

UNIVERSITÉ PARIS CITÉ

FACULTÉ DES SCIENCES – UFR DE PHYSIQUE

Introduction à la Physique des Plasmas

Fabien Casse

Laboratoire Astroparticule & Cosmologie (APC)

UMR 7164 Université de Paris - CNRS

MASTER 1 "PHYSIQUE FONDAMENTALE ET APPLIQUÉE"

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023



Université Paris Cité

Table des matières

1	Classification et caractérisation des plasmas	5
1.1	Mécanismes d'ionisation d'un gaz	5
1.2	Caractérisation d'un plasma - diagramme densité-température	6
1.2.1	Longueurs caractéristiques d'un plasma	6
1.2.2	Diagramme densité-température	10
1.3	Sphère de Debye dans les plasmas classiques non-corrélés	12
1.3.1	Le "petit" paramètre du plasma	13
1.3.2	Fréquence de déflexion des particules	15
1.3.3	Oscillations électroniques de Langmuir	18
2	Ondes dans les plasmas	21
2.1	Ondes dans les plasmas non-magnétisés	21
2.1.1	Ondes de Langmuir	22
2.1.2	Ondes électromagnétiques dans les plasmas non-magnétisés	23
2.2	Ondes électromagnétiques dans les plasmas magnétisés	24
2.2.1	Equations de Maxwell dans les milieux anisotropes	25
2.2.2	Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes	26
2.2.3	Ondes EM parallèles au champ magnétique	28
3	Introduction à la MagnétoHydroDynamique	35
3.1	Equations cinétiques de Vlasov	35
3.2	La MHD : validité et équations de conservation	37
3.2.1	Domaine de validité de la MHD : Hypothèses	38
3.2.2	Equations de conservation de la MHD multi-fluides	39
3.2.3	Le modèle MHD à un fluide	41
3.3	Ondes MHD	43

Classification et caractérisation des plasmas

Sommaire

1.1	Mécanismes d'ionisation d'un gaz	5
1.2	Caractérisation d'un plasma - diagramme densité-température	6
1.2.1	Longueurs caractéristiques d'un plasma	6
1.2.2	Diagramme densité-température	10
1.3	Sphère de Debye dans les plasmas classiques non-corrélés	12
1.3.1	Le "petit" paramètre du plasma	13
1.3.2	Fréquence de déflexion des particules	15
1.3.3	Oscillations électroniques de Langmuir	18

Il est commun en physique de dénommer le quatrième état de la matière par le terme plasma. Ce nom provient d'une similitude d'aspect entre le gaz chaud composant la couronne solaire et le plasma sanguin ou des cellules sont observables à petite échelle. Cet état de la matière constitue l'état de près de 99% de la matière observable dans l'Univers, ce qui suggère que différents phénomènes physiques peuvent transformer un gaz en plasma. Le système de particules constituant un atome se compose d'un noyau, porteur d'une charge électrique positive, et d'un nuage d'électrons, porteurs de charges électrique négatives. Ce système est lié énergiquement, ce qui empêche les électrons de quitter le voisinage du noyau. Dans un gaz non-ionisé, l'ensemble des atomes (et des molécules) sont électriquement neutres, ce qui rend ainsi le gaz neutre et insensible à la présence d'un champ électromagnétique (en supposant que ce dernier n'a pas une intensité trop forte). Afin de permettre à certains des électrons de pouvoir se libérer de l'attraction électrostatique du noyau, un processus d'ionisation doit transférer de l'énergie à l'électron afin que ce dernier acquière une énergie cinétique suffisante pour se libérer.

1.1 Mécanismes d'ionisation d'un gaz

Parmi tous les processus physiques pouvant accomplir ce type de transfert d'énergie, les trois principaux sont l'agitation thermique, la photo-ionisation et la cascade électronique. Chacun de ces processus possède une origine différentes mais peuvent se produire au même moment, l'un n'étant pas exclusif des autres.

- Agitation thermique : Sous ce terme on décrit la quantité d'énergie cinétique moyenne d'un gaz en équilibre thermodynamique à l'intérieur duquel les atomes collisionnent entre eux à une fréquence qui dépend de la température du gaz. Quand la température du gaz est suffisamment élevée, les collisions entre atomes et molécules peuvent transférer de l'énergie cinétique à des électrons peuplant les couches électroniques les moins liées de telle façon

que ces derniers se libèrent de l'atome. A ce stade, le gaz se transforme alors en un plasma où cohabite des espèces neutres, des cations ainsi que des électrons libres. Afin qu'un tel phénomène se produise à grande échelle dans le gaz, il est important de noter que l'énergie cinétique moyenne des constituants du gaz doit généralement être de beaucoup supérieure à l'énergie d'ionisation des atomes.

- Photo-ionisation : Ce mécanisme décrit l'absorption par des atomes de photons provenant d'une source de rayonnement à l'intérieur ou à l'extérieur du gaz. Les éléments de l'atome permettant ce mécanisme sont les électrons qui ont une plus grande efficacité à capter et émettre des photons. Ainsi si un rayonnement de suffisamment haute énergie vient traverser un gaz, certains électrons composant le nuage électronique des atomes vont avoir suffisamment d'énergie pour se libérer et se propager librement dans le plasma. Un exemple simple provient de la photo-ionisation de l'hydrogène dont l'énergie de liaison de son électron est de 13.6 eV . En calculant la longueur d'onde des photons ayant cette énergie, on trouve aisément que ceux-ci appartiennent aux ultra-violets puisque $\lambda = 0.34 \mu\text{m}$. La lumière solaire, ou plutôt sa composante de plus haute énergie, sont capable d'ioniser certains atomes d'hydrogène contenus dans les molécules d'eau de l'atmosphère.
- Cascade électronique : Ce processus physique est engendré par l'application d'un champ électrique intense à travers un gaz. Si dans ce gaz quelques électrons sont libres (statistiquement il y a toujours une très petite quantité d'électrons libres en vertu de la distribution de Maxwell-Boltzmann) alors ceux-ci sont fortement accélérés par le champ électrique. Ces électrons acquièrent ainsi une très grande énergie cinétique qui permet d'arracher des électrons des atomes du gaz lors de collisions (ou d'interactions électrostatiques). Les électrons arrachés deviennent à leur tour des projectiles qui vont arracher d'autres électrons et ainsi de suite. Il se forme alors ce que l'on nomme une cascade électronique qui donne naissance à un plasma. Celui-ci disparaît une fois le champ électrique disparu car les particules accélérées vont rayonner l'énergie acquise et ensuite être capturés par les cations du plasma. Un exemple typique de ce phénomène est celui de la foudre où un champ électrique énorme est généré par friction entre des masses d'air, ce qui a pour effet de créer une décharge électrique brillante très intense mais très brève signant le retour à l'équilibre du gaz.

1.2 Caractérisation d'un plasma - diagramme densité-température

Afin de caractériser l'état d'un plasma, il est indispensable de pouvoir identifier dans quel cadre de description nous pouvons les caractériser. Ainsi nous devons pouvoir identifier si un plasma est soumis à une description classique ou quantique, si ses constituants ont une dynamique relativiste ou s'ils sont dominés par les forces électrostatiques. Une façon de pouvoir évaluer ses différents aspects consiste à comparer les longueurs caractéristiques de chaque phénomène et ainsi de pouvoir identifier la notre du plasma.

1.2.1 Longueurs caractéristiques d'un plasma

Dans cette sous-section nous allons rappeler les différentes longueurs caractéristiques puis dans la section suivante nous verrons comment définir l'espace de paramètres dans lequel se trouve les plasmas classiques qui constitue le sujet de ce cours.

Distance au plus proche voisin

Cette distance correspond à la distance moyenne entre deux particules du plasma. Comme nous pouvons l'appréhender, ce concept est directement lié à la densité volumique du plasma. Plus celle-ci sera élevée et plus la distance entre particules sera faible. Si on note n la densité volumique de particules, alors n aura les dimensions de l'inverse d'un volume. Si on représente chaque particule comme ayant une boîte de volume d^3 autour d'elle délimitant son espace propre, alors on peut définir la distance au plus proche voisin comme

$$d \sim n^{-1/3} \quad (1.1)$$

où n s'exprime comme l'inverse d'un volume.

Longueur de de Broglie

La longueur de de Broglie correspond à la longueur d'onde associée à une particule animée d'une quantité de mouvement dont l'origine est l'agitation thermique. En mécanique quantique une particule possédant une quantité de mouvement de norme p possède une énergie $E = pc = hc/\lambda_t$ où λ_t est appelé longueur de de Broglie, h est la constante de Planck et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ainsi dans le cas d'une particule non-relativiste de masse m , la longueur de de Broglie s'écrit

$$\lambda_t = \frac{h}{mv_o} = \frac{h}{\sqrt{mk_B T}} \quad (1.2)$$

où v_o est la vitesse moyenne des particules de température T . Leur énergie cinétique étant de l'ordre de $k_B T$ en moyenne (k_B est la constante de Boltzmann), on a alors $v_o = \sqrt{k_B T/m}$ ce qui amène l'expression ci-dessus. La longueur de de Broglie est ainsi un outil intéressant pour savoir si parmi les particules qui composent le plasma, nous pouvons les distinguer des autres en délimitant la taille du paquet d'onde associé.

Longueur de Landau

La longueur de Landau est la distance qui caractérise l'équilibre entre l'énergie électrostatique entre particules et l'énergie cinétique d'agitation thermique de ces particules. Si on égalise l'énergie potentielle électrostatique à l'énergie cinétique des particules de charge q , on obtient

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o r_o} = k_B T \quad (1.3)$$

où r_o est la longueur de Landau. Sa définition est immédiate et s'exprime comme

$$r_o = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o k_B T} \quad (1.4)$$

Si deux particules de charge électrique opposée s'approchent à une distance inférieure à la distance de Landau sous l'effet de l'agitation thermique, alors elles formeront un système d'énergie lié (énergie mécanique négative!) et resteront corrélées spatialement.

Libre parcours moyen

La distance de libre parcours moyen d'une particule l_{pm} symbolise la distance moyenne sur laquelle une particule peut se propager sans rencontrer une autre particule composant le plasma. Au-delà de cette distance, toute particule subira des déflexions de trajectoires (collisions ou déflexions électrostatiques) et se retrouvera en équilibre thermique avec le plasma. Si on considère un plasma standard composé de noyau atomique et d'électrons, les plus gros obstacles seront les noyaux atomiques dont la section efficace de collision est supérieur mais de l'ordre de la section efficace de Thomson σ_T d'un proton. Le libre parcours moyen est alors

$$l_{pm} \sim \frac{1}{\sigma_T n} \quad (1.5)$$

où n est la densité volumique de noyaux. Ainsi plus le plasma est dense et plus l_{pm} est petit car la densité d'obstacles augmente.

