une petite fraction seulement de l'orbite  $\Delta x$  sera propice à la réception de l'émission de lumière en provenance de cette particule pour un observateur fixe.

configuration que  $1 - v_{\perp}/c \simeq 1/2\gamma^2$ , ce qui donne un temps d'émission visible

$$\Delta t_p \simeq R_L \frac{2}{\gamma v_{\perp} 2\gamma^2} = \frac{m}{|q|B\gamma^2} \quad (2.28)$$

où  $R_L$  est le rayon de Larmor de la particule. Si on compare ce temps d'émission au temps nécessaire pour que la particule fasse une rotation complète autour du champ magnétique  $\Delta t$ , on obtient  $\Delta t/\Delta t_p \simeq \gamma^3 \gg 1$ . Une particule chargée en rotation dans un champ magnétique n'enverra donc une émission très intense que dans pendant une fraction très petite de son orbite si la vitesse perpendiculaire au champ est proche de la vitesse de la lumière.

Le profil de champ électrique perçu par un observateur extérieur fixe sera différent suivant s'il est dans un régime ou dans l'autre. Le spectre de puissance en fréquence par unité d'angle solide du signal reçu par l'observateur dépend essentiellement de la forme du champ électrique vu depuis le référentiel car la relation entre le spectre de puissance  $S(\nu)$  et la transformée de Fourier du champ électrique est

$$s(\nu) = \frac{dS}{d\Omega} \frac{c}{4\pi} \hat{E}(\nu) \hat{E}^*(\nu) \quad (2.29)$$

où  $\hat{E}^*(\nu)$  est le conjugué de  $\hat{E}(\nu)$ . Dans le régime cyclotron, il est assez facile de voir quel sera ce spectre d'émission. En effet, si aucun effet relativiste transverse ne perturbe l'émission de la particule, le signal du champ électrique sera simplement sinusoïdal tel que  $E(t) \propto \cos(\omega_L t)$  où  $\omega_L$  est la pulsation de Larmor. La transformée de Fourier d'un tel champ sera un pic de Dirac  $\delta(\nu - \frac{\omega_L}{2\pi})$  centré sur la fréquence cyclotron. Cette fréquence s'écrit  $\omega_L = |q|B/m$  dans le régime cyclotron et outre les propriétés intrinsèques des particules ne dépend que de l'intensité du champ magnétique local. Bien-sûr les plasmas astrophysiques ne sont pas tous ordonnés et paisibles et localement le

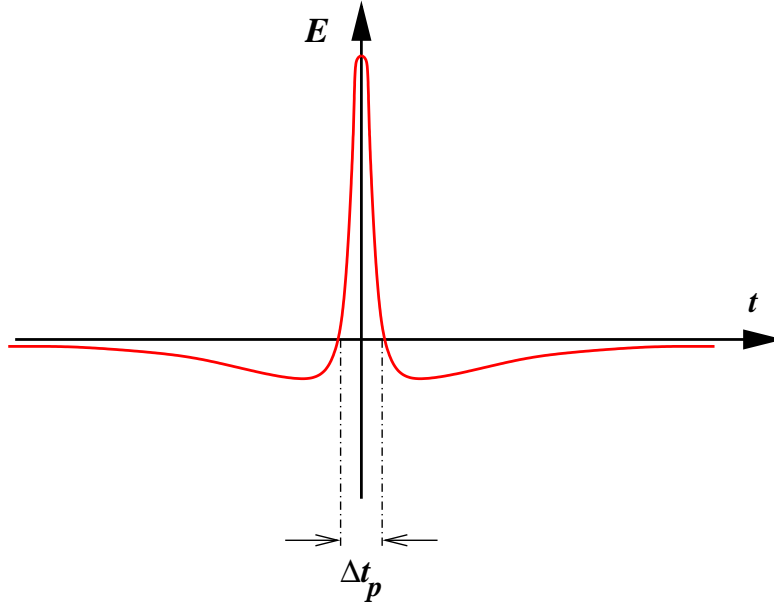


FIGURE 2.4 – Profil temporel du champ électrique perçu par un observateur fixe et émis par une particule chargée en rotation dans un champ magnétique en ayant une vitesse  $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \simeq c$ . Le mouvement relativiste transverse au champ magnétique induit une focalisation de l'émission qui devient très brève (largeur temporelle  $\sim \Delta t_p$ ) par rapport à la périodicité du signal  $\Delta t$ .

champ magnétique varie dans ces régions. Ainsi ces fluctuations engendrent un élargissement du pic cyclotron permettant de diagnostiquer la variance du champ magnétique local ainsi que la turbulence du milieu.

Le calcul du profil temporel du champ électrique ainsi que sa transformée de Fourier est très complexe dans le cas où  $v_{\perp} \simeq c$  et il n'est pas d'intérêt ici de détailler ces calculs. Néanmoins, on peut appréhender quelques propriétés de ce spectre en regardant le profil d'une impulsion du champ électrique. En effet si on appelle  $\varepsilon(t)$  le profil temporel d'une impulsion (comme représentée sur la figure 2.4), alors on peut écrire que le champ électrique perçu par un observateur sera

$$E(t) = \varepsilon(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad (2.30)$$

où le symbole  $\otimes$  représente le produit de convolution. La convolution par un peigne de Dirac permet de prendre en compte la périodicité du signal. La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est le peigne de Dirac lui-même. La transformée de Fourier du champ électrique perçu sera alors

$$\hat{E}(\nu) = \hat{\varepsilon}(\nu) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \frac{k}{\Delta t}) \quad (2.31)$$

La fonction  $\hat{\varepsilon}(\nu)$  qui s'écrit

$$\hat{\varepsilon}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \cos(2\pi\nu t) dt \quad (2.32)$$

présente deux grands régimes de comportement :

- La partie basse fréquence où  $\nu \ll 1/\Delta t_p$  : pour  $\nu = 0$ , la fonction  $\hat{\varepsilon}$  est nulle car l'intégrale de l'impulsion est nulle. Pour  $\nu$  croissant, mais toujours très inférieur à  $1/\Delta t_p$ , le  $\cos(2\pi\nu t)$

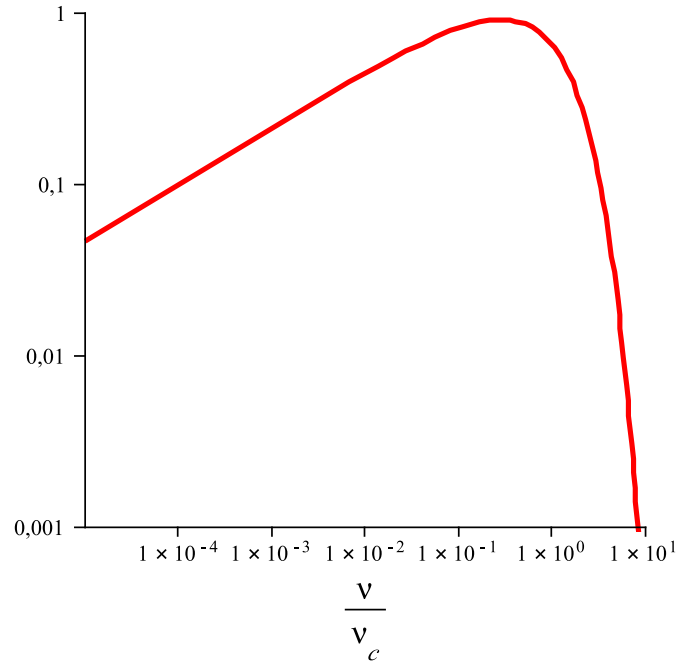


FIGURE 2.5 – Spectre synchrotron d’une particule chargée.

décroit légèrement ce qui a pour effet d’atténuer la contribution des parties négatives de la fonction (associées aux lobes secondaires) et de faire croître très lentement  $\hat{\varepsilon}$  tant que  $\nu < 1/\Delta t_p$ .

- La partie haute fréquence où  $\nu > 1/\Delta t_p$  : dans ce domaine, la fonction  $\cos(2\pi\nu t)$  varie très vite par rapport à  $\varepsilon(t)$ , ce qui a pour effet de faire décroître très rapidement  $\hat{\varepsilon}$  à mesure que  $\nu$  augmente.

La fonction  $\hat{\varepsilon}$  aura donc un comportement légèrement croissant pour  $0 \leq \nu \leq 1/\Delta t_p$ , puis rencontrera un maximum en  $\nu \simeq 1/\Delta t_p$  avant de rapidement décroître vers zéro pour  $\nu > 1/\Delta t_p$ . Le profil de la transformée de Fourier du champ électrique est proche de celui que nous venons de voir. En effet, la multiplication par le peigne de Dirac laisse quasiment inchangé la fonction  $\hat{\varepsilon}$  car la largeur en fréquence du peigne est très petite ( $\sim 1/\Delta t$ ) par rapport à l’étendue de la fonction  $\hat{\varepsilon}$  ( $\sim \gamma^3/\Delta t$ ). Le peigne de dirac n’agira donc que pour les basses fréquences du spectre.

Je donne ici l’expression exacte du spectre synchrotron dont l’obtention n’est pas des plus aisée. Ainsi pour une particule de charge  $q$ , de masse  $m$  et de facteur de Lorentz ( $\gamma \simeq (1 - v_{\perp}^2/c^2)^{-1/2}$ ),

le spectre en fréquence est

$$S(\nu, \gamma) = \frac{\sqrt{3}|q|^3 B}{mc^2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (2.33)$$

où la fréquence critique  $\nu_c = 3\gamma^2|q|B/2m$  et où  $K_{5/3}$  est une fonction de Bessel modifiée. Ce spectre est représentée par la figure (2.5). Le maximum de ce spectre se trouve à la fréquence  $\nu_m = 0.29\nu_c$  et la largeur à mi-hauteur est  $\Delta\nu = 2\nu_c/3$ . Il est intéressant de noter que cette fonction dont l'expression est complexe peut être approximée par une fonction d'expression plus simple :

$$S(\nu, \gamma) \sim \frac{\sqrt{3}|q|^3 B}{mc^2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{\nu}{\nu_c}\right) \quad (2.34)$$

Nature des particules émettrices : A ce stade nous pouvons remarquer les principales différences entre les propriétés d'émission des protons et des électrons d'un même plasma. En effet, nous avons déjà vu que la puissance d'émission des protons était très inférieure à celle des électrons en vertu de leur grande différence de masse. Nous pouvons ajouter ici qu'à même énergie, les protons émettent un rayonnement jusqu'à une fréquence inférieure à celle des électrons car  $\nu_{c,p} = \nu_{c,e}m_e/m_p$ . Ainsi les protons émettent une énergie bien plus faible que les électrons et à des fréquences beaucoup plus basse que pour les électrons dans le cas du rayonnement cyclo-synchrotron.

### 2.3.3 Spectre d'émission synchrotron d'une population de particules

Dans les plasmas astrophysiques émetteurs de rayonnement synchrotron, une population de particules relativistes est présente en son sein. Divers mécanismes d'accélération permettent de donner naissance à ce genre de population. Il est courant de décrire ces particules par nature supra-thermiques grâce à une fonction de distribution  $f$  donnant leur densité dans l'espace des phases position-quantité de mouvement. Si on estime que ces particules sont localement isotropiquement réparties, on peut alors en déduire le spectre d'émission total de cette population de particule par le calcul de l'intégrale suivante :

$$S_{TOT}(\nu) = \int f(\gamma)S(\nu, \gamma)d\gamma \quad (2.35)$$

Parmi les différents mécanismes d'accélération de particules existant dans l'Univers, le plus commun est un mécanisme que nous verrons à la fin de ce cours, et appelé accélération de Fermi. Ce genre donne naissance à des populations de particules relativistes dont la fonction de distribution a la forme de lois de puissances. Dans ce cas, on écrira que cette fonction de distribution est  $f(\gamma) = f_0\gamma^{-p}$  pour  $\gamma \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  et  $p > 0$ . L'équation précédente peut alors se réécrire comme

$$S_{TOT}(\nu) = \int f_0\gamma^{-p}S(\nu, \gamma)d\gamma \quad (2.36)$$

Pour savoir quelle sera la forme du spectre en fonction de la fréquence d'émission, il nous faut réarranger les différents termes de l'expression afin de faire apparaître la dépendance en fréquence seule. Un moyen pour y arriver est de faire un changement de variable de façon à utiliser la variable  $y = \nu/\nu_c$ . Il faut se rappeler ici que  $\nu_c \propto \gamma^2$  et donc on aura

$$\begin{cases} d\gamma \propto \nu^{1/2} \frac{dy}{y^{3/2}} \\ \gamma \propto \left(\frac{\nu}{y}\right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.37)$$

L'expression du spectre total va alors se réduire à

$$\begin{aligned}
 S_{TOT}(\nu) &\propto \int_{y_{min}}^{y_{max}} f_o \left( \frac{\nu}{y} \right)^{-p/2} S(y) \frac{\nu^{1/2}}{y^{3/2}} dy \\
 \Rightarrow S_{TOT}(\nu) &\propto \nu^{-(p-1)/2} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f_o y^{(p-3)/2} S(y) dy
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dans la dernière expression, l'intégrale est une constante numérique qui certes dépend des paramètres physiques de l'environnement mais qui surtout ne dépend pas de la fréquence. Le spectre d'émission synchrotron en provenance d'une population de particules relativistes organisée en loi de puissance sera lui-même une loi de puissance dont l'indice sera relié à l'indice de distribution des particules.

## 2.4 Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung (hors programme)

Le rayonnement de freinage ou "Bremsstrahlung" en allemand (appellation historique conservée pour réduire la longueur du nom de ce processus) est le mécanisme d'émission associé au freinage ressenti par une espèce de particules chargées lors de son passage près de particules d'autres espèces ayant une charge électrique opposée ou non. Parmi toutes les interactions entre espèces se produisant dans un plasma, c'est l'interaction entre les électrons et les ions qui sera celle produisant l'essentiel de l'émission radiative. En effet, les électrons sont les particules les plus émettrices à cause de leur faible masse et leurs voisins les plus proches seront les ions ayant des charges de signe opposé. L'interaction coulombienne entre ces deux espèces sera ainsi la plus intense et donc celle produisant le plus de rayonnement. Dans le premier paragraphe, nous allons nous intéresser à dériver le spectre de puissance en fréquence de ce processus en provenance d'un plasma thermique. Par thermique, j'entends un plasma dont les particules se trouvent dans un équilibre thermodynamique local, ce qui sous-entend que la vitesse moyenne des particules est faible devant celle de la lumière. En effet, un électron relativiste ayant une énergie cinétique bien supérieure à  $m_e c^2$  définirait une température du plasma telle que  $T \gg m_e c^2 / k_B \simeq 6 \times 10^9 K$  ce qui ne représente pas la grande majorité des plasmas astrophysiques. Nous verrons néanmoins dans le second paragraphe les modifications à prendre en compte pour caractériser l'émission de freinage associée à un électron relativiste.

### 2.4.1 Spectre d'émission du Bremsstrahlung thermique

Pour connaître le spectre d'émission associé au Bremsstrahlung, nous allons procéder par étape. Dans un premier temps, nous allons considérer un couple électron-ion (ion de charge  $Ze$  avec  $Z$  un entier positif et  $e > 0$  la charge électrique fondamentale), puis nous verrons l'effet de multiples interaction entre l'électron et un ensemble d'ions puis enfin nous généraliserons ce résultat à une population d'électrons non-relativistes. L'inertie de l'ion de masse  $m_i$  étant très supérieure à celle de l'électron, on peut faire l'approximation que lors d'une interaction coulombienne entre l'électron et l'ion, cet ion va rester immobile. Nous nous placerons donc dans le référentiel d'inertie de l'ion pour la description de l'interaction. On va noter  $v$  la vitesse de l'électron dans ce référentiel et nous supposerons que cet électron est non-relativiste ( $v \ll c$ ). La nature non-relativiste de l'électron nous permet d'utiliser directement la formule de Larmor car l'accélération ressentie par l'électron dans le référentiel de l'ion sera identique à celle ressentie par cet électron dans son référentiel d'inertie. Ce couple de particules forme un dipole électrostatique dont nous appellerons  $\vec{d} = e \vec{l}$

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

le moment dipolaire ( $\vec{l}$  est la distance entre l'ion et l'électron). On peut voir alors en prenant la dérivée temporelle seconde que la formule de Larmor appliquée à l'électron peut se réécrire

$$P = \frac{2\dot{d}^2}{3c^3} \quad (2.39)$$

Lors de l'interaction électrostatique, nous avons vu en début de chapitre que le champ électrique généré par cette accélération a comme expression

$$E(t, \theta) = \frac{\ddot{d}(t) \sin \theta}{rc^2} \quad (2.40)$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction d'émission de  $E(t)$  et le vecteur accélération. Le spectre en fréquence de ce signal fait intervenir la transformée de Fourier de ce champ électrique qui sera proportionnelle à celle de  $\ddot{d}$ . En utilisant les propriétés de cette transformée, on voit facilement que

$$\ddot{d}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\nu^2 \hat{d}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (2.41)$$

où  $\hat{d}(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $d(t)$ . La transformée de Fourier du champ électrique rayonné sera donc alors

$$\hat{E}(\nu, \theta) = -\frac{4\pi^2\nu^2 \sin \theta \hat{d}(\nu)}{rc^2} \quad (2.42)$$

Le spectre de puissance par unité d'angle solide est donné par la transformée de Fourier du flux de Poynting associé à ce champ électrique rayonné, soit

$$\frac{dS}{d\Omega}(\nu, \theta) = \frac{c}{4\pi} |\hat{E}(\nu)|^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{16\pi^4\nu^4 \sin^2 \theta |\hat{d}(\nu)|^2}{r^2 c^4} = \frac{4\pi^3\nu^4 \sin^2 \theta |\hat{d}(\nu)|^2}{r^2 c^3} \quad (2.43)$$

On obtient le spectre moyen  $S(\nu)$  en intégrant l'expression précédente sur une sphère de rayon  $r$ , ce qui donne

$$S(\nu) = \iint \frac{dS}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dS}{d\Omega} \sin \theta r^2 d\theta d\phi = \frac{2}{3} \frac{(2\pi\nu)^4 |\hat{d}(\nu)|^2}{c^3} \quad (2.44)$$

On retrouve au passage une expression ici directement de la formule de Larmor où on voit apparaître ce qui est associée à la transformée de Fourier de la dérivée temporelle seconde du moment dipolaire  $d$ . Il ne nous reste plus qu'à calculer cette transformée de Fourier. Pour l'obtenir on doit voir que  $\ddot{d}(t) = e\dot{v}(t)$  ce qui implique que

$$\hat{d}(\nu) = -\frac{e}{4\pi^2\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \exp(2i\pi\nu t) dt \quad (2.45)$$

Considérons l'interaction de cet électron avec un ion de charge  $Ze$  comme montré sur la figure (2.6) : l'électron subit une déflexion de sa trajectoire à cause de l'attraction coulombienne exercée par l'ion. Le temps d'interaction significative où la vitesse de l'électron va effectivement changer est environ  $\tau \simeq b/v$  où  $b$  est le paramètre d'impact de l'électron. On peut donc logiquement réduire les bornes de l'intégrale (on pose que  $t = 0$  correspond au temps d'entrée de l'électron dans la zone d'interaction)

$$\hat{d}(\nu) = -\frac{e}{4\pi^2\nu^2} \int_0^\tau \dot{v}(t) \exp(2i\pi\nu t) dt \quad (2.46)$$

## 2.4. RAYONNEMENT DE FREINAGE - BREMSSTRAHLUNG (HORS PROGRAMME)

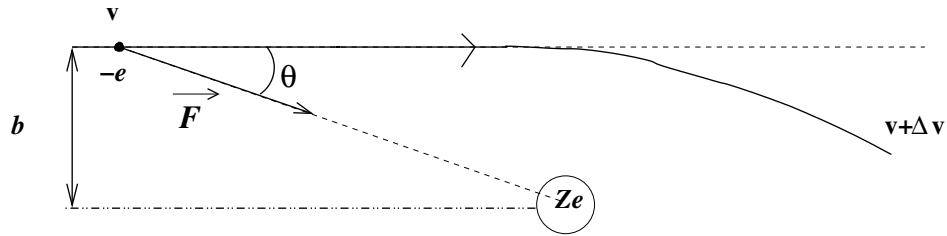


FIGURE 2.6 – Trajectoire d'un électron lors d'une déflexion coulombienne induite par un ion de charge  $Ze$ . Le paramètre d'impact  $b$  est la distance initiale transverse entre l'électron et l'ion considéré ici comme fixe. La force d'attraction coulombienne exercée par le noyau permet à l'électron d'augmenter sa vitesse.

La valeur de ce temps de traversée  $\tau$  va déterminer la valeur de l'intégrale à estimer. Ainsi dans le domaine des basses fréquences  $2\pi\nu\tau \ll 1$ , l'exponentiel dans l'intégrale vaudra 1, ce qui donnera comme valeur de l'intégrale  $\Delta v$ . Dans le cas contraire, soit  $2\pi\nu\tau \gg 1$ , l'exponentiel varie très vite, ce qui donne une valeur nulle pour l'intégrale. Ainsi, on peut résumer la valeur de  $\hat{d}(\nu)$  :

$$S(\nu, v, b) = \begin{cases} \frac{2e^2\Delta v^2}{3c^3} & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \ll 1 \\ 0 & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \gg 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Pour calculer la variation de vitesse que subit l'électron, nous devons tout d'abord réaliser que les électrons responsables du rayonnement de freinage doivent être des particules qui peuvent se propager librement dans le plasma afin d'assurer la pérennité du processus. Pour ce faire, il ne saurait être question pour un électron de subir une importante variation de vitesse lors d'une interaction avec un ion, au risque pour cet électron d'être capturé par l'ion et de ne plus pouvoir de propager. Dans la suite de notre raisonnement, nous supposons que  $\Delta v \ll v$  et nous vérifierons à posteriori pour quelles valeurs de  $b$  cela est valide. Lors d'une déflexion, comme présentée sur la figure (2.6), la projection de la force d'attraction coulombienne s'appliquera dans la direction parallèle à  $\vec{v}$  mais aussi dans la direction transverse à la vitesse. Si comme nous le supposons, la trajectoire de l'électron n'est que faiblement perturbée alors on peut voir que le travail de la force parallèle à la vitesse sera nul par projection. La variation de vitesse interviendra donc principalement dans la direction transverse à la vitesse initiale. La projection de la force coulombienne dans la direction transverse s'exprime comme :

$$F_{\perp} = \frac{Ze^2b}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} = m_e \frac{dv_{\perp}}{dt} \quad (2.48)$$

où on a posé arbitrairement que  $t = 0$  correspond au passage de l'électron à la "verticale" de l'ion. Le calcul de la variation de vitesse donne alors

$$\Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_{\perp}}{dt} dt = \frac{Ze^2b}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{Ze^2\tau}{b^2m_e} \left[ \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2Ze^2}{m_ebv} \quad (2.49)$$

Pour vérifier que l'hypothèse de départ est valide ( $\Delta v \ll v$ ), nous voyons que la condition est que le paramètre d'impact ne doit pas être trop petit car sinon la déflexion est importante. La valeur minimale de ce paramètre d'impact  $b_{min}$  s'obtient en posant  $\Delta v \sim v$  et donne  $b_{min} = 2Ze^2/m_e v^2$ . Cette valeur correspond à une énergie mécanique nulle de l'électron, marquant la frontière entre électron libre et électron lié.

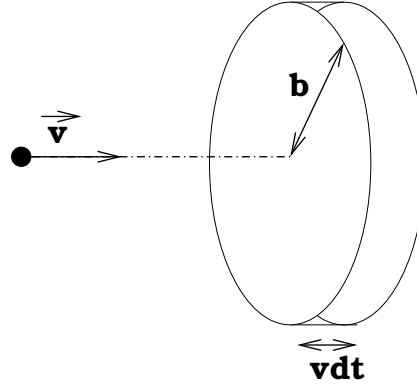


FIGURE 2.7 – Schéma montrant la zone d'interaction d'un électron avec les ions contenu dans un volume défini par le paramètre d'impact  $b$ .

Ayant obtenu toutes les parties manquantes, nous pouvons donc recomposer le spectre d'émission d'une électron interagissant avec un ion de charge  $Ze$  :

$$S(\nu, v, b) = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3m_e^2b^2v^2c^3} & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \ll 1 \\ 0 & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \gg 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

A ce stade, nous voyons que le spectre en fréquence de cette interaction est celui d'un signal "blanc", c'est à dire indépendant de la valeur de la fréquence tant que la fréquence  $\nu < v/2\pi b$ . Au delà de cette fréquence, le spectre est nul, il n'y a pas d'émission.

- Généralisation à un ensemble d'électrons mono-énergétique : considérant le spectre émis par un électron lors d'une interaction avec un ion, nous pouvons moyenniser l'émission obtenue en prenant en compte la moyenne des interactions subies pendant un intervalle de temps  $dt$  dans un volume  $dV$ . Pour ce faire nous utiliserons les densités électronique  $n_e$  et ionique  $n_i$ . Pour commencer, le nombre d'interaction qu'un électron ayant un paramètre d'impact entre  $b$  et  $b + db$  peut avoir avec les ions pendant un temps  $dt$  sera  $n_i v dt 2\pi b db$  (voir figure 2.7). Sachant que nous avons  $n_e$  électrons par unité de volume, on en déduit le spectre en puissance par unité de volume et par unité de temps du rayonnement de freinage :

$$\frac{dS}{dt dV}(\nu, v) = n_e n_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b S(\nu, v, b) db \quad (2.51)$$

Nous avons vu qu'il existe un paramètre d'impact minimal  $b_{min}$  en deça duquel les électrons sont capturés par les ions. A quoi correspond la borne supérieure de l'intégrale ? Cette borne supérieure correspond au fait qu'à une fréquence  $\nu$  donnée, le spectre  $S$  est nul si  $b$  est supérieur à  $v/2\pi\nu = b_{max}$ . Le calcul de l'intégrale amène le résultat suivant :

$$\frac{dS}{dV dt}(\nu, v) = \frac{16\pi}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 v} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (2.52)$$

Le facteur logarithmique apparaissant dans l'expression est appelé facteur de Gaunt  $g$ . Dans la réalité, la prise en compte d'effets quantiques plus fins que la description proposée ici est insérée dans la définition de ce facteur. L'expérience montre que ces corrections sont mineures et que l'expression trouvée ici est une bonne approximation de la réalité.