Longueur de Debye

Au sein d'un plasma, plusieurs espèces chimiques se propagent avec chacune une charge électrique propre. Ainsi ce mouvement incessant de charge limite la portée de l'interaction électrostatique générée par une particule donnée. Pour estimer la portée du potentiel électrostatique d'une particule, nous allons dans un premier temps estimer la distribution spatiale des particules de chaque espèce autour de la particule considérée. Si on note $\Phi(r)$ le potentiel électrostatique engendrée par notre particule alors l'espèce chimique a de charge q_a aura une énergie potentielle $q_a \Phi(r)$ où r est la distance à la particule considérée. Les particules du plasma possède une distribution régie par la statistique de Maxwell-Boltzmann, ce qui nous permet d'écrire que la densité spatiale de l'espèce chimique a autour de la particule considérée sera

$$n_a(r) = n_{ao} \exp\left(-\frac{q_a \Phi(r)}{k_B T}\right) \quad (1.6)$$

où n_{ao} est la densité de particules de l'espèce a à grande distance de la particule considérée, c'est à dire quand $\Phi(r) \rightarrow 0$. Si l'espèce chimique a possède une charge électrique de même signe que la particule considérée, alors le produit $q_a \Phi(r)$ est positif et l'on s'aperçoit qu'à proximité de la particule considérée la densité de l'espèce chimique a diminue : cela traduit l'effet de répulsion électrostatique de charges de même signe. L'effet est inverse pour une espèce chimique de signe opposée puisque sa densité augmente en se rapprochant de la particule considérée. Si on note $\rho(r) = \sum_a n_a q_a$ la densité de charge volumique totale du plasma, alors l'équation régissant le potentiel électrostatique est donnée par la loi de Poisson

$$\Delta \Phi(r) + \frac{\rho(r)}{\epsilon_o} + \frac{q \delta(r)}{\epsilon_o} = 0 \quad (1.7)$$

où q est la charge de la particule considérée placée en $r = 0$. Pour que le plasma reste ionisé, c'est à dire que les électrons libres ne se recombinent pas avec les cations, il faut que l'énergie cinétique d'agitation thermique soit très supérieure à l'énergie potentielle électrostatique entre particules, ce qui amène donc que $|q_a \Phi(r)| \ll k_B T$. On peut alors tout de suite exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ comme

$$\rho(r) = \sum_a n_a q_a = \sum_a q_a n_{ao} \exp\left(-\frac{q_a \Phi(r)}{k_B T}\right) \simeq \sum_a q_a n_{ao} \left(1 - \frac{q_a \Phi(r)}{k_B T}\right) \quad (1.8)$$

1.2. CARACTÉRISATION D'UN PLASMA - DIAGRAMME DENSITÉ-TEMPÉRATURE

Le premier terme de l'expression obtenue $\sum_a q_a n_{ao} = 0$ car le plasma est globalement électriquement neutre. L'équation de Poisson devient alors

$$\Delta\Phi(r) - \sum_a \frac{n_{ao}q_a^2\Phi(r)}{\varepsilon_o k_B T} + \frac{q\delta(r)}{\varepsilon_o} = 0 \quad (1.9)$$

Afin d'alléger l'équation ci-dessus, nous pouvons définir la longueur de Debye du plasma λ_D en posant

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_a \frac{n_{ao}q_a^2}{\varepsilon_o k_B T} = \sum_a \frac{1}{\lambda_{D,a}^2} \quad (1.10)$$

ce qui nous donne l'équation suivante à résoudre

$$\Delta\Phi(r) - \frac{\Phi(r)}{\lambda_D^2} + \frac{q\delta(r)}{\varepsilon_o} = 0 \quad (1.11)$$

La résolution de cette équation différentielle peut être obtenue en prenant la transformée de Fourier de celle-ci car si on pose que

$$\hat{\Phi}(k) = \iiint \Phi(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad (1.12)$$

alors on montre facilement que $\Delta\hat{\Phi}(k) = -k^2\hat{\Phi}(k)$. La transformée de Fourier d'une fonction de Dirac étant $TF(\delta(r)) = 1$, on arrive à l'équation de Poisson dans l'espace de Fourier

$$\hat{\Phi}(k) = \frac{q}{\varepsilon_o} \frac{\lambda_D^2}{1 + k^2\lambda_D^2} \quad (1.13)$$

Il ne reste plus alors qu'à calculer la transformée de Fourier inverse de cette expression qui est

$$\Phi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \hat{\Phi}(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \quad (1.14)$$

Cette intégrale triple porte sur l'ensemble de l'espace des vecteurs d'onde \vec{k} dont l'élément de volume s'exprime en coordonnées sphériques $d^3k = \sin\theta k_r^2 dk_r d\theta d\phi$. Cette base sphérique peut être orientée arbitrairement donc nous allons choisir comme axe de référence pour la coordonnée $\theta = 0$ l'orientation du vecteur position \vec{r} . Ainsi il vient rapidement que $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_r r \cos\theta$ avec $||\vec{k}|| = k_r$ car le vecteur d'onde est colinéaire avec sa composante radiale. Aucun terme ne dépend de ϕ donc l'intégration sur cette coordonnée est triviale et amène un facteur 2π . L'intégrale devient alors

$$\Phi(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{q\lambda_D^2}{\varepsilon_o} \frac{e^{ik_r r \cos\theta} k_r^2 \sin\theta}{1 + k^2\lambda_D^2} dk_r d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{q\lambda_D^2}{i\varepsilon_o r} \left[\frac{e^{ik_r r \cos\theta} k_r}{1 + k^2\lambda_D^2} \right]_0^\pi dk_r \quad (1.15)$$

En appliquant les bornes de l'intégrale sur θ , on voit apparaître l'expression

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{q\lambda_D^2}{\varepsilon_o r} \frac{k_r \sin(k_r r)}{1 + k^2\lambda_D^2} dk_r = \mathcal{I}m \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\lambda_D^2}{\varepsilon_o r} \frac{k_r e^{ik_r r}}{1 + k^2\lambda_D^2} dk_r \right) \quad (1.16)$$

car la fonction sous l'intégrale est paire en k_r et où $\mathcal{I}m$ est la partie imaginaire d'une expression. Ce dernier calcul d'intégrale est obtenu grâce au théorème des résidus. En effet, on peut constater que la fonction sous l'intégrale présente un point singulier sur l'axe imaginaire $k = i/\lambda_D$. En

définissant un contour fermé \mathcal{C} passant par l'axe des réels et se fermant le long d'un demi-cercle de rayon infini, on a par le théorème des résidus

$$\int_{\mathcal{C}} \hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r} dk_r = 2i\pi \text{Res}(\hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r}, i/\lambda_D) \quad (1.17)$$

Etant donnée la structure de la fonction $\hat{\Phi}(k)$ qui décroît en $1/|k|$ pour $|k| \rightarrow \infty$, le lemme de Jordan nous indique que l'intégrale de la fonction sur le demi-cercle du contour à l'infini est nulle. On a ainsi

$$\int_{\mathcal{C}} \hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r} dk_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{-ik_r r}}{r} dk_r = 2i\pi \text{Res} \left(\hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r}, i/\lambda_D \right) \quad (1.18)$$

Le résidu a pour valeur d'après sa définition

$$\text{Res} \left(\hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r}, i/\lambda_D \right) = \lim_{k_r \rightarrow i/\lambda_D} \left\{ \left(k - \frac{i}{\lambda_D} \right) \frac{q\lambda_D^2 k_r e^{ik_r r}}{4\pi^2 \varepsilon_o r (1 + k_r^2 \lambda_D^2)} \right\} = \lim_{k_r \rightarrow i/\lambda_D} \left\{ -i \frac{q\lambda_D k_r e^{ik_r r}}{4\pi^2 \varepsilon_o r (1 - ik_r \lambda_D)} \right\} \quad (1.19)$$

En remplaçant k_r par sa valeur au pôle, on obtient alors

$$\text{Res} \left(\hat{\Phi}(k) \frac{k_r e^{ik_r r}}{r}, i/\lambda_D \right) = \frac{q e^{-r/\lambda_D}}{8\pi^2 r \varepsilon_o} \quad (1.20)$$

En regroupant toutes les valeurs trouvées, on arrive alors à exprimer le potentiel électrostatique généré par la particule considérée

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)} \quad (1.21)$$

Ce potentiel électrostatique présente une modification si on le compare au potentiel de la même particule isolée dans le vide. En effet un facteur de décroissance exponentiel apparait du fait de la présence des charges électriques du plasma dans l'environnement proche de la particule considérée. Ainsi la portée de l'influence électrostatique d'une particule chargée dans le plasma est spatialement limitée sur une longueur équivalente à la longueur de Debye, on parle alors d'écrantage du plasma. La sphère d'influence d'une particule avec le reste du plasma est appelée sphère de Debye.

1.2.2 Diagramme densité-température

Nous avons défini différentes longueurs caractéristiques associées au différents phénomènes pouvant s'appliquer aux particules d'un plasma. Nous allons maintenant identifier la zone d'application de la théorie classique des plasmas qui constitue le coeur de ce cours.

Effets de dégénérescence quantique

Les effets de dégénérescence quantique apparaissent quand les particules composant un plasma se retrouvent si proche les unes des autres que le paquet d'onde d'une particule se confond avec celui de ses voisines. Dans ce cas là, une description quantique est nécessaire au niveau statistique pour décrire de façon adéquate l'interaction entre particules. Si l'on veut traduire cette constatation en termes de longueur caractéristique alors le plasma sera quantiquement dégénéré si la longueur de de Broglie de ses particules est plus grande que la distance au plus proche voisin

$$\lambda_t > d \rightarrow \frac{h}{\sqrt{mk_B T}} > n^{-1/3} \quad (1.22)$$

1.2. CARACTÉRISATION D'UN PLASMA - DIAGRAMME DENSITÉ-TEMPÉRATURE

Cette condition peut se réécrire en échelle logarithmique de telle façon que la limite entre plasma classique et plasma avec dégénérescence quantique apparait comme une droite dans le plan $\log n - \log T$

$$\log n = \frac{3}{2} \log T + 3 \log \left(\frac{\sqrt{mk_B}}{h} \right) = \frac{3}{2} \log T + 20 \quad (1.23)$$

où il est important de rappeler que les valeurs numériques sont calculées dans le système d'unité MKSA. Dans cette relation nous avons considéré les électrons du plasma car ce sont les particules qui, de par leur faible masse, ont la longueur de de Broglie la plus grande. Ce sont donc naturellement les particules qui peuvent être le plus sujettes à des effets de dégénérescence quantique.

Effets relativistes

Les plasmas dont la température est très élevée peuvent contenir en leur sein des particules dont l'énergie cinétique est si grande qu'elles peuvent devenir relativistes. La limite entre un régime classique et un régime relativiste est usuellement définie comme la frontière où l'énergie d'agitation thermique est égale à l'énergie de masse des particules. C'est encore une fois les électrons libres du plasma qui sont les premiers à éprouver ces modifications car leur masse est la plus faible. La limite relativiste sera donc

$$k_B T = m_e c^2 \rightarrow \log T = \log \left(\frac{m_e c^2}{k_B} \right) = 9.78 \quad (1.24)$$

On gardera à l'esprit ici que les valeurs numériques sont calculées dans le système d'unités MKSA.

Effets de corrélation

Ces effets apparaissent quand quand l'agitation thermique n'est pas suffisante pour que les particules puissent se propager librement et s'affranchir de l'attraction coulombienne des autres particules électriquement chargées. On peut traduire cette condition en termes de longueurs, c'est à dire quand la longueur de Landau est plus grande que la distance au plus proche voisin. Dans ce cas la distance entre deux particules voisines est si faible que l'énergie potentielle d'interaction électrostatique est supérieure à l'énergie cinétique d'agitation thermique. On traduit donc cette limite par

$$r_o = d \rightarrow T = \frac{q^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_o k_B} \leftrightarrow \log T = \frac{\log n}{3} + \log \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o k_B} \right) = \frac{\log n}{3} + 14.3 \quad (1.25)$$

Ces effets de corrélation se produisent entre particules de charges opposées, c'est à dire entre cations et électrons libres. Dans le cas où les particules chargées positivement possèdent une charge Ze avec Z un entier supérieur à l'unité, il faudrait incorporer ce facteur Z dans la limite ci-dessus.