## 2.4. RAYONNEMENT DE FREINAGE - BREMSSTRAHLUNG (HORS PROGRAMME)

Au sein des plasmas astrophysiques dits classiques, la distribution en vitesse des particules n'est pas mono-énergétique mais suit une statistique de répartition appelée statistique de Maxwell-Boltzmann. Cette statistique stipule que la probabilité  $d\mathcal{P}$  pour une particule d'avoir une vitesse entre  $v$  et  $v + dv$  dans un plasma de température  $T$  est

$$d\mathcal{P} = \frac{v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv}{\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv} \quad (2.53)$$

En combinant cette densité de probabilité avec l'expression du spectre que nous avons obtenue à la fin du paragraphe précédent, nous pouvons alors avoir le spectre de puissance par unité de volume du rayonnement de freinage émis par un plasma thermique, soit

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dV dt}(\nu) &= \frac{\int_{v_{min}}^\infty \frac{dS}{dV dt}(\nu, v) v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv}{\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv} \\ \Rightarrow \frac{dS}{dV dt}(\nu) &= \frac{32\pi^{1/2} g Z^2 e^6 n_e n_i}{3m_e^2 c^3} \left(\frac{m_e}{2k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

La borne inférieure apparaissant dans l'intégrale au numérateur de la première ligne provient du fait que pour qu'un électron puisse émettre un photon d'énergie  $h\nu$ , il faut qu'il ait une énergie cinétique suffisante pour le faire soit  $v \geq v_{min} = \sqrt{2h\nu/m_e}$ . Le spectre en puissance obtenu pour un plasma thermique possède une forme particulière car il est constant pour toute fréquence inférieure à la fréquence maximale  $\nu_{max} = k_B T/h$ , puis présente une coupure exponentielle pour toute fréquence supérieure à cette limite. Ce mécanisme de rayonnement est ainsi utile pour déterminer la température du plasma émetteur.

### 2.4.2 Puissance d'émission du Bremsstrahlung

Le bilan énergétique du rayonnement Bremsstrahlung pour un électron peut se faire en considérant les deux régimes non-relativiste ( $NR$ ) et relativiste ( $R$ ). Commençons par estimer l'énergie émise par un électron lors d'une interaction coulombienne avec un ion dans ces deux régimes.

#### Energie d'émission par un électron pendant une déflexion

$NR$  : Dans ce régime, on peut estimer l'ordre de grandeur de l'énergie émise  $dE$  pendant la déflexion en prenant la puissance émise due à l'accélération d'origine coulombienne et le temps typique d'interaction  $\tau \simeq b/v$ . L'accélération  $a$  subie par un électron ayant un paramètre d'impact  $b$  sera en moyenne  $Ze^2/b^2 m_e$ , ce qui donne une quantité d'énergie

$$dE \sim \frac{2Z^2 e^6}{3b^3 m_e^2 c^3 v} \quad (2.55)$$

$R$  : Ici une modification relativiste est à prendre en compte. Tout d'abord il faut exprimer l'accélération  $a'$  ressentie par l'électron dans son référentiel propre, soit  $a' = \gamma^2 a$  pour pouvoir appliquer la formule de Larmor que nous avons vue ici. Nous allons utiliser le fait que la force coulombienne agit principalement dans la direction perpendiculaire au déplacement pour déduire

le lien entre les deux accélérations. Nous pouvons en déduire alors la puissance d'émission de l'électron dans son référentiel propre, puissance qui étant un invariant de Lorentz sera identique dans le référentiel de l'observateur. Le temps typique d'interaction sera  $\tau = b/c$ , ce qui amène alors

$$dE \sim \frac{2Z^2 e^6}{3b^3 m_e^2 c^4} \gamma^2 \quad (2.56)$$

On peut au passage remarquer que la puissance moyenne associée peut se réécrire sous la forme

$$\frac{dE}{\tau} \sim \sigma_T c \gamma^2 U_E \quad (2.57)$$

où  $U_E = Z^2 e^2 / 4\pi b^4$  est la densité d'énergie électrostatique des ions du plasma. On retrouve une structure similaire à celle de la puissance émise par rayonnement synchrotron, à la différence que la densité d'énergie magnétique est remplacée par la densité d'énergie électrostatique. On voit ici que ces deux mécanismes d'émission peuvent cohabiter à condition que le plasma soit ionisé et qu'un champ magnétique à grande échelle soit présent.

### Paramètre d'impact minimal

NR : Nous avons vu précédemment qu'en deça d'une valeur minimale du paramètre d'impact  $b_{min}$ , un électron se trouverait capturé par un ion avec lequel il interagit. La valeur de  $b_{min}$  est alors  $h/mv$  où l'on a utilisé le fait que la fréquence maximale du photon émis correspond à  $1/\tau(b_{min})$ .

R : Le même raisonnement peut s'appliquer dans le cas où l'électron est relativiste à la différence que son énergie est maintenant  $\gamma m_e c^2$ , ce qui amène à une nouvelle expression  $b_{min} = \gamma h/mc$ . Pour obtenir cette expression, il faut bien réaliser que la fréquence du photon vu par l'observateur sera  $\gamma/\tau'$  où  $\tau'$  est le temps d'interaction caractéristique dans le référentiel propre de l'observateur. A cause de la dilatation du temps dans ce référentiel, on sait que  $\tau' = b/\gamma c$ .

### Puissance d'émission moyenne d'émission par un électron

NR : Pour calculer la puissance moyenne émise par l'électron, il faut tout d'abord savoir le nombre d'interaction que cet électron aura au cours d'un intervalle de temps  $dt$ . Ce nombre est égal au nombre d'ions présent dans la zone d'interaction. Ainsi pour un électron ayant un paramètre d'impact compris entre  $b$  et  $b + db$ , le nombre d'ion interagissant sera  $dn = n_i 2\pi b db v dt$ . Le calcul de la valeur moyenne se fait en intégrant sur les valeur du paramètre d'impact :

$$P_{moy} = \int dE \frac{dn}{dt} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{2Z^2 e^6 n_i v}{3b^3 m_e^2 c^3 v} 2\pi b db = \frac{2\pi Z^2 e^6 n_i}{3m_e^2 c^3} \frac{1}{b_{min}} \quad (2.58)$$

Etant donnée la dépendance en  $1/b^3$  de l'énergie émise lors d'une interaction, on voit que la production principale d'énergie sera engendrée par les électrons ayant un paramètre d'impact proche de la valeur minimale  $b_{min}$ , ce qui correspond à une fréquence  $\nu_{max} \sim m_e v^2/h$ .

R : Dans le cas d'un électron relativiste, le même calcul nous amène à une puissance moyenne

$$P_{moy} = \int dE \frac{dn}{dt} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{2Z^2 e^6 n_i c}{3b^3 m_e^2 c^3 v} \gamma^2 2\pi b db = \frac{2\pi Z^2 e^6 n_i}{3m_e^2 c^3} \gamma^2 \frac{1}{b_{min}} \quad (2.59)$$

Ici aussi les électrons ayant un paramètre d'impact proche de la valeur minimale domineront l'émission d'énergie avec une fréquence  $\nu_{max} \sim \gamma m_e c^2/h$ . On voit ici le lien de proportionnalité entre la fréquence d'émission d'un électron et son facteur de Lorentz. Comme nous l'avons évoqué, les populations relativistes sont très souvent distribuées selon des lois de puissance, on voit alors que l'émission de Bremsstrahlung suivra elle aussi une distribution spectrale en loi de puissance.

## 2.5 Exercices

### 2.5.1 Dynamique d'une particule relativiste dans un champ magnétique uniforme

On considère une zone de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$ . Dans cette zone, une particule de charge  $e$  et de masse  $m$  se propage à un instant  $t_o$  avec une vitesse  $v = v_o$  proche de celle de la lumière. On notera le vecteur vitesse de cette particule comme  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  où  $\vec{v}_{\parallel}$  est la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique tandis que  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante de la vitesse perpendiculaire au champ magnétique. On supposera que la composante de la vitesse  $v_{\perp}$  est très grande par rapport à  $v_{\parallel}$ .

1. Exprimer la quantité d'énergie émise au cours du temps par la particule en fonction de  $d\gamma/dt$ ,  $m$  et  $c$ . En déduire l'expression de  $d\gamma/dt$  en sachant que cette particule émet un rayonnement synchrotron.
2. On va supposer par la suite que l'accélération subie par la particule sera perpendiculaire au champ magnétique. Dans le cadre de cette hypothèse, projeter la relation fondamentale de la dynamique de cette particule dans la direction parallèle au champ magnétique ainsi que parallèlement à la vitesse perpendiculaire  $\vec{v}_{\perp}$ . En déduire les composantes de la force de freinage associée au rayonnement de la particule. Montrer enfin que le rayonnement émis par la particule au cours de sa propagation dans le champ magnétique  $\vec{B}$  peut se traduire comme une force de freinage ressentie par la particule dont l'expression est

$$\vec{f}_{rad} = -\omega_r m (\beta_{\perp}^2 \gamma^2 \vec{v} + \vec{v}_{\perp}) \quad (2.60)$$

où  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$  et où  $\omega_r$  est une pulsation dont on donnera l'expression.

3. On définit le temps caractéristique synchrotron  $t_{syn}$  comme le temps nécessaire à une particule pour perdre la moitié de son énergie totale par émission synchrotron. En vous servant de l'expression de la force de radiation précédente, donner l'expression de  $t_{syn}$ . Pourquoi peut-on supposer que  $\beta_{\perp}$  reste à peu près constant durant le temps  $t_{syn}$  ?

### 2.5.2 Propagation dans un champ électromagnétique

On se placera, dans cet exercice dans un référentiel où les champs électrique et magnétique sont parallèles. On notera  $E_o$  et  $B_o$  les amplitudes de ces champs dans ce référentiel. La vitesse de la particule (de masse  $m$ ) dans ce référentiel sera toujours notée  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  où  $\vec{v}_{\parallel}$  est la composante de la vitesse parallèle aux champs électrique et magnétique tandis que  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante de la vitesse perpendiculaire aux champs électrique et magnétique.

1. En prenant en compte toutes les forces qui s'appliquent sur la particule (de charge  $e$  électrique, magnétique et rayonnement), montrer que cette particule subit une accélération tant que son énergie totale est inférieure à une valeur critique dont on donnera l'expression.
2. Montrer ensuite que la particule, au cours de sa propagation, tend vers une situation où sa vitesse tend à devenir parallèle aux champs électrique et magnétique.
3. En se plaçant dans ce régime asymptotique de vitesse, donner les expressions des composantes de la vitesse de la particule en fonction du temps. On prendra comme origine des temps le temps où la particule entre dans ce régime asymptotique.

### 2.5.3 Rayonnement de courbure

Dans cette dernière partie, on va considérer un champ magnétique dont les lignes de champs sont localement courbées avec un rayon de courbure  $R$ . On supposera aussi que la vitesse de la particule reste parallèle au champ magnétique au cours de sa propagation.

1. Expliquer pourquoi la particule va émettre un rayonnement au cours de sa propagation, même si sa vitesse reste parallèle au champ magnétique.
2. Donner l'expression de la puissance émise par la particule ainsi que la fréquence d'émission principale. Expliquer comment ce rayonnement (appelé rayonnement de courbure) peut être comparé à un rayonnement de type synchrotron. Donner l'expression du champ magnétique correspondant à ce rayonnement de courbure.

# 3

## Interaction Photon-Electron

### Sommaire

---

3.1	Production de paires électrons-positrons . . . . .	37
3.2	Emission Compton Inverse . . . . .	39
3.2.1	Diffusion Compton . . . . .	40
3.2.2	Emission Compton Inverse . . . . .	41

---

Dans ce chapitre, nous aborderons brièvement quelques interactions entre les électrons de haute énergie présents dans l'Univers et les champs de rayonnement dans lesquels ces particules se propagent. Nous verrons en particulier un mécanisme important dans l'astrophysique des hautes énergies, le mécanisme de diffusion Compton Inverse qui altère de façon importante le rayonnement issu des environnements astrophysiques.

### 3.1 Production de paires électrons-positrons

La physique des particules nous enseigne que la rencontre entre un électron et un positron (son anti-particule) donne naissance à une paire de photons dont les énergies dépendent des conditions de la collision entre l'électron et le positron. Nous pouvons résumer cette réaction de la façon suivante



où le symbole  $\rightleftharpoons$  signifie que la relation est valide dans les deux sens. En effet la collision entre deux photons peut aussi donner naissance à une paire électron-positron. Il faut néanmoins signaler que si les deux réactions sont possibles, elles ne sont pas équivalentes. La création de la paire électron-positron, faisant intervenir des particules de masses non-nulles, ne peut se faire que si les photons possèdent une énergie supérieure à l'énergie de seuil.