Effets quantiques

Au delà des effets de dégénérescence, l'utilisation de la théorie quantique peut également s'avérer nécessaire dans le cas où le plasma est dans une configuration où la portée électrostatique des particules (i.e. la longueur de Debye) est inférieure à la taille du paquet d'onde associée à la particule (i.e. la longueur de de Broglie). Dans ce cas l'interaction entre particules est régie par la mécanique quantique et non par l'électromagnétisme classique. Cette frontière se traduit pour les électrons

$$\lambda_D = \lambda_t \rightarrow T = \left(\frac{n_e q_e^2 h^2}{\epsilon_o m_e k_B^2} \right)^{1/2} \rightarrow \log n = 2 \log T + 17.2 \quad (1.26)$$

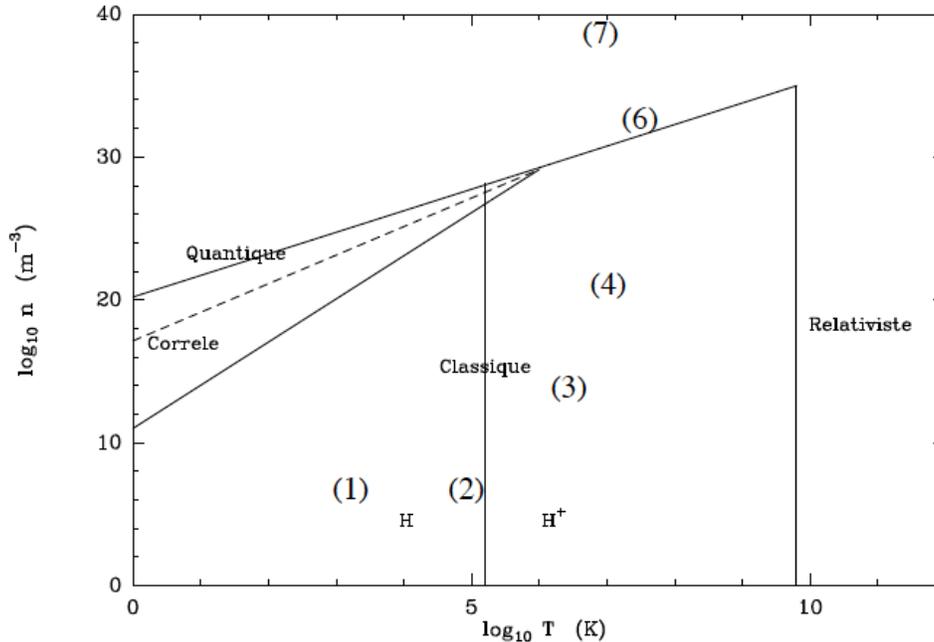


FIGURE 1.1 – Diagramme densité-température des plasmas. Les chiffres apparaissant sur le diagramme indiquent l'emplacement de différents types de plasmas dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau (1.2). A titre indicatif une ligne verticale à $\log T \simeq 5.1$ a été rajoutée pour indiquer la frontière entre plasmas partiellement ionisé et complètement ionisé. Cette ligne indique la température au-delà de laquelle tous les atomes d'hydrogène deviennent ionisés.

En regroupant toutes les contraintes citées précédemment, on arrive à définir une zone où les plasmas peuvent être décrit de façon classique. Les différentes frontières définies dans cette section apparaissent toutes comme des droites dans ce diagramme logarithmique. Le diagramme densité - température est représenté sur la figure (1.1) avec les différentes frontières déterminées précédemment. La zone de validité de la théorie classique des plasmas est ainsi bornée pour les hautes densités par la limite quantique où la matière devient si dense que les particules deviennent indiscernables et où des processus de physique des particules entrent en jeu dans l'interaction entre particules. Un des exemples de ce type de plasma est celui composant des objets astrophysiques appelés étoiles naines blanches. Dans le cas des températures les plus extrêmes, une frontière apparaît où la dynamique relativiste des particules est à prendre en compte dans la description statistique du plasma. Enfin pour finir, les plasmas de faible température peuvent être confrontés à des effets de corrélation électrostatique qui, bien que descriptible par un formalisme classique, nécessitent une approche physique différente de celle qui sera considérée dans ce cours d'introduction.

1.3 Sphère de Debye dans les plasmas classiques non-corrélés

Dans la suite de ce cours, nous allons nous intéresser aux plasmas non-corrélés, c'est à dire les plasmas suffisamment chauds pour que l'agitation thermique domine l'attraction électrostatique entre particules chargées. Cette catégorie de plasmas sera donc caractérisée par un paramètre mesurant le rapport entre l'énergie potentielle coulombienne et l'énergie cinétique de l'agitation thermique

Milieu	$\log_{10} n \text{ (} m^{-3} \text{)}$	$\log_{10} T \text{ (} K \text{)}$	$\log_{10} \lambda_D \text{ (} m \text{)}$
Gaz interstellaire (1)	6	3.5	0.5
Vent solaire (2)	6.5	5	1
Couronne solaire (3)	13	6.5	-1.5
Tokamak (4)	20	7	-5
Magnétosphère de pulsar (5)	18	16	1
Intérieur stellaire (6)	33	7.5	-11.5
Naine Blanche (7)	38	7	-14

FIGURE 1.2 – Tableau présentant la densité et la température de quelques plasmas terrestres et spatiaux ainsi que la longueur de Debye de chaque plasma.

que l'on nommera ξ_p tel que

$$\xi_p = \frac{|\epsilon_{coul}|}{\epsilon_{therm}} \ll 1 \quad (1.27)$$

qui est usuellement baptisé "petit paramètre du plasma".

1.3.1 Le "petit" paramètre du plasma

Nous allons ici exprimer ce paramètre en fonction des caractéristiques du plasma. Pour pouvoir exprimer ce paramètre, nous allons commencer par exprimer l'énergie coulombienne du plasma en faisant un bilan des interactions entre chaque paire de particules du plasma. Au sein du plasma, deux particules a et b de charges électriques q_a et q_b possèdent une énergie d'interaction qui s'exprimera comme

$$\Phi_{ab}(r_{ab}) = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 r_{ab}} \exp\left(-\frac{r_{ab}}{\lambda_D}\right) \quad (1.28)$$

où il faut tenir compte de l'effet d'écrantage du au plasma, ce qui explique la présence du terme exponentiel. Dans l'expression la distance r_{ab} représente la distance entre les deux particules. Si on définit maintenant un élément de volume d^3x_1 autour d'un point repéré par \vec{x}_1 alors la charge électrique de l'espèce a contenue dans l'élément de volume sera $q_a n_a(\vec{x}_1) d^3x_1$. Si on définit maintenant un autre élément de volume d^3x_2 autour d'un point repéré par \vec{x}_2 alors l'énergie d'interaction entre les charges de l'espèce a situées dans d^3x_1 avec les charges de l'espèce b contenues dans d^3x_2 sera

$$d\epsilon_{ab} = n_a(\vec{x}_1) n_b(\vec{x}_2) \Phi_{ab}(r_{12}) d^3x_1 d^3x_2 \quad (1.29)$$

Pour obtenir l'énergie totale d'interaction entre toutes les particules de toutes les espèces en tout point de l'espace il faut donc faire 1/ une double intégrale sur le volume car chaque particule interagit avec toutes les autres particules 2/ une somme sur toutes les espèces qui interagissent entre elles. L'énergie totale d'interaction coulombienne devient

$$\epsilon_{coul} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \iiint_V \iiint_V n_a(\vec{x}_1) n_b(\vec{x}_2) \Phi_{ab}(r_{12}) d^3x_1 d^3x_2 \quad (1.30)$$

où le facteur 1/2 provient du fait qu'en faisant les intégrations, on compte systématiquement deux fois chaque paire de particules et V représente le volume occupé par le plasma. Avant de pouvoir

calculer ses intégrales, il nous faut exprimer les densités de particules qui sont affectées par la présence des autres espèces. La première chose à réaliser est que si des particules sont éloignées d'une distance supérieure à la longueur de Debye λ_D alors le potentiel électrostatique s'annule à cause de l'écrantage. Ces particules n'interagiront pas l'une avec l'autre. Ainsi pour une particule en un point de l'espace, seules les particules situées dans sa sphère de Debye interagiront avec elle. A l'échelle de la sphère de Debye, les espèces se répartissent suivant la statistique de Maxwell-Boltzmann qui prend en compte l'énergie d'interaction entre particules. Ainsi la densité de particules de l'espèce a interagissant avec les particules de l'espèce b sera

$$n_a(\vec{x}_1)n_b(\vec{x}_2) = n_{ao}n_{bo} \exp\left(-\frac{\Phi_{ab}(r_{12})}{k_B T}\right) \quad (1.31)$$

où n_{ao} et n_{bo} sont les densités moyennes à l'équilibre en l'absence d'interaction coulombienne et où $r_{12} = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$. Arrêtons-nous un instant sur cette expression : si deux espèces de particules possèdent des charges de même signe alors $\Phi_{ab}(r_{12})$ est positive et croit quand r_{12} décroît ce qui entraîne une décroissance de la densité de particules des espèces a et b qui interagissent. On retrouve bien ici que la répulsion coulombienne entre particules de même charge tend à éloigner les particules. Si les espèces a et b sont de signes opposés alors c'est l'inverse qui est vrai, l'attraction coulombienne tend à augmenter la densité de particules. Jusqu'à quel point la densité peut augmenter ? Mathématiquement, on peut s'attendre à arriver à une densité infinie ! En réalité il n'en est rien car à très courte distance, des particules de charges opposées vont se recombiner pour former une seule particule qui n'interagira plus de la même façon avec ses voisines. Ce phénomène limite donc par le bas la distance entre particules à la taille des atomes.

Dans les plasmas non-corrélés, nous avons déjà vu que l'énergie d'interaction coulombienne était petite par rapport à l'énergie d'agitation thermique. Cela permet de simplifier l'expression précédente comme

$$n_a(\vec{x}_1)n_b(\vec{x}_2) \simeq n_{ao}n_{bo} \left(1 - \frac{\Phi_{ab}(r_{12})}{k_B T}\right) \quad (1.32)$$

Cette approximation est bien vérifiée sauf pour les distances petites mais comme nous l'avons déjà évoqué, les particules se recombinent et alors elles n'e comptent plus dans la population des espèces a ou b . En reprenant l'expression de l'énergie coulombienne, on a

$$\epsilon_{\text{coul}} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \iiint_V \iiint_V n_{ao}n_{bo} \left(1 - \frac{\Phi_{ab}(r_{12})}{k_B T}\right) \Phi_{ab}(r_{12}) d^3x_1 d^3x_2 \quad (1.33)$$

En décomposant l'expression du potentiel Φ_{ab} on obtient deux contributions à ϵ_{coul}

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{coul}} = & \frac{1}{2} \sum_a \sum_b n_{ao}n_{bo} \iiint_V \iiint_V \left\{ \frac{q_a q_b e^{-r_{12}/\lambda_D}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right. \\ & \left. - \frac{q_a^2 q_b^2 e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r_{12} k_B T} \right\} d^3x_1 d^3x_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Le premier terme est nul à cause de la neutralité électrique globale du plasma avec $\sum_a n_{ao}q_a = 0$. L'expression de énergie coulombienne devient alors

$$\epsilon_{\text{coul}} = -\frac{1}{2} \sum_a \sum_b n_{ao}n_{bo} \iiint_V \iiint_V \frac{q_a^2 q_b^2 e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r_{12} k_B T} d^3x_1 d^3x_2 \quad (1.35)$$