Le calcul de cette énergie de seuil se fait dans le contexte de la réaction la plus favorable à la naissance des deux leptons. A l'évidence, ce contexte correspond à la collision frontale de deux photons car toutes leurs énergies cinétiques sont alors disponibles pour la création. Nous envisagerons alors cette collision entre deux photons 1 et 2 de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  donnant naissance à une paire électron-positron ayant les quantité de mouvement  $p_-$  et  $p_+$ . Les lois de conservation de la physique nous impose que l'énergie totale ainsi que la quantité de mouvement totale se conservent. Ainsi pour le bilan d'énergie, on aura l'égalité

$$(h\nu_1 + h\nu_2)^2 = 2m_e^2c^4 + (p_+^2 + p_-^2)c^2 + 2E_+E_- \quad (3.2)$$

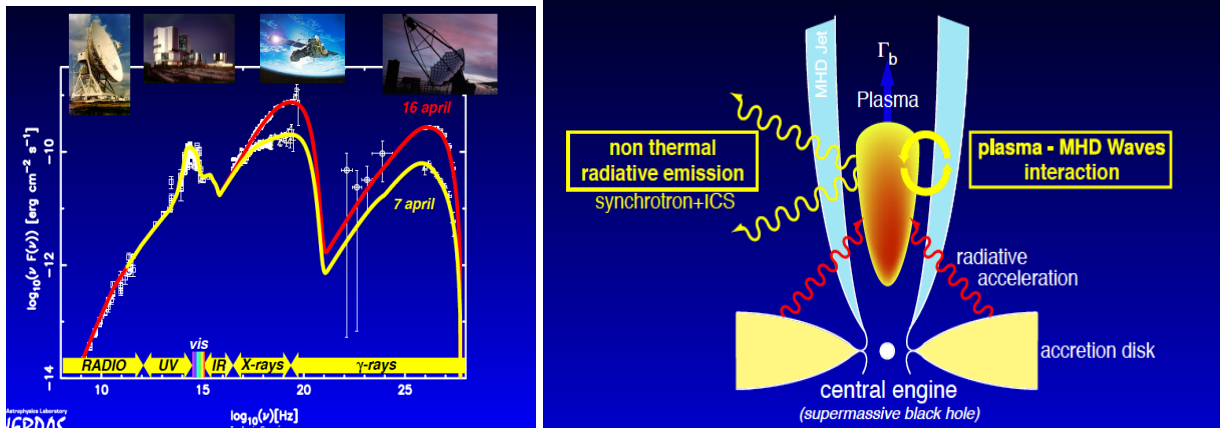


FIGURE 3.1 – **A gauche** : spectre d'émission en provenance d'un noyau actif de galaxie dont le jet de matière est aligné avec la ligne de visée. **A droite** : le mécanisme de la fusée Compton pourrait expliquer les différentes propriétés du spectre de rayonnement détecté. (Images tirées de la thèse de L. Saugé 2005)

où  $E_+^2 = m_e^2 c^4 + p_+^2 c^2$  et  $E_-^2 = m_e^2 c^4 + p_-^2 c^2$  sont les énergies totales des leptons de la réaction. La conservation de la quantité de mouvement totale donnera

$$h^2(\nu_1 - \nu_2)^2 = (p_+ + p_-)^2 c^2 \quad (3.3)$$

en soustrayant les deux relations de conservation, on obtient une troisième relation intéressante

$$2h^2\nu_1\nu_2 = m_e^2 c^4 + 2(E_+ E_- - p_+ p_- c^2) \quad (3.4)$$

Arrivé à ce stade, nous pouvons remarquer que l'on aura toujours  $E_+ \geq p_+ c$  et  $E_- \geq p_- c$  de par la définition de l'énergie totale. On voit alors que la condition de création de la paire de lepton se traduit par

$$h^2\nu_1\nu_2 \geq \frac{m_e^2 c^4}{2} \quad (3.5)$$

Le produit des énergies des deux photons est donc la clé de la création de paires électron-positron. Cette énergie de seuil est importante car elle est la raison de l'opacité de l'Univers à un rayonnement particulier : celui des rayons  $\gamma$  de très haute énergie. En effet l'Univers est baigné dans le rayonnement fossile du Big-bang, le corps noir cosmologique (CNC). Cela induit que toute particule de l'Univers subit en permanence un bombardement de photons dont l'énergie typique est celle du CNC, i.e.  $h\nu \sim k_B T_{CNC} \sim 10^{-3} eV$  où la température du CNC est de  $2.7K$ . Cela implique d'après ce que nous avons vu qu'aucun photon dont l'énergie sera supérieure à

$$h\nu \geq \frac{m_e^2 c^4}{2h\nu_{CNC}} \simeq 10^{14} eV = 130 TeV$$

ne pourra se propager dans l'espace car il s'annihilera avec les photons du CNC. Dans la pratique un calcul détaillé prenant en compte les caractéristiques détaillées du CNC montre que les rayons  $\gamma$  dont l'énergie est supérieure à quelques dizaines de  $TeV$  sont absorbés.

### Application : le mécanisme de fusée Compton

Une des applications astrophysiques utilisant la création de paires électron-positron à partir de photons de haute énergie est la "fusée" Compton. Ce mécanisme est un mécanisme d'accélération

pouvant donner naissance à un plasma de paires ayant des vitesses proches de celle de la lumière. L'ingrédient principal de ce mécanisme est l'existence d'un champ de rayonnement de haute énergie anisotrope. En effet, considérons un champ de rayonnement isotrope constitué de photons d'énergie suffisamment élevée pour pouvoir donner naissance à des paires d'électron-positron. Si le champ est isotrope alors dès qu'une paire est créée, elle va rapidement entrer en collision avec d'autres électrons ou positrons pour s'annihiler à nouveau car dans toutes les directions des paires de particules-antiparticules sont constamment créées. Un tel champ de rayonnement aura en son sein un bouillonnement de particules qui disparaîtront aussitôt sans laisser de traces. Dans le cas d'un champ de rayonnement anisotrope, la création de paires va donner naissance à un flot de paires électron-positron dans la direction où le champ de rayonnement est le moins intense car dans cette direction le nombre de particule annihilatrices est plus faible que le flot de particule incidentes.

De tels champs de rayonnement ne sont pas communs car il faut à la fois qu'ils soient composés de photons de hautes énergie et qu'ils présentent une géométrie adéquate à la survie des paires. C'est dans les noyaux actifs de galaxies (AGN) que l'on trouve ce genre de situation. Le plasma composant le disque d'accrétion autour d'un trou noir supermassif est extrêmement chaud et son rayonnement thermique peut atteindre la gamme d'énergie des rayons X. De plus la géométrie du disque et de son champ de rayonnement fait qu'un faisceau de paires peut se créer au dessus (et en dessous) du trou noir dans la région où les jets de matière en provenance du disque laisse la place à ce genre de plasma de survivre (voir figure 3.1). Des simulations poussées de ce genre de plasma ont montré qu'un plasma relativiste de paires peut se créer (facteur de Lorentz de l'ordre de 10) et reproduire les observations en provenance des AGN dont les jets sont alignés sur la ligne de visée (on les appelle les "blazars").

### 3.2 Emission Compton Inverse

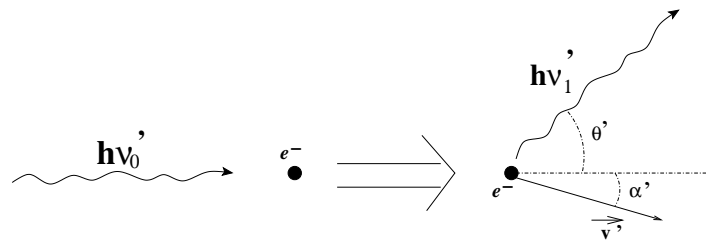


FIGURE 3.2 – Diagramme d'interaction lors de la diffusion d'un photon par un électron au repos dans son référentiel propre. La diffusion entraîne une diminution de l'énergie de ce photon dans le référentiel de l'électron.

Dans cette section, nous allons voir un des principaux mécanisme d'émission de photon de très haute énergie par des électrons : la diffusion Compton Inverse (CI). Cette diffusion permet d'augmenter l'énergie d'un champ de rayonnement de basse énergie en le faisant diffuser sur des électrons relativistes. Dans la première partie nous allons rappeler les propriétés fondamentales de l'interaction entre un électron et un photon au travers de la diffusion Compton. Dans la seconde partie, nous allons voir un régime particulier de cette diffusion Compton permettant la création de photons de haute énergie.

### 3.2.1 Diffusion Compton

La diffusion Compton est la diffusion d'un photon sur un électron. Cette diffusion est en réalité une absorption du photon incident par l'électron puis une émission d'un autre photon dans une direction fixée par les règles de conservation de la physique. Nous allons nous placer dans le référentiel propre de l'électron où celui-ci se trouve au repos avant l'interaction. Nous noterons  $h\nu'_0$  l'énergie du photon incident dans ce référentiel. Après l'interaction un autre photon d'énergie  $h\nu'_1$  a été émis avec un angle  $\theta'$  avec la direction incidente. L'électron va acquérir de la quantité de mouvement suite à l'interaction et nous la noterons  $p' = \gamma m_e v'$  faisant un angle  $\alpha'$  avec la direction incidente (voir figure 3.2).

#### Lois de conservation

La conservation de la quantité de mouvement totale lors de l'interaction nous permet d'écrire deux relations correspondant à la direction incidente et à la direction perpendiculaire à cette dernière. Nous avons alors

$$\begin{cases} 0 = -p' \sin \alpha' + \frac{h\nu'_1}{c} \sin \theta' \\ \frac{h\nu'_0}{c} = \frac{h\nu'_1}{c} \cos \theta' + p' \cos \alpha' \end{cases} \quad (3.6)$$

On en déduit l'expression du carré de la norme de la quantité de mouvement  $p'^2$  soit

$$p'^2 = \frac{h^2 \nu_o'^2}{c^2} \sin^2 \theta' + \left( \frac{h\nu'_0}{c} - \frac{h\nu'_1}{c} \cos \theta' \right)^2 \quad (3.7)$$

La conservation de l'énergie totale est plus simple à exprimer et nous indique que

$$h\nu'_0 + m_e c^2 = h\nu'_1 + \sqrt{m_e^2 c^4 + p'^2 c^2} \quad (3.8)$$

Pour réduire ce système d'équation, nous pouvons écrire le carré de l'énergie totale de l'électron et utiliser l'expression de  $p'^2$  trouvée précédemment pour aboutir à une équation n'impliquant que les paramètres relatifs aux photons :

$$(h(\nu'_0 - \nu'_1) + m_e c^2)^2 = m_e^2 c^4 + p'^2 c^2 = m_e^2 c^4 + h^2(\nu_o'^2 + \nu_1'^2 - 2\nu_1'\nu_0' \cos \theta') \quad (3.9)$$

En développant tous les termes contenus dans les parenthèses, nous arriverons à la relation liant la fréquence du photon émis en fonction de la fréquence du photon incident et de l'angle d'émission du photon :

$$\boxed{\nu_1' = \frac{\nu_o'}{1 + \frac{h\nu_o'}{m_e c^2} (1 - \cos \theta')}} \quad (3.10)$$

Cette relation nous indique que quelque soit l'angle  $\theta$ , le photon émis aura bien une fréquence plus basse que celle du photon incident. Ceci traduit évidemment la perte d'énergie du photon qui communique une partie de son énergie à l'électron via son énergie de recul.

#### Section efficace de diffusion

La section efficace de cette diffusion fût trouvée expérimentalement par J.J. Thomson au début du XXeme siècle. Klein et Nishina dérivèrent en 1929 l'expression théorique de cette section efficace



en prenant en compte les termes de correction quantiques. L'expression qu'ils ont obtenue s'écrit

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \varepsilon^2 \left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 + \cos^2 \theta' \right) \quad (3.11)$$

où le paramètre  $\varepsilon = \nu'_1/\nu'_o$  et  $\xi$  est la constante de structure fine  $\xi = e^2/\hbar c = 1/137$ . Cette section efficace différentielle représente la densité de probabilité d'avoir le photon diffusé à l'angle  $\theta'$  dans le cône d'angle solide  $d\Omega$ . La section efficace s'obtient en intégrant l'expression précédente sur la sphère avec  $d\Omega = 2\pi \sin \theta' d\theta'$ . Le résultat est

$$\sigma_{KN} = 2\pi r_o^2 \left\{ \frac{1+\delta}{\delta^2} \left( \frac{2(1+\delta)}{1+2\delta} - \frac{\ln(1+2\delta)}{\delta} \right) + \frac{\ln(1+2\delta)}{2\delta} - \frac{1+3\delta}{(1+2\delta)^2} \right\} \quad (3.12)$$

où  $r_o$  est le rayon classique de l'électron tel que la section efficace de Thomson  $\sigma_T = 8\pi r_o^2/3$  et où  $\delta = h\nu'_o/m_e c^2$ . Deux régimes apparaissent suivant la valeur de  $\delta$  :

- Régime Thomson : c'est le cas où  $\delta \ll 1$ , l'expression de  $\sigma_{KN} \rightarrow \sigma_T$ . Dans ce régime l'énergie du photon est petite par rapport à l'énergie de masse de l'électron. C'est pour cette raison que Thomson a expérimentalement trouvé cette valeur car à son époque il n'utilisa que des photons d'énergie modérée.

- Régime Klein-Nishina : avec  $\delta \gg 1$  ce régime est un régime où l'énergie du photon est beaucoup plus grande que l'énergie de masse de l'électron. Dans ce cas on peut voir que la section efficace tend vers une valeur beaucoup plus petite que la section efficace de Thomson car

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \sigma_{KN} = \frac{3\sigma_T}{4\delta} \ll \sigma_T \quad (3.13)$$

On peut noter dans ce régime que l'énergie du photon diffusé est très inférieure à celle du photon incident puisque d'après la relation (3.10) si  $\delta \gg 1$ , on a

$$\frac{\nu'_1}{\nu'_o} \simeq \frac{1}{\delta(1 - \cos \theta')} \geq \frac{m_e c^2}{2h\nu'_o} \ll 1 \quad (3.14)$$

Dans le cas où  $\theta' = \pi$ , le régime Klein-Nishina n'est pas vérifié et on se retrouve dans une zone intermédiaire où  $\delta \simeq 1$ .

### 3.2.2 Emission Compton Inverse

#### Amplification relativiste

Nous avons vu jusqu'ici que la diffusion d'un photon par un électron au repos engendrait une perte d'énergie systématique pour le photon incident. L'effet Compton Inverse considère toujours cette diffusion mais en prenant en compte le déplacement de l'électron avec des vitesses relativistes. Si l'électron se déplace avec une vitesse petite par rapport à celle de la lumière, le décalage de fréquence entre le référentiel propre de l'électron et le référentiel de l'observateur sera faible car le décalage Doppler sera de l'ordre de  $v/c$ . Les résultats obtenus dans la partie précédente seront donc toujours valides. Les choses vont changer si l'électron est relativiste car les effets d'aberration relativiste vont jouer à plein.