1.3. SPHÈRE DE DEBYE DANS LES PLASMAS CLASSIQUES NON-CORRÉLÉS

Avant de pouvoir procéder à l'évaluation de cette expression, il nous faut remarquer que l'expression sous l'intégrale ne dépend que de la distance entre les points \vec{x}_1 et \vec{x}_2 notée r_{12} . Nous allons donc procéder à un changement de variables afin de pouvoir calculer cette expression. En posant $\vec{r}_{12} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ et $\vec{r}_+ = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2$ on passe alors aux intégrales (le Jacobien de la transformation est -1)

$$\epsilon_{\text{coul}} = -\frac{1}{2} \sum_a \sum_b n_{ao} n_{bo} \iiint_V \iiint_V \frac{q_a^2 q_b^2 e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{16\pi^2 \epsilon_o^2 r_{12}^2 k_B T} d^3 r_{12} d^3 r_+ \quad (1.36)$$

où l'élément de volume $d^3 r_{12} = 4\pi r_{12}^2 dr_{12}$. Aucun terme sous l'intégrale ne dépend de r_+ donc cette intégration est triviale, il reste alors

$$\epsilon_{\text{coul}} = -\frac{1}{2} \sum_a \sum_b n_{ao} n_{bo} V \int_0^{+\infty} \frac{q_a^2 q_b^2 e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{16\pi^2 \epsilon_o^2 r_{12}^2 k_B T} 4\pi r_{12}^2 dr_{12} \quad (1.37)$$

ce qui se réduit à

$$\epsilon_{\text{coul}} = - \left(\sum_a \frac{n_{ao} q_a^2}{\epsilon_o k_B T} \right) \left(\sum_b \frac{n_{bo} q_b^2}{\epsilon_o k_B T} \right) k_B T V \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{8\pi} dr_{12} = -\frac{k_B T V}{\lambda_D^4} \left[-\lambda_D \frac{e^{-2r_{12}/\lambda_D}}{16\pi} \right]_0^{+\infty} \quad (1.38)$$

On arrive alors à l'expression de l'énergie coulombienne du plasma

$$\boxed{\epsilon_{\text{coul}} = -\frac{k_B T V}{16\pi \lambda_D^3}} \quad (1.39)$$

Cette expression particulièrement simple de l'énergie potentielle électrostatique nous amène ainsi à l'expression du "petit" paramètre de plasma qui devient, sachant que l'énergie thermique du plasma s'exprime comme $\epsilon_{\text{therm}} = \frac{3}{2} n k_B T V$ (n étant la densité volumique du plasma)

$$\xi_p = \frac{|\epsilon_{\text{coul}}|}{\epsilon_{\text{therm}}} = \frac{1}{24\pi n \lambda_D^3} \ll 1 \quad (1.40)$$

Cette expression nous montre que le terme $n \lambda_D^3 \gg 1$. Physiquement cela montre que pour les plasmas non-corrélés, le nombre de particules du plasma présents dans un sphère de Debye est très grand, ce qui conforte l'hypothèse que le plasma obéit aux lois de la mécanique statistique et donc de la distribution de Maxwell-Boltzmann.

1.3.2 Fréquence de déflexion des particules

Au cours de la propagation d'une particule électriquement chargée dans le plasma, cette dernière subit de l'influence électrostatique des autres particules contenues dans sa sphère de Debye. Les particules composant le plasma n'ont pas toutes les mêmes vitesses. En effet, si toutes les particules ont une énergie cinétique de l'ordre de $\frac{3}{2} k_B T$, la différence de masse entre électrons et ions fait que les électrons sont les particules de loin les plus rapides. Ainsi on peut considérer que le plasma peut être représenté comme composé d'ions immobiles baignant dans un gaz d'électrons en mouvement. La déflexion de trajectoire sera ainsi principalement ressentie par les électrons de par leur interaction avec les ions qui croisent son chemin. Dans la figure (1.3.2) on a représenté une déflexion typique par interaction coulombienne où la trajectoire de l'électron est infléchiée par

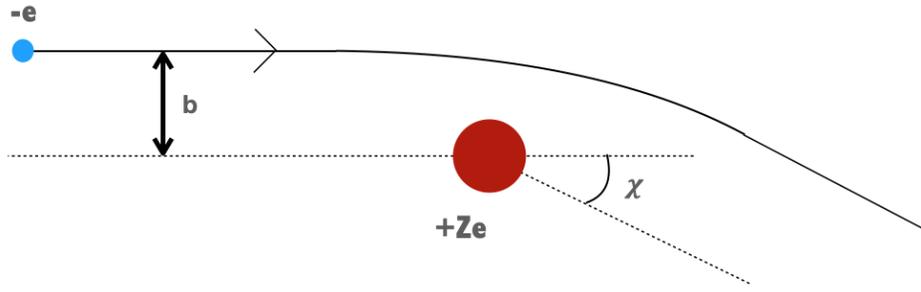


FIGURE 1.3 – Schéma d'une déflexion de la trajectoire d'un électron par interaction coulombienne avec un ion de charge Ze . La distance b entre la trajectoire non-perturbée de l'électron et la position de l'ion est appelé paramètre d'impact. On note χ l'angle de déflexion de la trajectoire.

l'attraction exercée par l'ion au repos. En résolvant le problème à 2 corps, on montre que l'angle de déflexion de la trajectoire χ est relié au paramètre d'impact b par la loi de diffusion de Rutherford

$$b(\chi) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_o^2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\chi}{2}\right)} = -\frac{r_o}{\tan\left(\frac{\chi}{2}\right)} \quad (1.41)$$

où m_e est la masse de l'électron et v_o sa vitesse de déplacement telle que $v_o \sim \sqrt{2k_B T / (3m_e)}$. Il est important de noter ici que l'angle de déflexion χ est orienté, celui sur la figure donne un angle négatif et donc une tangente négative de l'angle. On rappelle que r_o est la longueur de Landau définie dans les parties précédentes.

La déflexion de trajectoire dépend de la valeur du paramètre d'impact qui est directement relié à la valeur de l'angle de déflexion. Au cours de sa trajectoire, la vitesse de l'électron va varier mais une fois qu'il aura dépassé le voisinage de l'ion, sa vitesse aura la même norme qu'initialement car la force électrostatique est une force conservative. Seule l'orientation du vecteur vitesse de l'électron aura ainsi varié. Si on note \vec{p}_i la quantité de mouvement initiale de l'électron et \vec{p}_f sa quantité de mouvement finale, on aura $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ et $p_{fx} = p_i \cos \chi$ et $p_{fy} = p_i \sin \chi$ où l'axe des x est parallèle à la direction incidente et l'axe des y est la direction transverse à la direction initiale de la vitesse de l'électron. Selon ces deux directions, la variation de quantité de mouvement sera

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -p_i(1 - \cos \chi)\vec{e}_x - p_i \sin \chi \vec{e}_y \quad (1.42)$$

En faisant la moyenne de ces composantes sur l'angle de déflexion χ (variant de $-\pi/2$ à $\pi/2$), on voit immédiatement que seule la variation de quantité de mouvement le long de la direction initiale de propagation de l'électron est non nulle. On a alors

$$\langle \Delta\vec{p} \rangle = -\vec{p}_i \langle (1 - \cos \chi) \rangle \quad (1.43)$$

Cette variation de quantité de mouvement peut être assimilée à une force de collision de nature coulombienne qui s'écrit

$$\vec{F}_{\text{coul}} = \frac{\langle \Delta\vec{p} \rangle}{\Delta t} \equiv -\nu \vec{p}_i \quad (1.44)$$

où ν représente la fréquence de collision caractéristique du plasma. Pour estimer la variation de quantité de mouvement durant l'intervalle de temps Δt , il nous faut estimer le nombre de particules qui entreront en interaction avec l'ion fixe. Le nombre d'électrons ayant un paramètre d'impact b qui subiront une déflexion sera $nv_o \Delta t 2\pi b db$ durant l'intervalle de temps Δt . On pourra

1.3. SPHÈRE DE DEBYE DANS LES PLASMAS CLASSIQUES NON-CORRÉLÉS

remarquer la présence de l'élément de surface cylindrique $2\pi b db$ autour de l'axe de propagation initiale qui sert de support au flux de particules incidentes nv_o . Afin d'obtenir la variation de quantité de mouvement par intervalle de temps due à la déflexion des électrons, nous allons maintenant faire la moyenne de la variation de quantité de mouvement en prenant en compte le flux d'électrons incident que nous venons d'obtenir. Cela nous amène à l'expression

$$\langle \Delta \vec{p} \rangle = -nv_o \vec{p}_i \Delta t \int_0^{b_{\max}} 2\pi(1 - \cos \chi) b db \quad (1.45)$$

où il est important de rappeler que le paramètre d'impact b dépend de l'angle χ au travers de la relation de Rutherford. Pourquoi ne pas intégrer ce flux jusqu'à l'infini? Simplement parce que l'interaction coulombienne est écrantée par le plasma au delà de la distance de Debye. On n'aura donc pas de déflexion significative pour les paramètres d'impact supérieurs à $b_{\max} = \lambda_D$. Afin de calculer cette intégrale, nous allons exprimer le terme $\cos \chi$ en fonction de b à l'aide de la relation trigonométrique

$$\cos \chi = \frac{1 - \tan^2(\chi/2)}{1 + \tan^2(\chi/2)} = \frac{b^2 - r_o^2}{b^2 + r_o^2} \quad (1.46)$$

Cela nous permet d'écrire

$$\langle \Delta \vec{p} \rangle = -nv_o \vec{p}_i \Delta t \int_0^{\lambda_D} 4\pi \frac{r_o^2}{r_o^2 + b^2} b db = -nv_o \vec{p}_i \Delta t 2\pi [r_o^2 \ln(r_o^2 + b^2)]_0^{\lambda_D} \quad (1.47)$$

On obtient enfin l'expression attendue

$$\langle \Delta \vec{p} \rangle = -nv_o \vec{p}_i \Delta t 2\pi r_o^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda_D^2}{r_o^2} \right) \quad (1.48)$$

ainsi que l'expression de la fréquence de déflexion

$$\nu = nv_o 2\pi r_o^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda_D^2}{r_o^2} \right) \quad (1.49)$$

Les plasmas non-corrélés vérifient par définition l'inégalité $\lambda_D \gg r_o$ car en retravaillant cette expression on obtient

$$\frac{\lambda_D^2}{r_o^2} = \frac{16\pi^2 \varepsilon_o^3 (k_B T)^3}{Z^4 q^6 n} = \frac{\lambda_D^6}{d^6} \equiv \frac{1}{\xi_p^2} \gg 1 \quad (1.50)$$

où ξ_p est le petit paramètre du plasma. Le terme $\ln(\lambda_D/r_o) = \ln \Lambda \simeq \ln(1 + \lambda_D^2/r_o^2)/2$ est appelé logarithme coulombien et sa valeur pour les différents plasmas connus oscille entre 10 et 20 suivant les conditions physiques rencontrées. On voit alors que la fréquence de déflexion ν est de l'ordre de

$$\nu \simeq nv_o r_o^2 \ln \Lambda \quad (1.51)$$

En comparant cette fréquence au temps caractéristique de traversée de la sphère de Debye par un électron $\tau_e \sim \lambda_D/v_o$ on a alors le nombre dimensionné

$$\nu \tau_e \sim nr_o^2 \lambda_D \ln \Lambda \sim \frac{r_o^2}{\lambda_D^2} \frac{\lambda_D^3}{d^3} \ln \Lambda \sim \xi_p \ln \Lambda \ll 1 \quad (1.52)$$

qui indique que la fréquence de déflexion des électrons est faible pour les plasmas non-corrélés. Cela nous montre que dans ce type de plasmas, les trajectoires des électrons sont faiblement affectés par la présence des ions car le mouvement d'agitation thermique leur confère une grande

énergie cinétique. Ces faibles déflexions entraînent néanmoins un effet visible depuis la plasma car les électrons subissant ces déflexions vont émettre un rayonnement électromagnétique dont l'énergie totale sera liée à la densité et à la température du plasma. Ce rayonnement est appelé "rayonnement de freinage" et n'est produit que par les plasmas.

1.3.3 Oscillations électroniques de Langmuir

Au sein du plasma, nous avons déjà vu que les ions, de par leur masse beaucoup plus importante que celle des électrons, peuvent être considérés en première approximation comme immobiles pendant que les électrons sont en mouvement sous l'effet de l'agitation thermique. L'équilibre thermodynamique de considérer que sans perturbation extérieure, la densité de particules du plasma est stationnaire dans le temps. Sous l'effet d'une perturbation extérieure (champ électromagnétique, onde, choc ..), les électrons sont mis en mouvement localement, ce qui crée un écart à la valeur stationnaire de la densité que l'on notera δn_e . Ce déplacement d'électrons engendre alors un champ électrique qui vérifie l'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{E} = -e\delta n_e/\epsilon_0$. L'équation de continuité de la charge électrique nous indique que

$$-e \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{J}) = 0 \quad (1.53)$$

où le courant engendré par le déplacement des électrons est $\delta \vec{J} = -n_e e \delta \vec{v}_e$ avec $\delta \vec{v}_e$ la vitesse d'ensemble des électrons due à la perturbation (qui serait nulle sans perturbation car l'agitation thermique est isotrope). Afin de lier toutes les relations précédentes, on peut maintenant utiliser l'équation du mouvement de Newton sur un électron pour écrire

$$\frac{\partial \delta \vec{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \delta \vec{E} \quad (1.54)$$

Ici une hypothèse importante est à noter : on néglige ici la contribution des forces de pression électronique qui pourraient se rajouter au bilan. On gardera à l'esprit alors que cette expression n'est valable que pour les plasmas froids non-corrélés. En prenant la dérivée de l'équation de continuité par rapport au temps, on obtient

$$-e \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{n_e e^2}{m_e} \delta \vec{E} \right) = 0 \quad (1.55)$$

Pour pouvoir linéariser cette expression, il nous faut ici aussi supposer que le déplacement d'électrons est faible, ce qui ne trouble pas outre mesure la densité électronique au delà d'une perturbation faible, ce qui correspond à un déplacement des électrons sur une distance bien inférieure à la longueur d'onde du champ électrique créé. Si cette condition est réalisée alors on arrive à l'expression suivante

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \delta n_e = 0 \quad (1.56)$$

Cette équation est similaire à celle d'un oscillateur harmonique dont la pulsation caractéristique est la pulsation plasma définie comme

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (1.57)$$

Cette pulsation caractérise les mouvements d'oscillation des électrons à la pulsation plasma. Ces oscillations proviennent du fait que suite à un léger déplacement d'ensemble des électrons, ceux-ci subissent une force de rappel de la part des ions qui tend à les ramener vers une position

1.3. SPHÈRE DE DEBYE DANS LES PLASMAS CLASSIQUES NON-CORRÉLÉS

d'équilibre, de la même façon qu'un oscillateur harmonique. Nous verrons dans le prochain chapitre, l'effet de ces oscillations sur les ondes électromagnétiques traversant le plasma.

Du point de vue d'un électron traversant la sphère de Debye d'un autre électron, cette pulsation plasma est directement relié au temps de traversée de la sphère

$$\tau_e = \frac{\lambda_D}{v_o} \rightarrow \frac{\lambda_D^2}{v_o^2} = \frac{\varepsilon_o k_B T}{n_e e^2 v_o^2} \sim \frac{1}{\omega_{pe}^2} \quad (1.58)$$

où la vitesse de traversée est de l'ordre de $k_B T$. Si on compare la pulsation plasma à la fréquence de déflexion coulombienne que nous avons calculée dans la section précédente, on arrive naturellement à

$$\nu \tau_e \simeq \frac{\nu}{\omega_{pe}} \sim \xi_p \ln \Lambda \ll 1 \quad (1.59)$$

Ainsi la pulsation plasma est beaucoup plus grande que la fréquence de déflexion coulombienne. Cela traduit le fait que dans les plasmas non-corrélés, le mouvement d'ensemble des électrons est dominé par les oscillations électroniques. Le mouvement individuel des électrons est lui dominé par l'agitation thermique qui, si aucun autre phénomène n'était présent, rendrait la distribution électronique isotrope avec des électrons ayant des trajectoires balistiques dans toutes les directions. L'attraction électrostatique des ions sur les électrons entretient les petites fluctuations statistiques de densité électronique en créant ces oscillations. Les électrons subissent sur leur trajectoire ces champs électriques de rappel des ions qui les ralentissent et les accélèrent successivement, donnant ce mouvement d'ensemble oscillatoire. il faut néanmoins garder à l'esprit que nous avons supposé que nous pouvions négliger la pression thermique du plasma dans la description des oscillations. Cette hypothèse est assez contraignante car cela correspond à un plasma dont la température des électrons tend vers zéro, ce qui est difficilement compatible avec un plasma non-corrélé. Nous verrons dans le prochain chapitre ce qui l'inclusion de la pression dans ce calcul permettra de décrire les ondes de Langmuir.

2

Ondes dans les plasmas

Sommaire

2.1 Ondes dans les plasmas non-magnétisés	21
2.1.1 Ondes de Langmuir	22
2.1.2 Ondes électromagnétiques dans les plasmas non-magnétisés	23
2.2 Ondes électromagnétiques dans les plasmas magnétisés	24
2.2.1 Equations de Maxwell dans les milieux anisotropes	25
2.2.2 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes	26
2.2.3 Ondes EM parallèles au champ magnétique	28

LE premier chapitre de ce cours a été dédié à la caractérisation des plasmas et de la physique dans sphère de Debye autour de chaque particule. Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation des ondes électromagnétiques dans ces plasmas. En effet, l'étude des ondes électromagnétiques émises par les plasmas sont le moyen le plus direct de pouvoir les caractériser et de décrire les phénomènes physiques qui s'y déroulent. Dans la première partie nous allons décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma non-magnétisé, c'est à dire un plasma où aucun champ magnétique à grande échelle n'est présent. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous aborderons la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas magnétisés.

2.1 Ondes dans les plasmas non-magnétisés

Dans la première partie de ce chapitre, nous considérons des plasmas non-magnétisés, ce qui sous-entend qu'aucun champ magnétique à grande échelle n'est présent dans le plasma. Dans ce type de plasma, les particules électriquement chargées seront néanmoins soumises à la force électromagnétique générée par les perturbations électromagnétiques accompagnant la propagation de l'onde. Dans le cadre des ondes se propageant dans le vide, l'amplitude des composantes électrique et magnétique sont reliées par la vitesse de la lumière dans le vide $\delta E \equiv c\delta B$. En appliquant cette relation entre les composantes électrique et magnétique on s'aperçoit que la force électrique dominera la dynamique des particules du plasma car

$$\frac{\delta F_{\text{mag}}}{\delta F_{\text{elec}}} = \frac{v}{c} \ll 1 \tag{2.1}$$

où v est l'amplitude de la vitesse des particules.

2.1.1 Ondes de Langmuir

Nous avons vu dans la fin du chapitre précédent que les plasmas "froids" (mais non-corrélés) où la pression électronique est négligeable, présentent des oscillations électroniques dont la pulsation est égale à la pulsation plasma ω_{pe} . Dans les plasmas ayant une température plus élevée, la pression thermique des électrons n'est plus négligeable, l'équation du mouvement des électrons doit tenir compte de la force associée à la pression $\delta P_e = 3\delta n_e k_B T$, ce qui amène

$$n_e \frac{\partial \delta \vec{v}_e}{\partial t} = -n_e \frac{e}{m_e} \delta \vec{E} - \frac{3k_B T}{m_e} \vec{\nabla} \delta n_e \quad (2.2)$$

En reprenant la dérivée temporelle de l'équation de conservation de la charge électrique, on arrive à l'équation de propagation des ondes de Langmuir

$$-e \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{n_e e^2}{m_e} \delta \vec{E} + \frac{3ek_B T}{m_e} \vec{\nabla} \delta n_e \right) = 0 \quad (2.3)$$

ce qui peut se réexprimer uniquement en termes de la perturbation de densité

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} - \frac{3k_B T}{m_e} \Delta \delta n_e + \omega_{pe}^2 \delta n_e = 0 \quad (2.4)$$

La vitesse au carré du son apparait dans cette équation comme $C_S^2 = 3k_B T/m_e$, ce qui permet alors d'obtenir l'équation de propagation des ondes de Langmuir comme

$$\Delta \delta n_e - \frac{1}{C_S^2} \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} = \square \delta n_e = \frac{\omega_{pe}^2}{C_S^2} \delta n_e \quad (2.5)$$

où l'opérateur \square représente le d'Alembertien. Nous retrouvons bien la structure d'une équation de propagation d'onde à laquelle se rajoute un terme source qui représente la production du champ électrique responsable de la force de rappel sur les électrons. La relation de dispersion de ces ondes s'obtient en remplaçant la perturbation de densité par son expression en onde plane $\delta n_e = \delta n_o \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, ce qui donne

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{C_S^2} \right) = \frac{\omega_{pe}^2}{C_S^2} \quad (2.6)$$

ou plus simplement

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 C_S^2 \quad (2.7)$$

On ne retrouve pas la relation de dispersion usuelle des ondes sonores dans un gaz car la vitesse de phase de ces ondes dépend de sa fréquence

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = C_S \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} \quad (2.8)$$

La vitesse de phase n'est définie que si la pulsation des ondes est supérieure à la pulsation plasma. Pour les ondes dont la pulsation est inférieure à la pulsation plasma, la vitesse de phase est imaginaire, ce qui tend à prouver que le vecteur d'onde est imaginaire. La propagation de ces ondes sera alors atténuée car le terme de propagation deviendra une exponentielle réelle décroissante. La vitesse de groupe de ces ondes est définie comme

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{C_S^2}{v_{ph}} = C_S \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (2.9)$$

Quand la pulsation de l'onde est très supérieure à la pulsation plasma, on retrouve une structure de l'onde proche des ondes sonores dans la gaz. A contrario, quand la pulsation des ondes s'approche de la pulsation plasma, la vitesse de phase devient très grande par rapport à la vitesse du son au contraire de la vitesse de groupe qui devient très inférieure à la vitesse du son. Ce transport de l'énergie à faible vitesse peut se comprendre par le fait que le gradient de pression est directement lié à la fréquence de la perturbation. Quand la fréquence de la perturbation est proche de la pulsation plasma, le gradient de pression devient de l'ordre de la force de rappel électrique, ce qui permet à peine à la perturbation de pouvoir se propager. Pour les fréquences inférieures à la pulsation plasma, la force associée au gradient de pression est dominée par la force de rappel électrique et la perturbation est atténuée.