Nous allons définir la configuration de la collision entre l'électron et le photon. Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel de l'observateur où l'électron se déplace avec une vitesse  $v$  le long de l'axe ( $Ox$ ) et  $\mathcal{R}'$  le référentiel

propre de l'électron où ce dernier est au repos. On notera avec un ' les grandeurs vues depuis  $\mathcal{R}'$  et sinon les grandeurs seront vues depuis  $\mathcal{R}$ . On notera aussi  $\alpha$  l'angle que font la vitesse de l'électron et la vitesse du photon incident dans  $\mathcal{R}$  et  $\alpha'$  son alter-ego dans  $\mathcal{R}'$ .  $\theta$  sera l'angle entre la vitesse de l'électron et la vitesse du photon diffusé dans  $\mathcal{R}$  et  $\theta'$  son alter-ego dans  $\mathcal{R}'$ . En utilisant la transformation de Lorentz entre les deux référentiels pour le quadrivecteur énergie-impulsion du photon incident, on trouve que la relation de passage entre les fréquences dans les deux référentiels est  $\nu' = \nu\gamma(1 - \beta \cos \alpha)$ . Il faut bien voir ici qu'une collision frontale entre les deux particules se fait avec  $\alpha = \pi$ , ce qui donne alors une amplification  $\nu' = \nu\gamma(1 + \beta)$ . Une collision avec les deux vecteurs vitesse parallèles ( $\alpha = 0$ ) amènera alors à une diminution de la fréquence  $\nu' = \nu\gamma(1 - \beta) \simeq \nu/2\gamma$  pour un électron ultra-relativiste.

Le régime de la diffusion Compton Inverse est tel que l'on suppose que l'énergie du photon vue depuis le référentiel propre de l'électron reste faible par rapport à son énergie de masse. Cette condition implique donc que les photons impliqués dans la diffusion Compton inverse doivent avoir une énergie inférieure à  $m_e c^2/2$ . Cette limite haute de validité de la diffusion Compton Inverse implique des photons d'énergie pouvant aller jusqu'à des rayons X. Dans le cadre de cette diffusion on peut voir alors que la diffusion Compton dans le référentiel propre de l'électron ne modifie pas la fréquence du photon car  $\delta \ll 1$ . A ce stade nous savons ainsi que  $\nu'_1 = \nu_o\gamma(1 - \beta \cos \alpha)$ . En appliquant une transformation de Lorentz Inverse pour passer de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$ , nous trouverons ainsi que

$$\frac{\nu_1}{\nu_o} = \gamma^2 \frac{(1 - \beta \cos \alpha)(1 + \beta \cos \theta')}{1 + \delta(1 - \cos \theta')} \leq 4\gamma^2 \quad (3.15)$$

avec  $\delta = h\nu'_o/m_e c^2$ . Comme nous l'avons vu, le cadre de la diffusion Compton Inverse impliquant  $\delta \ll 1$  nous aurons principalement une amplification ou diminution d'énergie par effet Doppler (amplification ou diminution dépend de la configuration de la collision et de l'angle de réémission du photon). L'amplification maximale est de  $4\gamma^2$  dans le cas d'une collision frontale avec une réémission parallèle à la vitesse de l'électron. Dans cette configuration, le photon prend de plein fouet l'impact de l'électron qui renvoie un photon dans le sens inverse.

### Energie moyenne et puissance d'émission

Le rapport de l'énergie du photon émis par rapport à celle du photon incident donné par l'équation (3.15) nous montre que sa valeur dépend de l'angle d'arrivée du photon incident  $\alpha$  et de l'angle d'émission du photon diffusé dans le référentiel propre de l'électron  $\theta'$ . Pour connaître la valeur moyenne de ce rapport, il nous faut considérer les densités de probabilité d'avoir un photon à l'angle considéré pour pouvoir calculer la valeur moyenne.

Commençons par l'angle  $\alpha$  du photon incident. Quelle sera la probabilité qu'un photon viennent frapper l'électron avec un angle  $\alpha$ ? La réponse se trouve dans la densité de photon incident arrivant sur l'électron. Dans le référentiel de l'observateur, cette densité est isotrope. Mais dans le référentiel de l'électron, cette densité de photon n'est plus isotrope à cause du déplacement de l'électron. Ce déplacement engendre une modification de la densité des photons incidents. Pour évaluer la modification engendrée par le déplacement de l'électron, nous allons comparer le temps entre deux collisions successives de photon d'un électron au repos par rapport à un même électron en mouvement. Quand l'électron est au repos, on pose que  $\Delta t_{rep}$  est le temps entre deux collisions dans le cas où cet électron est en mouvement, Si l'électron est en mouvement avec une vitesse  $v$  le long d'un axe  $x$ , alors le temps entre deux collisions est raccourci car le second photon, qui est placé sur le même front d'onde que le second électron du cas au repos, a moins de distance à parcourir. Pour quantifier cet effet, on peut mesurer la distance à parcourir en regardant la figure

(3.3). On voit en effet que si le deuxième photon rencontrant l'électron en mouvement se trouve

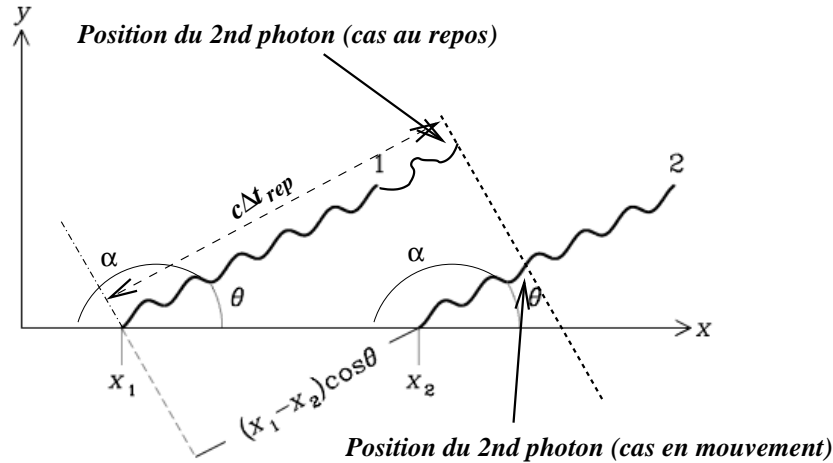


FIGURE 3.3 – Deux photons successifs entrent en collision avec un électron en mouvement avec une vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ . Dans le cas où l'électron est en mouvement, la distance à parcourir par le second photon est inférieure à celle que doit parcourir le second photon dans le cas où l'électron est au repos.

sur le même front d'onde que le second photon du cas où l'électron est au repos, alors le temps écoulé entre les deux collisions  $\Delta t_{mouv}$  vérifiera l'équation

$$c\Delta t_{mouv} = c\Delta t_{rep} - v \cos \alpha \Delta t_{mouv} \quad (3.16)$$

ce qui donne  $\Delta t_{mouv} = \frac{\Delta t_{rep}}{(1 - \beta \cos \alpha)}$ . L'électron en mouvement aura donc une fréquence de collisions avec les photons qui varie avec l'angle d'incidence des photons telle que le nombre de photon rencontrés par unité de temps lors du mouvement sera  $(1 - \beta \cos \alpha)$  fois plus grand que le nombre de photons rencontrés quand il n'y a pas de mouvement de l'électron. Par exemple, dans le cas d'une collision frontale ( $\alpha = \pi$ ), l'électron aura un nombre de collision  $(1 + \beta)$  fois plus important que quand il est au repos.

La densité de probabilité d'avoir un photon diffusé à l'angle  $\theta'$  est donné par la formule de Klein-Nishina où dans le régime de la diffusion Compton Inverse, la section efficace différentielle se ramène à celle de Thomson

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1} \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega'}(\theta') = \frac{3\sigma_T}{16\pi}(1 + \cos^2 \theta') \quad (3.17)$$

ce qui est la densité de probabilité d'avoir un photon diffusé dans l'angle solide  $d\Omega'$ .

La valeur moyenne du rapport  $\nu_1/\nu_o$  se fait en intégrant sur l'angle solide d'incidence  $d\Omega(\alpha) = \sin \alpha d\alpha d\phi$  et sur l'angle solide de diffusion  $d\Omega'(\theta') = \sin \theta' d\theta' d\phi$ . On a alors

$$\left\langle \frac{\nu_1}{\nu_o} \right\rangle = \frac{\iiint \frac{\nu_1}{\nu_o} (1 - \beta \cos \alpha) \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega'} d\Omega d\Omega'}{\iint (1 - \beta \cos \alpha) d\Omega \times \iint \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega'} d\Omega'} \quad (3.18)$$

Les termes apparaissant au dénominateur sont les intégrales des densités de probabilité servant à normaliser les probabilités. En développant l'expression précédente, nous arrivons à

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\nu_1}{\nu_o} \right\rangle &= \frac{\gamma^2 \iint (1 - \beta \cos \alpha)^2 \sin \alpha d\alpha d\phi \times \iint (1 - \beta \cos \theta')(1 + \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta' d\phi}{4\pi^2 \sigma_T} \quad (3.19) \\ \rightarrow \left\langle \frac{\nu_1}{\nu_o} \right\rangle &= \gamma^2 \left[ \frac{(1 - \beta \cos \alpha)^3}{3\beta} \right]_0^\pi \times \frac{3}{8} \left[ -\cos \theta' - \frac{1}{3} \cos^3 \theta' \right]_0^\pi = \gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta^2}{3} \right) = \frac{4}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'essence même de la diffusion Compton Inverse se trouve résumée ici : en l'absence de mouvement relativiste de l'électron, le gain en énergie moyen sera égal à l'unité alors que pour un électron ultrarelativiste, le gain sera très important car de l'ordre de  $4\gamma^2/3$ .

Le calcul de la puissance moyenne diffusée par un électron se trouve facilement en sachant que la puissance associée au passage de l'électron s'écrit

$$P_{\text{diff}} = \sigma_T c U_{\text{rad}} \times \left( \frac{4}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (3.20)$$

où  $U_{\text{rad}}$  est la densité volumique d'énergie du champ de photon incident. et où  $\sigma_T c$  est le volume balayé par l'électron par unité de temps. Ce volume possède initialement une puissance  $P = \sigma_T c U_{\text{rad}}$ , ce qui fait que pour obtenir la puissance nette de la diffusion Compton Inverse, nous devons soustraire les deux puissances :

$$P_{CI} = P_{\text{diff}} - P = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} (\gamma^2 - 1) = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \beta^2 \gamma^2 \quad (3.21)$$

On peut remarquer que la puissance trouvée par diffusion Compton Inverse a une expression très proche de celle associée au rayonnement synchrotron de ces mêmes électrons soit

$$\frac{P_{CI}}{P_{SYN}} = \frac{U_{\text{rad}}}{U_B} \quad (3.22)$$

La détection du rayonnement dominant au sein d'un environnement astrophysique peut ainsi permettre de contraindre les valeurs des densités d'énergie relatives au champ rayonnement et du champ magnétique.

# 4

## Accélération des rayons cosmiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Données observationnelles des rayons cosmiques</b>	<b>45</b>
4.1.1	Spectre en masse des rayons cosmiques	46
4.1.2	Spectre en énergie des rayons cosmiques	46
4.1.3	Spectre angulaire des rayons cosmiques	48
<b>4.2</b>	<b>Principe de base de l'accélération de Fermi</b>	<b>49</b>
4.2.1	Gain en énergie	49
4.2.2	Structure des chocs astrophysiques non-relativistes	51
4.2.3	Gain moyen d'énergie par cycle	51
4.2.4	Probabilité d'échappement d'une particule	52
4.2.5	Spectre en énergie de l'accélération de Fermi	53
<b>4.3</b>	<b>A la recherche des sources de rayons cosmiques</b>	<b>54</b>

---

Ce dernier chapitre du cours va traiter de la problématique des rayons cosmiques dans l'Univers. Cette problématique appartient au domaine des astroparticules, thème en vogue à l'heure d'aujourd'hui qui se situe au confluent de l'astrophysique des hautes énergies, de la physique des particules et de la physique théorique. Durant le cours je présenterai un rapide historique de cette problématique (voir transparents sur le site web) et les questions qu'elle soulève. Dans la première partie de ces notes de cours, je résume rapidement les principales propriétés observationnelles des rayons cosmiques puis dans la seconde partie je présenterai le mécanisme d'accélération capable de reproduire ces caractéristiques, appelé accélération de Fermi. Dans les deux dernières parties, nous entrerons plus en détail dans les détails de l'accélération en dérivant le spectre en énergie.

### 4.1 Données observationnelles des rayons cosmiques

Le flux de particules de haute énergie venant frapper la Terre est appelé rayons cosmiques. Ce flux de particules a été détecté au début du XXème siècle par Victor Hess qui montra à partir de 1912 que ce flux de particules ionisant l'atmosphère (ce qui impliquait une certaine énergie de ces particules), augmentait avec l'altitude dans l'atmosphère, prouvant l'origine spatiale de ces particules. Après bien des expériences de toutes sortes (mesure en ballon, détection de gerbes de particules au sol, etc...), on est finalement arrivé à déterminer les trois grandes caractéristiques de ce rayonnement.

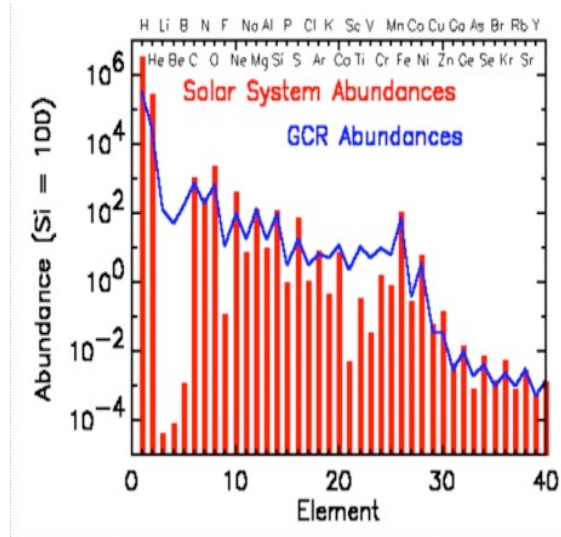


FIGURE 4.1 – Composition relative des noyaux composant les rayons cosmiques. L’histogramme en rouge représente la composition relative des particules formant le vent solaire alors que la ligne bleue représente la composition des rayons cosmiques provenant de l’extérieur du système solaire. La différence de composition de certains éléments vient du fait que ces éléments subissent des réactions de spallation au cours de leur propagation dans l’espace interstellaire modifiant ainsi le ratio entre espèces.