2.1.2 Ondes électromagnétiques dans les plasmas non-magnétisés

Dans les plasmas usuels, la vitesse des particules est très inférieure à celle de la lumière ce qui implique donc que la composante magnétique de la force électromagnétique est négligeable devant la composante électrique. Une fois fait ce constat, nous pouvons alors écrire la relation fondamentale de la dynamique de telle façon que chaque espèce chimique α du plasma obéit à la loi

$$n_{\alpha}q_{\alpha}\frac{\partial\vec{v}_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{J}_{\alpha}}{\partial t} = \frac{n_{\alpha}q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}\vec{E} \quad (2.10)$$

où \vec{J}_{α} est la densité de courant électrique associée à l'espèce chimique α . Si on additionne les équations de chaque espèce chimique alors on arrive à la relation suivante

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial\vec{J}_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = \sum_{\alpha}\omega_{p,\alpha}^2\varepsilon_0\vec{E} = \omega_p^2\varepsilon_0\vec{E} \quad (2.11)$$

où ω_p est la pulsation plasma totale et \vec{J} est la densité de courante totale dans le plasma. Maintenant que nous avons établi une relation entre le courant totale dans le plasma avec le champ électrique, nous pouvons l'utiliser dans les équations de Maxwell pour déterminer l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. Quand le champ électrique associé à l'onde est présent il induit une composante magnétique (de faible amplitude) qui n'est pas un champ magnétique à grande échelle, ce qu respecte les hypothèses du début. en cumulant l'équation de Maxwell-Faraday avec l'équation de Maxwell-Ampère, on montre facilement que

$$-\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta\vec{E}$ et en sachant que le plasma est homogène (car non soumis à une force extérieure d'où $\vec{\nabla}\rho_q = \vec{0}$ avec $\rho_q = \sum_{\alpha} n_{\alpha}q_{\alpha}$) on obtient alors l'équation de propagation des ondes électromagnétique dans un plasma non-magnétisé :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \left(\omega_p^2\vec{E} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (2.13)$$

Cette équation diffère ce celle obtenue dans le vide par la présence d'un terme proportionnel au champ électrique qui traduit la présence d'un courant de polarisation associé à la présence de

l'onde. En posant que le champ électrique de l'onde s'écrit sous la forme d'une onde plane $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_o \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ on obtient la relation de dispersion du plasma

$$(-k^2 + (\omega^2 - \omega_p^2)\mu_o\varepsilon_o)\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2} \quad (2.14)$$

La relation de dispersion nous montre que le plasma est un milieu dispersif, c'est à dire que la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde dépendent de la pulsation de l'onde.

La propagation des ondes dépend intrinsèquement des caractéristiques du plasma. En effet, on voit aisément que si la pulsation de l'onde est inférieure à la pulsation plasma alors on se retrouve dans une configuration telle que $k^2 < 0$ donc k imaginaire pur. L'expression du champ électrique sera alors

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_o \exp(i(\omega t)) \exp(-kr) \quad (2.15)$$

Seule la solution d'onde avec un terme exponentiellement décroissant est physiquement viable car l'autre solution nécessiterait un pompage exponentiellement croissant du réservoir d'énergie du milieu qui n'est pas infini. Si $\omega < \omega_p$, on a une onde qui présente une amplitude décroissant exponentiellement jusqu'à l'atténuation de cette onde. La longueur typique d'atténuation $l_{att} \equiv 1/|k| = c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \sim c/\omega_p$. Cette longueur est appelé épaisseur de peau du plasma par analogie avec la peau humaine qui filtre les rayons solaires. Le plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut.

Les ondes dont la pulsation dépasse la pulsation plasma auront une relation de dispersion autorisant $k^2 > 0$, ce qui est compatible avec une propagation sous la forme d'une onde plane. La vitesse de phase et la vitesse de groupe de cette onde seront

$$\begin{aligned} v_{ph} = \frac{\omega}{k} &= c\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2c^2}} > c \\ v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} &= \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2c^2}}} < c \end{aligned} \quad (2.16)$$

Bien que la vitesse de phase de l'onde dépasse celle de la lumière dans le vide, c'est bien entendue la vitesse de groupe, inférieure elle à la vitesse de la lumière dans le vide, qui détermine la vitesse de propagation de l'onde et l'énergie associée à celle-ci. L'existence de la ionosphère, où des électrons libres sont présents en nombre, dans notre atmosphère joue le rôle d'un filtre passe-haut sur les ondes électromagnétique. Au delà de la pulsation plasma, les ondes peuvent se propager librement mais avec une vitesse qui dépend de la fréquence de ces ondes. Cela engendre une difficulté pour connaitre exactement le temps de trajet des ondes, ce qu'un système de positionnement comme le système GPS, Galileo, etc... doit prendre en compte (voir TD 3).

2.2 Ondes électromagnétiques dans les plasmas magnétisés

La présence d'un champ magnétique à grande échelle dans le plasma va influencer la dynamique des particules chargées qui le composent. En effet, un mouvement de giration des particules autour du champ magnétique local va venir se superposer au mouvement engendré par le champ électrique, ce qui va modifier le lien entre la densité de courant de polarisation et le champ électromagnétique. Cela va également introduire une dissymétrie dans la direction parallèle au champ magnétique local et les directions perpendiculaires à celui-ci qui va provoquer une anisotropie du milieu vis-à-vis des ondes électromagnétiques. On ne peut alors plus parler de milieu isotrope en ce qui concerne les plasmas magnétisés.

2.2.1 Equations de Maxwell dans les milieux anisotropes

L'anisotropie induite par le champ magnétique dans les plasmas impose de définir de nouvelles grandeurs permettant de rendre compte de cette anisotropie. Ainsi les diverses constantes physiques comme la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu dépendent de la direction dans laquelle se propage l'onde. Au niveau des équations de Maxwell, cela se traduit par l'utilisation de tenseurs en lieu et place des scalaires utilisés jusque là. La première modification que nous pouvons mentionner est celle de la conductivité diélectrique $\overleftrightarrow{\sigma}$ qui relie la densité de courant de polarisation \vec{J}_{pol} au champ électrique. En effet, la présence du champ magnétique modifie le mouvement des particules chargées suivant la direction considérée et donc l'expression du courant électrique associée :

$$\vec{J}_{\text{pol}} = \varepsilon_o \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} \Leftrightarrow J_{\text{pol},i} = \varepsilon_o \sigma_i^j E_j \quad (2.17)$$

en notation indicielle. Une fois connu ce tenseur de conductivité, on peut écrire le tenseur diélectrique. La densité de courant de polarisation est relié au vecteur polarisation \vec{P} tel que $\vec{J}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ce qui permet d'avoir une expression du vecteur déplacement \vec{D}

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_o \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} = \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.18)$$

où $\varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r$ est le tenseur diélectrique du plasma. Dans le cas de la propagation d'ondes planes, on peut linéariser cette relation en remplaçant les dérivées temporelles de telle façon que

$$i\omega \vec{D} = i\omega \varepsilon_o \vec{E} + \varepsilon_o \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} = i\omega \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E} \Rightarrow \overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \overleftrightarrow{1} - i \frac{\overleftrightarrow{\sigma}}{\omega} \quad (2.19)$$

où $\overleftrightarrow{1}$ est la matrice identité. L'équation de Maxwell-Ampère peut s'écrire de façon générale

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \left(\vec{J}_{\text{ext}} + \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.20)$$

ce qui mène directement, dans le cas d'une solution en onde plane, au lien

$$-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_o \left(\vec{J}_{\text{ext}} + \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot (i\omega) \vec{E} \right) \quad (2.21)$$

L'équation de Maxwell-Faraday nous indique, dans le même contexte, que $\vec{B} = (\vec{k} \wedge \vec{E})/\omega$ ce qui nous mène à l'équation de propagation

$$\begin{aligned} -i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) &= \mu_o \vec{J}_{\text{ext}} + i\omega \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot (i\omega) \vec{E} \\ \Rightarrow \frac{c^2}{\omega^2} \left(\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \right) + \varepsilon_o \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E} &= \overleftrightarrow{\Lambda} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{J}_{\text{ext}}}{i\varepsilon_o \omega} \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'expression du tenseur de propagation $\overleftrightarrow{\Lambda}$ dépend de l'orientation du vecteur d'onde \vec{k} . Pour déterminer l'expression indicelle de ce tenseur on peut s'appuyer sur la formulation $\Lambda_l^m = -\frac{J_{l,\text{lib}}}{i\omega \varepsilon_o}$ qui nous amène alors à

$$\Lambda_l^m = \varepsilon_{r,l}^m - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\delta_l^m - \frac{k_l k^m}{k^2} \right) \quad (2.23)$$

où δ_l^m est le symbole de Kronecker non nul uniquement si $l = m$. Nous allons nous intéresser dans la partie suivante à l'équation de propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisée en l'absence d'un courant électrique extérieur. L'équation de propagation revient alors à chercher les valeurs propres nulles du tenseur de propagation.

2.2.2 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes

Avant de pouvoir rechercher les valeurs propres du tenseur diélectrique, nous allons tout d'abord établir l'expression du tenseur de conductivité électrique qui permet de relier la densité de courant de polarisation au champ électrique local. Si on prend comme direction de référence l'orientation du champ magnétique local \vec{B} , on peut écrire les vecteurs en les décomposant avec une composante parallèle à \vec{B} et une composante perpendiculaire à \vec{B} . Le champ électrique pourra donc s'écrire comme $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ avec $\vec{E}_{\parallel} \cdot \vec{B} = E_{\parallel} B$ et $\vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$. Les particules de l'espèce chimique α suivront alors la relation fondamentale de la dynamique

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_{\parallel, \alpha}}{\partial t} &= \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{E}_{\parallel} \\ \frac{\partial \vec{v}_{\perp, \alpha}}{\partial t} &= \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp, \alpha} \wedge \vec{B} \right)\end{aligned}\quad (2.24)$$

En définissant le vecteur cyclotron $\vec{\omega}_{c, \alpha} = -q_{\alpha} \vec{B} / m_{\alpha}$ on peut réécrire la dérivée de la seconde équation comme

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_{\perp, \alpha}}{\partial t^2} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} + \vec{\omega}_{c, \alpha} \wedge \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{E}_{\perp} + \vec{\omega}_{c, \alpha} \wedge \vec{v}_{\perp, \alpha} \right)\quad (2.25)$$

En développant le double produit vectoriel on obtient la relation suivante

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_{\perp, \alpha}}{\partial t^2} + \omega_{c, \alpha}^2 \vec{v}_{\perp, \alpha} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} + \vec{\omega}_{c, \alpha} \wedge \vec{E}_{\perp} \right)\quad (2.26)$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{v}_{\perp, \alpha} \cdot \vec{\omega}_{c, \alpha} = 0$. La solution en onde plane de cette équation nous amène naturellement à l'expression de la vitesse transverse

$$\vec{v}_{\perp, \alpha} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega_{c, \alpha}^2 - \omega^2)} \left(\vec{\omega}_{c, \alpha} \wedge \vec{E}_{\perp} + i\omega \vec{E}_{\perp} \right)\quad (2.27)$$

qui nous permet d'exprimer la densité de courant de polarisation transverse au champ magnétique

$$\vec{J}_{\perp} = \varepsilon_o \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{\varepsilon_o m_{\alpha} (\omega_{c, \alpha}^2 - \omega^2)} \left(\vec{\omega}_{c, \alpha} \wedge \vec{E}_{\perp} + i\omega \vec{E}_{\perp} \right)\quad (2.28)$$

L'expression de la densité de courant de polarisation parallèle au champ magnétique est plus simple à obtenir

$$\vec{J}_{\parallel} = \varepsilon_o \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{i \varepsilon_o m_{\alpha} \omega} \vec{E}_{\parallel}\quad (2.29)$$

Maintenant que nous avons établi l'expression de la densité de courant de polarisation en fonction du champ électromagnétique, nous pouvons identifier les termes du tenseur de conductivité. En premier lieu, nous allons choisir arbitrairement de prendre un repère orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ où