### 4.1.1 Spectre en masse des rayons cosmiques

Dans un premier temps, la compilation de toutes les données expérimentales en provenance des expériences mesurant les rayons cosmiques permet de connaître les abondances relatives de chaque type de particules composant ces rayons cosmiques. La composition est dominée par les noyaux qui représentent 99% en nombre de particules alors que les électrons ne représentent qu’1% du total. Ce spectre peut se décomposer en deux catégories :

- Les rayons cosmiques de basse énergie qui sont dominés par les particules du vent solaire. La composition chimique de cette composante est celle détectée dans le Soleil.
- Les rayons cosmiques de plus haute énergie en provenance de notre galaxie toute entière et même en provenance extra-galactique pour les énergies les plus hautes.

Comme on peut le voir sur la figure (4.1), une différence de composition assez nette peut se voir entre ces deux composantes, essentiellement due aux effets de propagation des particules qui subissent des réactions de spallation pendant les collisions qu’elles expérimentent avec les particules du milieu interstellaire. Néanmoins, même si des différences sont notables, la répartition entre éléments est relativement similaire, ce qui indique que ces rayons cosmiques sont produits au sein d’environnements astrophysiques classiques (étoiles, systèmes stellaire, etc...).

### 4.1.2 Spectre en énergie des rayons cosmiques

La répartition des rayons cosmiques reçus sur Terre suivant l’énergie de chaque particule produit un spectre en énergie assez intrigant (voir figure 4.3). Ce spectre se répartit en trois grandes composantes que nous pouvons situer dans des gammes d’énergie bien précises :

- Les rayons cosmiques en provenance du vent solaire sont principalement détectés grâce à des satellites envoyés dans le système solaire. Cette détection est possible car le flux de parti-

## 4.1. DONNÉES OBSERVATIONNELLES DES RAYONS COSMIQUES

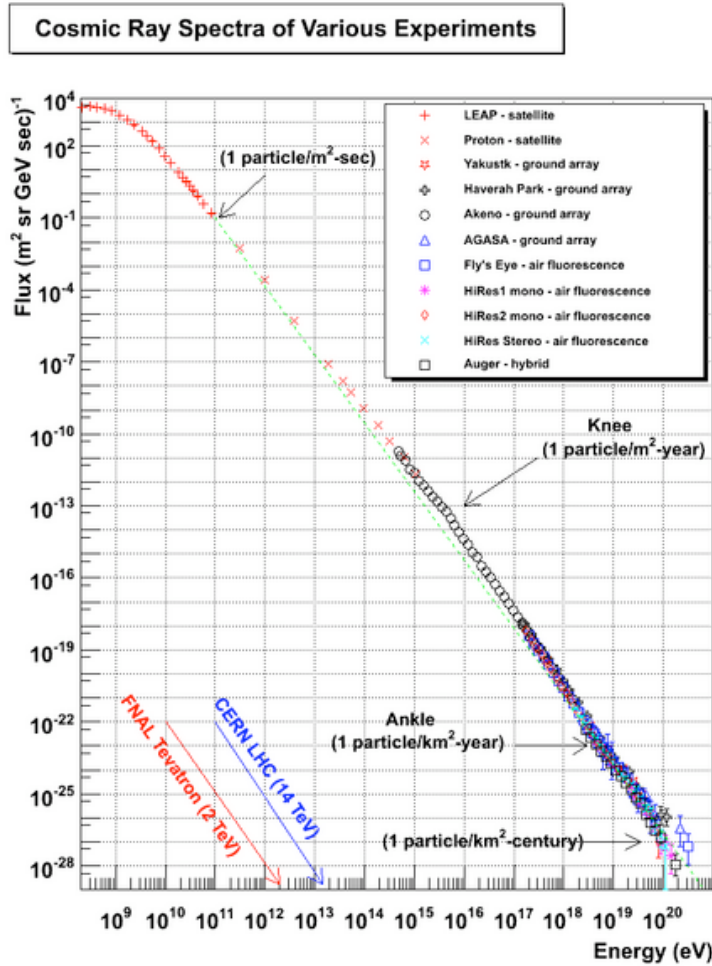


FIGURE 4.2 – Spectre en énergie des rayons cosmiques reçus sur Terre. On note l’existence de trois composantes distinctes : La première est celle de basse énergie provenant principalement du vent solaire. La seconde provient très vraisemblablement des rayons cosmiques produits dans notre galaxie et qui a la forme d’une loi de puissance. Enfin une composante de très haute énergie ayant aussi une forme de loi de puissance qui correspond aux rayons cosmiques extra-galactiques.

cules est important. Ces rayons cosmiques “solaires” se retrouvent dans la gamme d’énergie  $1\text{GeV} \leq E \leq 10\text{GeV}$ . Ces noyaux sont peu relativistes et accélérés au niveau de la couronne solaire ainsi qu’à l’intérieur du vent solaire.

- Les rayons cosmiques produits au sein de notre galaxie au voisinage des ondes de choc associées à des restes de supernova sont la deuxième composante de ce spectre. Le mécanisme d’accélération de ces particules est différent de celui de la composante précédente car le spectre en énergie change de forme pour devenir une loi de puissance telle que  $F(E) \propto E^{-4.67}$  dans la gamme d’énergie  $10\text{GeV} \leq E \leq 5 \times 10^{15}\text{eV}$ . Dans cette gamme d’énergie les particules sont ultrarelativistes et le spectre garde sa cohérence suivant les différents noyaux, ce qui indique que la forme du spectre ne dépend ni de la masse, ni de la charge électrique des noyaux. Le flux de particules commence à être faible dans cette zone du spectre et il devient difficile (mais encore possible) de les détecter par ballons ou par satellites.
- La dernière composante correspond à celle de plus haute énergie. En effet les rayons cos-

miques dont l'énergie se situe dans la gamme  $5 \times 10^{15} eV - 3 \times 10^{19} eV$ , présentent un spectre de même forme que pour la composante précédente à la différence que l'indice de la loi de puissance passe à  $-5.05$ , traduisant peut-être un effet de la propagation dans le milieu intergalactique. On suppose que cette composante est extragalactique principalement parce que l'on ne connaît pas de milieu astrophysique dans notre galaxie capable de donner naissance à des particules ayant de telles énergies. Dans cette gamme d'énergie, le flux de particules est trop faible pour pouvoir être détecté par les moyens précédents. On fait appel ici à des détecteurs de rayons cosmiques au sol couvrant une grande étendue permettant alors de détecter les gerbes de particules engendrées par la collision de ces rayons cosmiques avec l'atmosphère terrestre. A partir des données obtenues sur cette dernière, on peut reconstruire la gerbe en remontant jusqu'aux caractéristiques de la particule primaire de la gerbe.

### 4.1.3 Spectre angulaire des rayons cosmiques

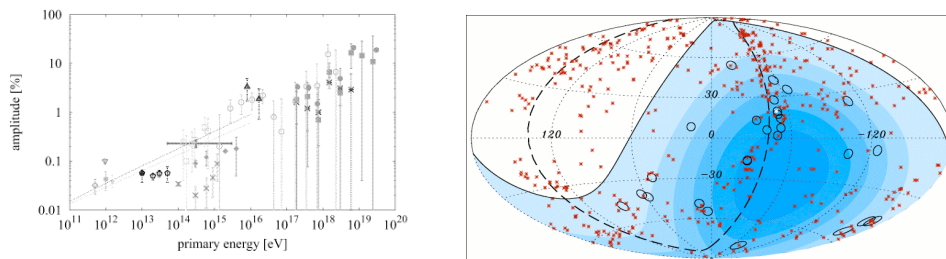


FIGURE 4.3 – Spectre angulaire d'arrivée des rayons cosmiques. A gauche : quantification de l'anisotropie dans les directions d'arrivée des rayons cosmiques en fonction de leur énergie. On peut voir que l'anisotropie est très faible jusqu'aux très hautes énergies ( $E \geq 10^{18} eV$ ). Cette observation traduit ainsi que les rayons cosmiques arrivent de toutes les directions avec des flux similaires. A droite : association des détections des particules de plus haute énergie avec certains noyaux actifs de galaxie.

La mesure de l'anisotropie des directions d'arrivée des rayons cosmiques nous montre que cette anisotropie est très faible pour les énergies inférieures à  $10^{18} eV$ . Au delà de cette énergie, il est difficile de conclure car la statistique du nombre d'événements n'est pas assez grande. L'isotropie des rayons cosmiques semble indiquer que les sources de production de rayons cosmiques sont elles-mêmes réparties de façon uniforme dans notre galaxie. Il est alors probable que les sources soient associées aux étoiles (ou au supernova) qui sont suffisamment nombreuses pour donner naissance à une isotropie du rayonnement cosmique. Il convient néanmoins de modérer cette hypothèse par le fait que dans notre galaxie, il règne un champ magnétique plus ou moins complexe dans tout le milieu interstellaire. La turbulence présente dans ce milieu rend le champ magnétique en partie turbulent, ce qui va provoquer une déflexion de la trajectoire des rayons cosmiques qui sont des particules dotées d'une charge électrique. L'isotropie pourrait alors aussi s'expliquer par la turbulence magnétique qui fait que la trajectoire des rayons cosmiques ne pointe pas directement vers leurs sources.

En résumé, le mécanisme d'accélération des rayons cosmiques doit pouvoir rendre compte des propriétés décrites ici :



- pouvoir accélérer de manière non discriminatoire tous les noyaux quelque soit leur charge électrique.
- pouvoir émettre un spectre d'accélération en énergie qui soit indépendant de la charge électrique et de la masse des noyaux.
- que les lieux d'accélération soient suffisamment nombreux pour pouvoir expliquer l'isotropie d'arrivée des rayons cosmiques.

## 4.2 Principe de base de l'accélération de Fermi

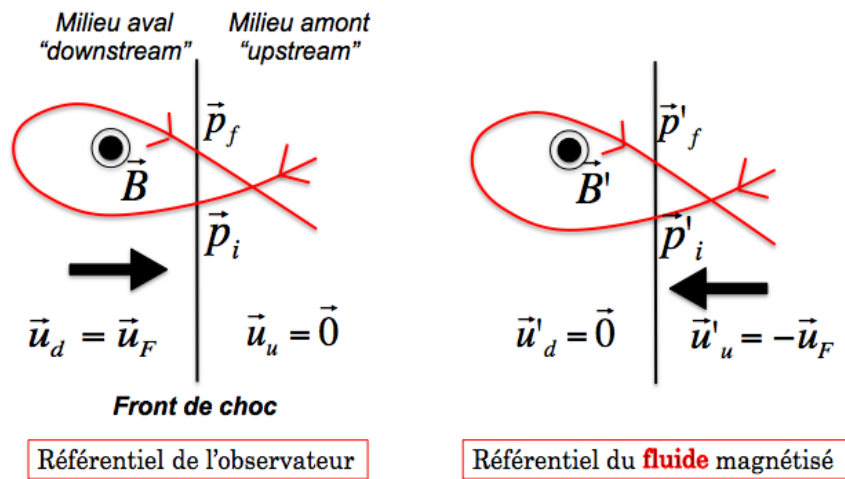


FIGURE 4.4 – Schéma de principe de l'accélération de Fermi : un particule de grande vitesse (par rapport à celle du choc) traverse le front de choc du milieu amont vers le milieu aval où un champ magnétique est advecté avec le fluide. Le champ permet à la particule de retraverser le front de choc pour revenir dans le milieu amont. Dans le référentiel du fluide aval, la déflexion de la particule se fait de façon élastique alors que dans le référentiel de l'observateur, la particule va gagner de l'énergie.