2.2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS

le champ magnétique s'écrit $\vec{B} = ||\vec{B}||\vec{e}_z$. Dans ce repère orthonormé, les relations précédentes pourront s'écrire

$$\begin{cases} J_{\parallel} = \varepsilon_o \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{i\omega} E_{\parallel} \\ J_{\perp,x} = \varepsilon_o \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} (i\omega E_{\perp,x} + \omega_{c,\alpha} E_{\perp,y}) \\ J_{\perp,y} = \varepsilon_o \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} (i\omega E_{\perp,y} - \omega_{c,\alpha} E_{\perp,x}) \end{cases} \quad (2.30)$$

De ces trois équations, on en déduit la forme du tenseur de conductivité électrique

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma'_{\perp} & \sigma''_{\perp} & 0 \\ -\sigma''_{\perp} & \sigma'_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

où les composantes du tenseur sont

$$\begin{cases} \sigma_{\parallel} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{\omega} \\ \sigma'_{\perp} = i\omega \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} \\ \sigma''_{\perp} = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2 \omega_{c,\alpha}}{(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} \end{cases} \quad (2.32)$$

Maintenant que nous avons établi l'expression du tenseur de conductivité, nous pouvons, grâce à l'équation (2.19), donner l'expression du tenseur de permittivité relative du plasma $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon' & \varepsilon'' & 0 \\ -\varepsilon'' & \varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où les composantes du tenseur sont

$$\begin{cases} \varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{\omega^2} \\ \varepsilon' = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} \\ \varepsilon'' = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p,\alpha}^2 \omega_{c,\alpha}}{\omega(\omega_{c,\alpha}^2 - \omega^2)} \end{cases} \quad (2.34)$$

A ce stade, nous pouvons écrire l'expression du tenseur de propagation mais ce dernier dépend bien évidemment de l'orientation du vecteur d'onde. Dans le cas le plus général possible, le vecteur

d'onde peut posséder trois composantes non-nulles ce qui donnera comme expression pour $\overleftrightarrow{\Lambda}$

$$\overleftrightarrow{\Lambda} = \begin{bmatrix} \varepsilon' - n^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) & \varepsilon'' + n^2 \frac{k_x k_y}{k^2} & n^2 \frac{k_x k_z}{k^2} \\ -\varepsilon'' + n^2 \frac{k_x k_y}{k^2} & \varepsilon' - n^2 \left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right) & n^2 \frac{k_y k_z}{k^2} \\ n^2 \frac{k_z k_x}{k^2} & n^2 \frac{k_z k_y}{k^2} & \varepsilon_{\parallel} - n^2 \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où $n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$ est le carré de l'indice optique du plasma.

2.2.3 Ondes EM parallèles au champ magnétique

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons volontairement à l'étude des ondes électromagnétiques se propageant parallèlement au champ magnétique, i.e. $\vec{k} \parallel \vec{B}$. Nous allons retrouver, dans ce cadre limité, les principaux types d'ondes détectées dans les plasmas. Restreindre le cœur d'onde à une propagation parallèle au champ magnétique revient donc à écrire $\vec{k} = k_z \vec{e}_z$ et donc à poser $k_x = k_y = 0$. Le tenseur de propagation se simplifie alors pour prendre la forme suivante

$$\overleftrightarrow{\Lambda} = \begin{bmatrix} \varepsilon' - n^2 & \varepsilon'' & 0 \\ -\varepsilon'' & \varepsilon' - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

En l'absence de courant extérieur, l'équation de propagation est $\overleftrightarrow{\Lambda} \cdot \vec{E} = \vec{0}$, ce qui implique que le déterminant du tenseur de propagation est nul, i.e.

$$\varepsilon_{\parallel} [(\varepsilon' - n^2)^2 + \varepsilon''^2] = 0 \quad (2.37)$$

La première solution évidente de cette équation est bien-sûr $\varepsilon_{\parallel} = 0$ ce qui pose simplement que $\omega^2 = \sum_{\alpha} \omega_{p,\alpha}^2 \simeq \omega_{p,e}^2$. Cette solution correspond à la propagation d'ondes électromagnétique en phase avec les oscillations des électrons car ces derniers possèdent la pulsation plasma la plus élevée de par leur faible masse. L'autre type de solution correspond à l'existence de deux valeurs de l'indice optique du plasma qui suit la relation $n_{\pm}^2 = \varepsilon' \pm i\varepsilon''$. Il est important de noter ici que les deux valeurs de l'indice optique sont bien réelles car l'expression de ε'' est un nombre imaginaire pur. Les vecteurs propres associés à chacune de ces trois valeurs sont obtenus en résolvant le système d'équation $\overleftrightarrow{\Lambda} \vec{E} = \vec{0}$.

• Oscillations du plasma :

En prenant un champ électrique quelconque $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ et en l'injectant dans l'équation de propagation dans le cas où $\varepsilon_{\parallel} = 0$, on obtient immédiatement le système d'équations

$$\begin{cases} (\varepsilon' - n^2)E_x + \varepsilon''E_y = 0 \\ -\varepsilon''E_x + (\varepsilon' - n^2)E_y = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

La seule solution permettant à E_x et E_y d'être non-nuls correspond à l'égalité $n^2 = \varepsilon' \pm i\varepsilon''$ ce qui n'est pas vérifié pour les oscillations du plasma. On voit donc que pour ces oscillations le vecteur propre sera un champ électrique strictement parallèle au champ magnétique.

• Bi-réfringence du plasma :

Nous avons identifié que deux valeurs de l'indice optique satisfaisaient l'équation de propagation des ondes dans le plasma. Cela revient à dire que le plasma est bi-réfringent, c'est à dire que

2.2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS

la propagation d'une onde ne se fera pas de la même façon suivant sur quels vecteurs propres nous décomposons cette onde. Le vecteur propre correspondant à la valeur n_+ , que nous noterons $\vec{E}^+ = (E_x^+, E_y^+, E_z^+)$ vérifie le système d'équation suivant

$$\begin{cases} (\varepsilon' - n_+^2)E_x^+ + \varepsilon''E_y^+ = 0 \\ -\varepsilon''E_x^+ + (\varepsilon' - n_+^2)E_y^+ = 0 \\ \varepsilon_{\parallel}E_z^+ = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

ce qui mène à $E_z^+ = 0$ et $E_y^+ = -E_x^+(\varepsilon' - n_+^2)/\varepsilon'' = iE_x^+$. Cette solution où les composantes E_x et E_y sont déphasés de $\pi/2$ correspond à une onde circulaire droite perpendiculaire au champ magnétique. Pour la seconde valeur propre, n_- , le même raisonnement nous montre également que $E_z^- = 0$ mais aussi que $E_y^- = -E_x^-(\varepsilon' - n_-^2)/\varepsilon'' = -iE_x^-$, ce qui correspond à une onde perpendiculaire au champ magnétique et polarisée circulaire gauche.

Ce qui est important de retenir, c'est que ces deux ondes polarisée circulairement ne le font pas avec le même indice optique ($n_+ \neq n_-$) ce qui va distordre les ondes traversant le plasma. Un exemple permettant d'illustrer ce phénomène est celui d'une onde polarisée rectilignement au moment à son entrée dans le plasma. Le champ électrique de cette onde s'écrira par exemple, si elle est polarisée selon la direction x , comme $\vec{E}(z, t) = E_o\vec{e}_x \exp(i(\omega t - kz))$. En décomposant cette onde sur les deux vecteurs propres, on obtient alors à l'entrée du plasma, repérée par la position $z = 0$, l'expression du champ électrique

$$\vec{E}(z = 0, t) = \frac{E_o}{2} \left(\underbrace{\exp(i(\omega t))\vec{e}_x + i \exp(i(\omega t))\vec{e}_y}_{\text{onde circulaire droite}} + \underbrace{\exp(i(\omega t))\vec{e}_x - i \exp(i(\omega t))\vec{e}_y}_{\text{onde circulaire gauche}} \right) \quad (2.40)$$

Chacune des ondes circulaire va se propager sans déformation avec chacune un indice optique différent (n_+ et n_-). L'indice optique étant directement relié à la vitesse de phase de l'onde, cela va se traduire par un déphasage croissant entre les deux ondes circulaires au fur et à mesure de la progression des ondes. Si on appelle d l'épaisseur de plasma à travers laquelle l'onde se propage, on aura l'expression du champ électrique

$$\vec{E}(z = d, t) = \frac{E_o}{2} \left[e^{i\omega(t-n_+d/c)}\vec{e}_x + i e^{i\omega(t-n_+d/c)}\vec{e}_y + e^{i\omega(t-n_-d/c)}\vec{e}_x - i e^{i\omega(t-n_-d/c)}\vec{e}_y \right] \quad (2.41)$$

En posant $n_+ = n_o + \Delta n$ et $n_- = n_o - \Delta n$, on peut factoriser l'expression pour obtenir le champ électrique total

$$\vec{E}(z = d, t) = \frac{E_o}{2} \left[e^{i\omega(t-n_o d/c)}\vec{e}_x \left(e^{i\omega\Delta n d/c} + e^{-i\omega\Delta n d/c} \right) - e^{i\omega(t-n_o d/c)}\vec{e}_y i \left(e^{i\omega\Delta n d/c} - e^{-i\omega\Delta n d/c} \right) \right] \quad (2.42)$$

ce qui se traduit plus simplement par

$$\vec{E}(z = d, t) = E_o \left[e^{i\omega(t-n_o d/c)} \cos(\omega\Delta n d/c)\vec{e}_x + e^{i\omega(t-n_o d/c)} \sin(\omega\Delta n d/c)\vec{e}_y \right] \quad (2.43)$$

A la sortie du plasma, l'onde est à nouveau polarisée rectilignement mais cette dernière a subi une rotation de sa direction de polarisation d'un angle $\omega\Delta n d/c$. Ce phénomène provoquant une rotation des directions de polarisation des ondes est appelée **rotation de Faraday**. Cette rotation est induite par la bi-réfringence du plasma qui apparait dès qu'un champ magnétique est présent dans le plasma.

Quelques types d'ondes dans les plasmas d'électrons/ions

Pour finir ce chapitre portant sur les caractéristiques des ondes électromagnétiques dans les plasmas, nous allons maintenant exprimer la valeur de l'indice optique du plasma en fonction de la valeur de la pulsation des ondes considérés. En effet, le milieu étant dispersif, l'indice optique varie en fonction de la fréquence de l'onde, cette dernière n'ayant pas les mêmes caractéristiques.

- Ondes électroniques :

Ces ondes sont celles dont la pulsation dépasse la pulsation plasma totale du plasma. Dans le cadre des plasmas non-magnétisés, nous avons montré que ces ondes pouvaient se propager librement et que le plasma possédait alors un indice optique n tel que $n^2 = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$. Dans le cadre des plasmas magnétisés, les deux valeurs de l'indice optique s'écrivent pour $\omega > \omega_{pe} > |\omega_{ce}| \gg \omega_{pi}, \omega_{ci}$

$$n_{\pm}^2 \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \pm \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} (\omega \pm \omega_{ce}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})} \quad (2.44)$$

On retrouve une expression de l'indice optique proche de celle des milieux non-magnétisés hormis la présence de la pulsation cyclotron des électrons. Dans le cas où le champ magnétique s'annule, on retrouve exactement la relation de dispersion des milieux non-magnétisés. Comme dans le cas non-magnétisé, ces ondes auront une vitesse de phase supérieure à celle de la lumière dans le vide mais une vitesse de groupe inférieure à cette dernière.