L'accélération de Fermi est un mécanisme qui permet de rendre compte des trois contraintes citées précédemment. L'idée de base de ce mécanisme repose sur l'interaction de particules chargées de grande vitesse avec un choc se propageant dans un fluide astrophysique. Le champ magnétique porté par le fluide induit un champ électromoteur au niveau du front de choc qui permet à une particule chargée de gagner un peu d'énergie cinétique à chaque passage. Après une multitude de passage du milieu amont vers le milieu aval et ainsi de suite... la particule pourra alors avoir une énergie beaucoup plus grande que celle qu'elle avait au départ

### 4.2.1 Gain en énergie

Considérons un fluide portant un champ magnétique qui se propage dans l'espace comme montré sur la figure (4.4). A l'interface entre le fluide et l'espace se trouve le front du choc. Nous considérerons que ce front de choc se déplace selon un axe ( $Ox$ ) avec une vitesse  $u_S \ll c$  car l'immense majorité des chocs astrophysiques est non-relativiste. Dans le référentiel de l'observateur arrive une particule venant de l'espace et allant en direction du front de choc, on appellera  $\vec{p}_i$  sa quantité de mouvement avant qu'elle n'atteigne le front de choc. Quelle sera sa quantité

de mouvement une fois que la particule ressortira du fluide en retraversant le front de choc sous l'action du champ magnétique  $\vec{B}$  ? Pour répondre à cette question il faut remarquer que si l'on se place dans le référentiel propre du fluide se déplaçant avec une vitesse  $u_F$  (et non la vitesse du choc car dans le référentiel du choc, le fluide a une vitesse non nulle), le champ magnétique porté par le fluide devient immobile et stationnaire dans ce référentiel. La seule force s'appliquant alors sur la particule sera la force de Lorentz qui a la particularité de conserver la norme de la quantité de mouvement. Dans ce référentiel  $\mathcal{R}'$  on aura donc  $|\vec{p}'_i| = |\vec{p}'_f|$  (les indices  $i$  et  $f$  indiquent les valeurs initiales et finales). Afin de relier ces grandeurs aux quantités de mouvement dans le référentiel de l'observateur, il faut utiliser la transformation de Lorentz entre les quadrivecteurs énergie-impulsion. En écrivant la transformation de l'énergie du référentiel  $\mathcal{R}$  vers le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on a (on rappelle que  $E/c = pc/v$ )

$$E' = \gamma_F(E - \beta_F p \mu) = \gamma_F \left( \frac{pc}{v} - \beta_F p \mu \right) = \frac{p'c}{v'} \quad (4.1)$$

où  $\gamma_F = (1 - \beta_F^2)^{1/2}$ ,  $\beta_F = u_F/c$ ,  $v$  et  $v'$  sont les normes de la vitesse de la particule dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et où  $\mu$  est le cosinus de l'angle  $\theta$  entre la direction de la vitesse de la particule et la vitesse du choc dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour des chocs non-relativistes, on a  $\gamma_F \simeq 1$ ,  $\beta_F \ll 1$  et la relation entre  $v$  et  $v'$  s'obtient en faisant un développement limité au premier ordre en  $u_F/v$

$$v'^2 = \frac{(v\mu - u_F)^2 + v^2(1 - \mu^2)}{\left(1 - \frac{v\mu u_F}{c^2}\right)^2} \rightarrow v' \simeq v \left(1 - \frac{u_F \mu}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) + O\left(\frac{u_F^2}{v^2}\right) \quad (4.2)$$

En utilisant cette relation dans l'équation de transformation des énergies, on trouve alors un lien entre les quantités de mouvement  $p'$  et  $p$

$$p' \simeq p \left(1 - \frac{u_F \mu}{v}\right) \quad (4.3)$$

Ce lien va nous permettre de quantifier le gain de quantité de mouvement que va acquérir la particule pendant un cycle caractérisé par un passage du milieu amont vers le milieu aval puis repasser vers le milieu amont. Durant ce passage, la quantité de mouvement de la particule restera inchangée dans  $\mathcal{R}'$  car seule la force de Lorentz s'appliquera sur la particule. Si on appelle  $\mu_i$  et  $\mu_f$  les cosinus des angles au moment des deux passages du front de choc ( $\theta_i \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  et  $\theta_f \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ), on peut écrire que

$$p'_i = p_i \left(1 - \frac{u_F \mu_i}{v}\right) = p'_f = p_f \left(1 - \frac{u_F \mu_f}{v}\right) \quad (4.4)$$

où l'on a supposé que la vitesse (ainsi que la quantité de mouvement) de la particule supra-thermique variait très peu lors d'un cycle de traversée. On obtient alors ainsi que

$$\Delta p = p_f - p_i = \frac{u_F}{v} p_i (\mu_f - \mu_i) \geq 0 \quad (4.5)$$

car les valeurs des cosinus sont telles que  $-1 \leq \mu_i \leq 0$  et  $0 \leq \mu_f \leq 1$ . On peut voir que  $\Delta p/p_i \ll 1$ , ce qui justifie à posteriori notre hypothèse. Ainsi un cycle de deux traversées du front de choc induit un gain en énergie cinétique pour la particule. Il ne reste plus à la particule qu'à accomplir un grand nombre de cycles pour pouvoir accéder à de très hautes énergies.

### 4.2.2 Structure des chocs astrophysiques non-relativistes

Une onde de choc se propageant dans un fluide astrophysique peut être décrit par les lois de l'hydrodynamique. Ces lois traduisent la conservation des grandeurs fondamentales de la physique que sont la masse, la quantité de mouvement et l'énergie portées par le fluide. Afin de déterminer les caractéristiques des milieux amont et aval au choc, nous devons utiliser les relations de conservations entre les deux milieux. Ces relations sont connues sous le nom de relations de Rankine-Hugoniot et s'expriment dans le référentiel du choc  $\tilde{\mathcal{R}}$  comme

$$\begin{cases} \rho_u \tilde{u}_u = \rho_d \tilde{u}_d \\ \rho_u \tilde{u}_u^2 + P_u = \rho_d \tilde{u}_d^2 + P_d \\ \frac{\rho_u \tilde{u}_u^2}{2} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P_u = \frac{\rho_d \tilde{u}_d^2}{2} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P_d \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $\rho$  désigne la densité de masse,  $\tilde{u}$  la vitesse du milieu dans le référentiel du choc,  $P$  la pression thermique dans le milieu et  $\Gamma = C_P/C_V$  est le rapport des chaleurs spécifiques du fluide. L'indice  $u$  marque les grandeurs estimées dans le milieu amont du choc ("upstream") alors que l'indice  $d$  désigne des grandeurs estimées dans le milieu aval ("downstream"). Ces relations ne sont valides que dans le référentiel où le choc est stationnaire, i.e. dans le référentiel propre du choc  $\tilde{\mathcal{R}}$  se déplaçant avec une vitesse  $u_S$  dans le référentiel de l'observateur.

En retravaillant ces relations, on arrive à montrer que le rapport entre les vitesses des deux milieux est tel que

$$\frac{\tilde{u}_u}{\tilde{u}_d} = r = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1 + \frac{2}{M_u^2}} > 1 \quad (4.7)$$

où  $r$  est appelé rapport de compression et  $M_u^2 = \tilde{u}_u^2 \rho_u / \Gamma P_u$  est le carré du nombre de Mach sonique du milieu amont dans le référentiel du choc. Quelle est la relation entre les vitesses  $\tilde{u}_u$ ,  $\tilde{u}_d$  et la vitesse du fluide  $u_F$ ? La réponse s'obtient en considérant le choc dans le référentiel de l'observateur. Dans ce référentiel, le fluide aval possède une vitesse  $u_F$  alors que le milieu amont est au repos et a donc une vitesse nulle. La différence de vitesse entre le milieu amont et le milieu aval sera égale à  $-u_F$ . Dans le référentiel du choc, la différence de vitesse entre les deux milieux est identique car la transformation de Galilée conserve les différences de vitesses. Ainsi on peut voir que  $\tilde{u}_u - \tilde{u}_d = -u_F$  où les vitesses  $u'$  sont négatives dans le référentiel du choc. Pour plus de commodité nous noterons par la suite la norme des vitesses  $u'$  pour que  $\tilde{U}_u = |\tilde{u}_u|$  et  $\tilde{U}_d = |\tilde{u}_d|$ . Nous aurons ainsi le gain en quantité de mouvement d'une particule supra-thermique lors d'un cycle de Fermi qui pourra s'exprimer comme

$$\Delta p = \frac{\tilde{U}_u - \tilde{U}_d}{v} p_i(\mu_f - \mu_i) = \frac{\tilde{U}_d(r - 1)}{v} p_i(\mu_f - \mu_i) \quad (4.8)$$

### 4.2.3 Gain moyen d'énergie par cycle

La dernière relation nous donne le gain net en quantité de mouvement acquis par une particule lors d'un cycle de Fermi. Ce gain dépend encore de la valeur des angles de traversée du choc. Pour connaître le gain moyen par cycle, il nous faut donc faire la moyenne de ce gain en prenant en compte le flux de particules en fonction de l'angle d'incidence. Si on considère que les particules arrivent de façon isotrope avec une vitesse  $v$  sur le front de choc, le flux de particule traversant ce front de choc sera alors  $2\pi n v \mu d\mu$  où  $n$  est la densité des particules au niveau du front de choc. Le

calcul de la valeur moyenne donne alors

$$\left\langle \frac{\Delta p}{p} \right\rangle = \frac{\tilde{U}_d(r-1)}{v} (\langle \mu_f \rangle - \langle \mu_i \rangle) \quad (4.9)$$

La valeur moyenne des cosinus sera déterminée par

$$\langle \mu_f \rangle = \frac{\int_0^1 nv\mu_f^2 d\mu_f}{\int_0^1 nv\mu_f d\mu_f} = \frac{2}{3} \quad (4.10)$$

On montre facilement que l'on aura  $\langle \mu_i \rangle = -\langle \mu_f \rangle$ . Le gain moyen par cycle pour une particule de vitesse  $v$  sera alors

$$\left\langle \frac{\Delta p}{p} \right\rangle = \frac{4\tilde{U}_d(r-1)}{3v} \quad (4.11)$$

#### 4.2.4 Probabilité d'échappement d'une particule

Afin de déterminer la forme du spectre d'accélération de Fermi, il nous reste à estimer la quantité de particules qui s'enfuient à chaque cycle. Ce nombre nous sera donné par la probabilité d'échappement  $\eta$  qu'une particule faisant un cycle de Fermi s'échappe et ne revienne jamais au front de choc. La difficulté pour évaluer cette probabilité provient du fait que dans le milieu aval (ainsi que dans le milieu amont), la présence du choc et des particules supra-thermiques a pour effet de déstabiliser le champ magnétique local et ainsi de générer de la turbulence magnétique. Cette turbulence ainsi que ses propriétés sont encore mal connues et il est difficile de quantifier le déplacement d'une particule chargée au travers d'un champ magnétique turbulent. Nous ne disposons alors que d'outils de probabilité qui nous donnent des densités de probabilité de présence d'une particule à un instant  $t$  sachant que la particule était à la position  $x_o$  au temps  $t_o$ . Le mouvement de marche aléatoire des particules est semblable à un mouvement Brownien et engendre un comportement diffusif pour ces particules. Ainsi, on montre que pour ces déplacements, la densité de probabilité de présence d'une particule en  $x$  à l'instant  $t$  sachant qu'elle était en  $x_o$  au temps  $t_o$  est donné par

$$\frac{\partial Pr}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-t_o)}} \exp\left(-\frac{(x-x_o)^2}{2D(t-t_o)}\right) \quad (4.12)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion spatial défini par  $D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta x^2 \rangle / 2\Delta t$ . En théorie cinétique, on peut utiliser ce coefficient de diffusion spatial pour décrire statistiquement l'évolution temporelle de la distribution des particules. Ainsi on peut dériver à partir de l'équation de Boltzmann, une équation d'évolution de la fonction de distribution de ces particules appelée équation de Fokker-Planck qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.13)$$

où  $u$  est la vitesse du fluide dans le milieu considéré. Dans le référentiel du choc, les fluides ainsi que le choc sont stationnaires et ne doivent donc engendrer qu'une fonction de distribution stationnaire ( $\partial f / \partial t = 0$ ). L'équation de Fokker-Planck se résoud alors en posant que  $f(x=0) = f_{SH}$  où  $x=0$  est la position du choc ( $x < 0$  est le milieu aval et  $x > 0$  est le milieu amont). La solution de l'équation est alors

$$\begin{cases} f(x) = f_{SH} & x < 0 \\ f(x) = f_{SH} \exp\left(-\int_0^x \frac{\tilde{U}_u}{D_u} dx'\right) & x > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Comme on peut le voir, le processus stationnaire d'accélération donne une densité de particules  $f_{SH}$  supra-thermiques constante dans le milieu aval. Ceci est important car c'est dans le milieu aval que les pertes de particules peuvent se produire. Pour estimer ces pertes il faut estimer la quantité de particules qui resteront dans le milieu aval sans retourner au choc pour subir de nouveaux cycles de Fermi. Dans le référentiel du choc, nous verrons la frontière du milieu aval s'éloigner de nous à une vitesse  $\tilde{U}_d$ , ce qui implique qu'à chaque instant le milieu aval reçoit  $n_{SH}S\tilde{U}_d$  particules en plus pour peupler ce milieu aval qui ne cesse de s'étendre ( $S$  est la surface du front de choc). Ces particules qui viennent peupler le milieu aval seront donc perdues pour l'accélération. Afin de déterminer la probabilité qu'une particule en franchissant le front de choc ne revienne jamais au choc, on va former le rapport entre ce nombre de particules et le nombre total de particules qui franchissent le front de choc (du milieu amont vers le milieu aval) à chaque instant. Si  $n_{SH}$  est la densité de particule au front de choc et  $S$  la surface du front de choc, alors le nombre de particules qui entrent dans le milieu aval par unité de temps sera

$$\frac{2\pi \int_0^1 n_{SH} S v \mu d\mu}{2\pi \int_{-1}^1 d\mu} = \frac{n_{SH} v S}{4} \quad (4.15)$$

La probabilité d'échappement  $\eta$  sera ainsi  $\eta = 4\tilde{U}_d/v \ll 1$ . On peut constater que pendant un cycle de Fermi, peu de particules quitteront le processus d'accélération.

#### 4.2.5 Spectre en énergie de l'accélération de Fermi

Nous connaissons à présent le gain moyen de quantité de mouvement acquis par une particule pendant un cycle de Fermi ainsi que la probabilité que cette particule enchaîne un autre cycle. Nous pouvons alors déterminer la forme du spectre en énergie de ce processus. Imaginons qu'une particule arrive sur le choc avec une quantité de mouvement  $p_o$  et interagit avec le choc pendant  $n$  cycles de Fermi. La quantité de mouvement de cette particule sera alors

$$p_n = p_o \left(1 + \frac{4\tilde{U}_d(r-1)}{3v_o}\right) \left(1 + \frac{4\tilde{U}_d(r-1)}{3v_1}\right) \cdots = p_o \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{4\tilde{U}_d(r-1)}{3v_k}\right) \quad (4.16)$$

La probabilité que la particule soit encore en interaction avec le choc se détermine de la même façon

$$Pr_n = \left(1 - \frac{4\tilde{U}_d}{v_o}\right) \left(1 - \frac{4\tilde{U}_d}{v_1}\right) \cdots = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{4\tilde{U}_d}{v_k}\right) \quad (4.17)$$

Cela veut dire que si nous considérons un grand nombre de particules  $N_o$  initialement alors il restera  $Pr_n N_o$  particules après  $n$  cycles de Fermi. Nous pouvons montrer qu'il existe un lien entre la probabilité  $Pr_n$  et la quantité de mouvement associée  $p_n$  en formant le rapport du logarithme de ces deux grandeurs

$$\frac{\ln Pr_n}{\ln p_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \eta_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{r-1}{3}\eta_k\right)} \simeq -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \eta_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{r-1}{3}\eta_k} = -\frac{3}{r-1} \quad (4.18)$$

où  $\eta_k \ll 1$  est la probabilité d'échappement d'une particule pendant un cycle de Fermi. On voit alors que la probabilité  $Pr_n$  peut s'exprimer en fonction de la quantité de mouvement comme

$$Pr_n \propto p_n^{-3/(r-1)} \Rightarrow N_n = N_o \left( \frac{p_n}{p_o} \right)^{-3/(r-1)} \quad (4.19)$$

Il ne reste qu'une étape à franchir pour arriver à la fonction de distribution des particules  $f_{SH}$  au niveau du choc, c'est celle qui consiste à voir que la quantité de particule de quantité de mouvement comprise entre  $p$  et  $p + dp$  présent au choc est donnée par  $2\pi p^2 f_{SH}(p) dp = dN(p)$ . Nous connaissons l'expression de  $N(p)$  et nous en déduisons que

$$2\pi p^2 f_{SH}(p) = \frac{dN(p)}{dp} = N_o \left( \frac{p}{p_o} \right)^{-(r+2)/(r-1)} \rightarrow f_{SH}(p) \propto N_o \left( \frac{p}{p_o} \right)^{-3r/(r-1)} \quad (4.20)$$

Le spectre en énergie de l'accélération de Fermi est donc une loi de puissance dont l'indice ne dépend que du rapport de compression du choc qui porte cette accélération. Les chocs astrophysiques sont majoritairement non-relativistes et composés de gaz monoatomique d'hydrogène et d'hélium. Le facteur  $\Gamma$  est identique pour tous les gaz monoatomiques est sa valeur est égal à  $5/3$ , ce qui implique que  $r = 4$  pour tous les chocs astrophysiques non-relativistes. Un spectre en loi de puissance d'exposant  $-3r/(r-1) = -4$  sera donc universellement produit de toutes sortes de sources comportant de tels chocs (principalement les supernova dans notre galaxie). En comparant avec le spectre observé des rayons cosmiques, on voit que le spectre prédit est assez proche de celui qui est détecté. La différence d'exposant provient probablement de l'action du milieu entre les sources et nous qui a tendance à atténuer le spectre en modifiant voire en neutralisant certains des rayons cosmiques produits.

### 4.3 A la recherche des sources de rayons cosmiques

La complexité du problème de l'origine des rayons cosmiques provient du fait que ces particules sont électriquement chargées et donc sont soumises à des effets de propagation car le champ magnétique présent dans les espaces interstellaires ou extragalactiques modifie profondément la trajectoire de ces particules qui ne pointent donc plus vers leur sources. Afin de répertorier les sources possibles d'accélération de ces particules, un critère a été proposé par Hillas en 1984 pour estimer les capacités d'accélération d'un objet astrophysique. Ce critère consiste à prendre en compte le champ électromoteur présent dans le fluide magnétisé se propageant dans l'espace. Si le fluide a une vitesse  $U$ , un champ magnétique moyen  $B$  et une taille caractéristique  $L$ , on aura alors une énergie maximale pour une particule de charge  $Ze$

$$E_{\max} = \gamma \frac{ZeUBL}{c} \quad (4.21)$$

où  $\gamma = (1 - U^2/c^2)^{-1/2}$  est le facteur de Lorentz du fluide. En effet si le fluide (et l'onde de choc associée) se déplace avec une vitesse proche de celle de la lumière, le champ électrique perçu par les particules dans le référentiel du choc sera amplifié par ce facteur de Lorentz.

On peut ainsi placer sur un diagramme dit de Hillas les différents candidats à la création des rayons cosmiques en fonction de leurs propriétés (voir figure 4.5) comme leurs tailles et leurs champ magnétiques. La question principale porte sur l'origine des rayons cosmiques les plus énergétiques détectés sur Terre. En effet pour pouvoir expliquer comment des particules d'énergie typique de  $10^{20} eV$  peuvent être produites, deux types de scénarii ont été proposés. La première

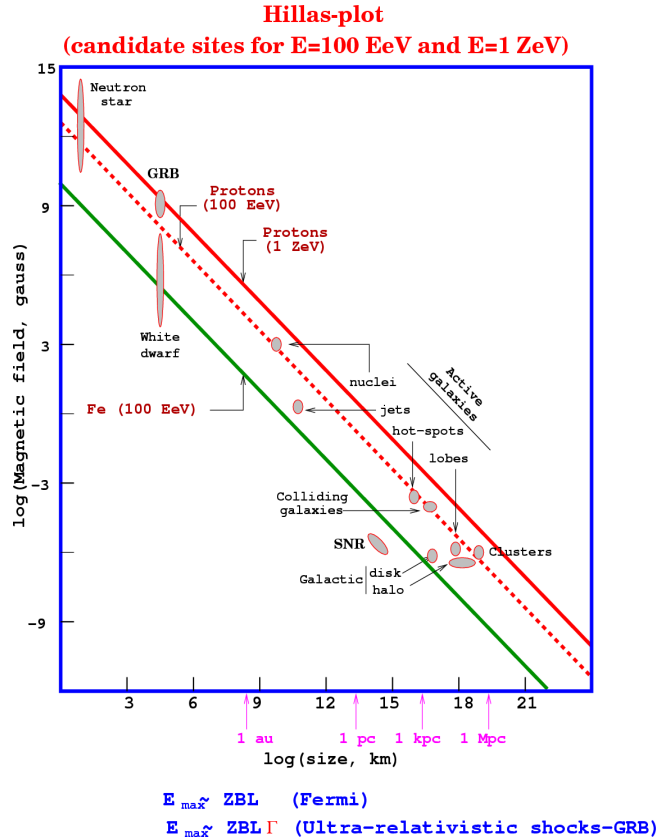


FIGURE 4.5 – Diagramme de Hillas : On répartit les sources potentielles de rayons cosmique selon un diagramme avec leur taille en fonction de leur champ magnétique. Ceci permet de voir quelles sources pourraient être les génitrices des particules d’ultra haute énergie.

classe de scénarii rassemble les mécanismes d’accélération transformant certaines particules du plasma astrophysique en rayons cosmiques (le mécanisme de Fermi fait partie de cette classe). La seconde classe est constituée des mécanismes dits “Top-down” où la désintégration de particules supermassives (d’énergie  $E \sim 10^{25} eV$ ) issues de la supersymétrie pourraient donner naissance aux rayons de plus haute énergie.

Jusqu’à ces dernières années, il n’y avait pas d’argument expérimental permettant de savoir quelle classe de mécanisme est à l’oeuvre pour la production de ces particules. Un fait nouveau est néanmoins apparu, permettant de confirmer que c’est la première classe de scénarii qui est la bonne. Ce fait est l’observation d’une coupure dite “GZK” (Greisen, Zatsepin et Kuzmin l’ont postulée en 1966), qui doit apparaître sur le spectre de rayons cosmiques s’ils sont accélérés loin de la Terre et constitués de noyaux atomiques (pas de photon, neutrinos ou d’électrons comme postulé dans les scénarii Top-down). Cette coupure vient du fait que l’Univers baigne dans un rayonnement cosmologique de basse énergie et que les protons peuvent interagir avec des photons de très haute énergie pour créer des particules transitoires, i.e. des pions chargés ou neutres. Le bilan de cette interaction s’écrit

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{2/3} p + \pi^0 \rightarrow p + \gamma + \gamma \\
 p + \gamma & \rightarrow \Delta \\
 & \xrightarrow{1/3} n + \pi^+
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

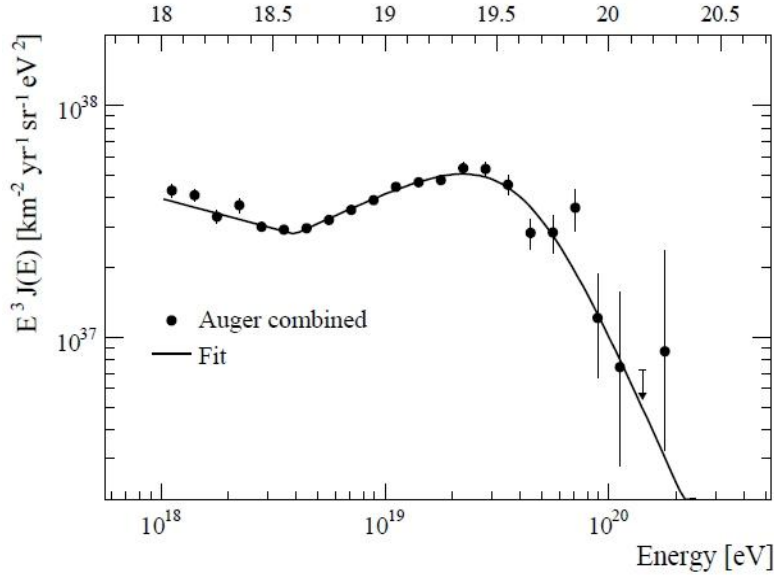


FIGURE 4.6 – Spectre en énergie des rayons cosmique de ultra haute énergie détectés par l’observatoire Auger. Le spectre est parfaitement compatible avec la prédiction d’une coupure des rayons cosmiques due à la présence de photons du CNC (coupure GZK). Cette observation montre que ces rayons cosmiques sont produits loin de notre galaxie, ce qui discrédite les modèles de désintégration de superparticules (crédits observatoire Pierre Auger).

Les photons du CNC ne sont pas des photons de haute énergie mais si le proton lui possède une grande énergie, i.e. possède un facteur de Lorentz très supérieur à l’unité, alors dans le référentiel du proton, le photon sera perçu comme un photon de haute énergie. Pour déterminer l’énergie de seuil des protons pour réaliser cette réaction, il nous faut faire les bilans d’énergie et de quantité de mouvement en nous plaçant dans la situation la plus favorable. Cette situation est celle où le pion produit par la réaction se retrouve au repos après l’interaction frontale du proton et du photon. Cette configuration est la moins exigeante du point de vue énergétique. La conservation de l’énergie de cette réaction nous donne

$$E_{GZK} + h\nu = (m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2)^{1/2} + m_\pi c^2 \quad (4.23)$$

où  $E_{GZK}$  est l’énergie du proton incident,  $\nu$  la fréquence du photon et  $p_p$  la quantité de mouvement restante au proton après la collision. La conservation de la quantité de mouvement totale nous donne une seconde relation

$$(E_{GZK}^2 - m_p^2 c^4)^{1/2} - h\nu = p_p c \quad (4.24)$$

Pour obtenir l’énergie de seuil de cette réaction il nous faut soustraire les deux relations obtenues préalablement élevées au carré. Cette différence donne

$$2E_{GZK} h\nu + 2h\nu (E_{GZK}^2 - m_p^2 c^4)^{1/2} = m_\pi^2 c^4 + m_\pi c^2 (2m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2)^{1/2} \quad (4.25)$$

L’énergie des photons du CNC est typiquement de l’ordre de  $10^{-3} eV$ , ce qui nous laisse supposer que  $E_{GZK} \gg m_p c^2$  et nous permet de faire un developpement limité du membre de gauche

$$4E_{GZK} h\nu \left( 1 - \frac{m_p^2 c^4}{2E_{GZK}^2} \right) \simeq m_\pi c^2 (m_\pi c^2 + (2m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2)^{1/2}) \geq m_\pi c^2 (m_\pi c^2 + 2m_p c^2) \quad (4.26)$$



### 4.3. A LA RECHERCHE DES SOURCES DE RAYONS COSMIQUES

L'énergie de seuil pour que la coupure GZK puisse s'appliquer sur un rayon cosmique sera ainsi

$$E_{GZK} \geq \frac{m_{\pi}c^2}{4h\nu}(m_{\pi}c^2 + 2m_p c^2) \quad (4.27)$$

L'énergie de masse d'un pion est de  $m_{\pi}c^2 \simeq 135 \text{ MeV}$ , ce qui amène à un seuil de la coupure GZK à quelques  $10^{19} \text{ eV}$ . La section efficace d'interaction de tels protons avec des photons du CNC est très petite, ce qui a pour effet que la distance moyenne sur laquelle de tels protons seront tous transformés en particules de plus basse énergie est de l'ordre d'une centaine de  $Mpc$ .

L'observatoire Pierre Auger basé en Argentine a pu observer grâce à sa grande couverture spatiale ce domaine d'énergie du spectre et a montré en 2007 que le spectre de rayons cosmique était bien compatible avec la présence d'une coupure GZK au delà de  $3 \times 10^{19} \text{ eV}$  (voir figure 4.6). Ceci prouve donc que les particules de ultra haute énergie sont générées dans des environnements astrophysiques lointains comme prédit par les mécanismes d'accélération de Fermi (ex : noyaux actifs de galaxie ou sursauts gamma).

De nombreuses questions restent encore ouvertes à l'heure actuelle en ce qui concerne la problématique des rayons cosmiques :

- Quelles sont les sources qui contribuent à l'ensemble du spectre ?
- Comment expliquer les différentes cassures du spectre aux domaines de transitions entre sources et comment se fait-il que le spectre soit continu ?
- L'isotropie du rayonnement cosmique est-elle vérifiée pour les ultra hautes énergie ?
- Comment fonctionne l'accélération de Fermi pour les ondes de choc ultra-relativistes ?
- etc ...