- Ondes "Whistler" :

Ce type d'onde n'existe pas dans les plasmas non-magnétisés car leur domaine d'existence est tel que $\omega_{ci} \ll \omega < |\omega_{ce}| \ll \omega_{pe}$. Dans cette gamme de pulsation, l'onde ne pourrait se propager dans un plasma non-magnétisé car, comme nous l'avons vu, l'absence de champ magnétique entraînerait une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation. Quand un champ magnétique à grande échelle est présent alors les composantes du tenseur diélectrique sont

$$\epsilon' = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad \epsilon'' = -i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} - i \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \quad (2.45)$$

Les plasmas magnétisés possèdent, pour la grande majorité, une densité de particules et un champ magnétique tels que la pulsation plasma $\omega_{p\alpha}$ est toujours beaucoup plus grande que la pulsation cyclotron $|\omega_{c\alpha}|$. A cause de la différence de masse entre ions et électrons, les pulsations plasmas sont telles que $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ et $|\omega_{ce}| \gg \omega_{ci}$. Dans la gamme d'existence des ondes Whistler, nous avons $\omega_{ci} \ll \omega < |\omega_{ce}| \ll \omega_{pe}$. Il est important de préciser ici que pour ces ondes la pulsation ω est toujours inférieure à $|\omega_{ce}|$ mais pas beaucoup plus petite que celle-ci ce qui permet d'avoir comme ordre de grandeur $\omega \lesssim |\omega_{ce}|$. Avec ces hypothèses, nous pouvons simplifier l'expression de ϵ' en estimant les ordres de grandeurs de chaque terme

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} &> \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \gg 1 \\ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} &\sim -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ce}^2} \end{aligned} \quad (2.46)$$

On voit alors que le second terme, associé aux ions, est très inférieur au premier et que le premier terme est très grand devant l'unité. On a alors une expression simplifiée de ϵ'

$$\epsilon' \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \quad (2.47)$$

2.2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS

L'autre composante du tenseur diélectrique ε'' possède deux termes dont on peut estimer l'ordre de grandeur de la même manière

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} &> \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \\ \left| \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \right| &\sim \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{|\omega_{ce}|^3} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \right) \ll \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'expression de ε'' devient alors en ne gardant que le premier terme

$$\varepsilon'' \simeq -i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} \quad (2.49)$$

L'indice optique du milieu s'exprime alors comme

$$n_{\pm}^2 \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} (\omega \pm \omega_{ce}) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\mp \omega_{ce})} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\mp |\omega_{ce}| - \omega)} \quad (2.50)$$

Pour que l'onde se propage, il faut que le carré de l'indice optique n^2 soit positif (sinon le vecteur d'onde est imaginaire). On voit alors qu'une des valeurs de n^2 est bien positive tant que la pulsation de l'onde vérifie $\omega < |\omega_{ce}|$,

$$n^2 \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(|\omega_{ce}| - \omega)} \quad (2.51)$$

Quand on exprime la vitesse de phase de ces ondes on constate que

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{\frac{\omega(|\omega_{ce}| - \omega)}{\omega_{pe}^2}} \ll c \quad (2.52)$$

alors que la vitesse de groupe de ces ondes sera

$$v_g = \frac{2c\omega^{1/2}(|\omega_{ce}| - \omega)^{3/2}}{\omega_{pe}|\omega_{ce}|} \sim \frac{2c\sqrt{\omega|\omega_{ce}|}}{\omega_{pe}} \ll c \quad (2.53)$$

Ces ondes sont appelées ondes "Whistler" ou "Hélicon" car les modes les plus aigus (de pulsations plus élevées) vont plus vite que les modes graves. Ce type d'onde est détecté par exemple dans les orages se produisant dans la ionosphère. Le nom "Whistler" de ces ondes a été choisi en raison de l'arrivée décalée des aigus et des graves semblable à celle d'un sifflet ou d'un hélicon (instrument de musique pouvant imiter ce type de son).

• Ondes d'Alfvén :

Le dernier type d'ondes que nous allons décrire correspond aux ondes de très basses fréquences. Ces ondes sont caractérisées par des pulsations inférieures à toutes les pulsations caractéristiques $\omega \ll (\omega_{ci}, \omega_{pi}, |\omega_{ce}|, \omega_{pe})$. L'expression exacte du carré de l'indice optique du plasma est :

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \pm \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} \pm \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \quad (2.54)$$

ce qui peut aussi se réécrire en factorisant comme

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2(\omega \pm \omega_{ce})}{\omega(\omega_{ce}^2 - \omega^2)} + \frac{\omega_{pi}^2(\omega \pm \omega_{ci})}{\omega(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \quad (2.55)$$

En simplifiant cette expression entre numérateur et dénominateur, on arrive à

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ci})} \quad (2.56)$$

Sachant que la pulsation des ondes d'Alfvén est petite par rapport à toutes les pulsations caractéristiques du plasma, on peut former une expression que l'on approximera par un développement limité au premier ordre en $\omega/\omega_{ci} \ll 1$ et $\omega/|\omega_{ce}| \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce}(\mp 1 + \omega/\omega_{ce})} &\simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce}}(\mp 1 - \omega/\omega_{ce}) \\ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\omega_{ci}(\mp 1 + \omega/\omega_{ci})} &\simeq \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\omega_{ci}}(\mp 1 - \omega/\omega_{ci}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

En incluant ces expressions dans celle de l'indice optique nous arrivons à

$$n_{\pm}^2 \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce}} \left(\mp 1 - \frac{\omega}{\omega_{ce}} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\omega_{ci}} \left(\mp 1 - \frac{\omega}{\omega_{ci}} \right) \quad (2.58)$$

Il est important de noter ici que les rapports $\omega_{pe}^2/\omega_{ce} = -\omega_{pi}^2/\omega_{ci}$ en raison de la neutralité électrique du plasma. Cela permet alors d'écrire le carré de l'indice optique comme

$$n_{\pm}^2 \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\omega_{ci}} \left(\mp 1 \pm 1 - \frac{\omega}{\omega_{ce}} + \frac{\omega}{\omega_{ci}} \right) = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\omega_{ci}} \left(\frac{\omega}{\omega_{ci}} - \frac{\omega}{\omega_{ce}} \right) \quad (2.59)$$

Les deux termes dans la parenthèse ne sont pas du même ordre de grandeur car $\omega_{ci} \ll |\omega_{ce}|$. On peut ainsi négliger le terme associé aux électrons pour n'avoir que seulement qu'une contribution majoritaire à l'expression de l'indice optique

$$n^2 \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = 1 + \frac{\mu_0 n_i m_i c^2}{B_o^2} \quad (2.60)$$

Plusieurs choses importantes sont à remarquer pour les ondes d'Alfvén. La première évidence est que l'indice optique pour les très basses fréquences ne dépend plus de la fréquence de l'onde : le plasma devient alors non-dispersif et vitesse de groupe et vitesse de phase sont égales. La deuxième chose à remarquer est que dans ce domaine des très basses fréquences, le plasma n'est plus biréfringent car les modes de polarisation circulaires gauche et droite se propagent exactement à la même vitesse. La vitesse de phase (et de groupe) des ondes d'Alfvén est égale à

$$v_{ph} = V_A = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{n_i m_i c^2 \mu_0}{B^2}}} \quad (2.61)$$

Dans la majorité des plasmas rencontrés dans l'Univers, la densité d'énergie magnétique est très inférieure à la densité volumique d'énergie de masse du plasma, ce qui permet d'obtenir la formule classique de la vitesse d'Alfvén des ondes de très basses fréquences :

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{n_i m_i \mu_0}} \quad (2.62)$$

2.2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS

Dans le prochain chapitre nous allons expliciter le cadre de description de la magnétohydrodynamique (MHD) qui permet de décrire un plasma dans le registre des phénomènes de très basses fréquences (et donc de grande longueur d'onde). Nous verrons que la description MHD nous permet de retrouver l'expression des ondes d'Alfvén qui caractérisent la propagation des perturbations du plasma sur les grandes échelles spatiales.

3

Introduction à la MagnétoHydroDynamique

Sommaire

3.1	Equations cinétiques de Vlasov	35
3.2	La MHD : validité et équations de conservation	37
3.2.1	Domaine de validité de la MHD : Hypothèses	38
3.2.2	Equations de conservation de la MHD multi-fluides	39
3.2.3	Le modèle MHD à un fluide	41
3.3	Ondes MHD	43

Dans ce chapitre, nous allons présenter un formalisme permettant de décrire à grande échelle la dynamique du plasma et du champ électromagnétique couplé à ce dernier. Ce formalisme baptisé magnétohydrodynamique (MHD) permet de modéliser le comportement d'ensemble et à grande échelle du système plasma et champ électromagnétique au prix d'hypothèses simplificatrices dont nous allons dans un premier temps délimiter les conditions de validité. Avant de présenter ces hypothèses et leur cadre d'application, nous allons présenter les équations cinétiques régissant l'évolution de la fonction de distribution du plasma puis nous allons détailler comment l'on obtient les équations de la MHD.

3.1 Equations cinétiques de Vlasov

En théorie cinétique, les propriétés du plasma sont entièrement déterminées par la connaissance de la fonction de distribution de chaque espèce (ions, électrons) f_α . Ces fonctions de distribution représentent la densité de particules de chaque espèce dans l'espace des phases $(\vec{x}, \vec{p} = m_\alpha \vec{v})$ à six dimensions. Ainsi la quantité $f_\alpha dV d^3p$, où dV est un élément de volume de l'espace et d^3p un élément de volume de l'espace des quantités de mouvement, représente le nombre de particules situées dans le volume de l'espace des phases $dV d^3p$.

L'écriture la plus générale de la fonction de distribution d'une espèce chimique est celle qui consiste à faire un décompte exhaustif de la position dans l'espace des phases de chaque particule. Ainsi on peut écrire la fonction de distribution de l'espèce α comme

$$f_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) \quad (3.1)$$

où N_α est le nombre total de particules de l'espace α et où δ est la distribution de Dirac¹. La position $\vec{x}_j(t)$ et la quantité de mouvement $\vec{p}_j(t)$ de la particule j sont régis par la relation fondamentale de la dynamique $\dot{\vec{x}}_j = \vec{v}_j$ et $\dot{\vec{p}}_j = \vec{F}_{tot}$. Ces relations de mécanique classique sont valides tant qu'une

1. La fonction de Dirac $\delta(y - a)$ est égale à 1 si $y = a$ et 0 sinon

CHAPITRE 3. INTRODUCTION À LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

description quantique des particules n'est pas nécessaire. Ainsi nous ne pourrions avoir une localisation parfaite de chaque particule en vertu du principe d'incertitude d'Heisenberg qui stipule que la taille du paquet d'onde associée à une particule dans l'espace multiplié par la taille de la fonction d'onde dans l'espace des quantités de mouvement de peut être inférieure au quantum d'action h . Afin de prendre en compte ce principe, la théorie cinétique considère donc une moyennisation de l'expression précédente sur des cellules de l'espace des phases dont le volume est supérieure à h^3 . La fonction de distribution devient alors

$$f_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) = \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) \right\rangle_{h^3} \quad (3.2)$$

où $\langle \rangle$ symbolise le décompte sur chacune des cellules de l'espace des phases définies précédemment. Pour chaque espèce chimique, on cherche à avoir une équation nous permettre de prédire l'évolution temporelle de la fonction de distribution f_α . Pour ce faire, nous allons dériver par rapport au temps l'équation précédente

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left(\frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t))}{\partial t} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) + \frac{\partial \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right) \right\rangle_{h^3} \quad (3.3)$$

ce qui amène la relation

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left(\frac{\partial(\vec{x} - \vec{x}_j(t))}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t))}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) + \frac{\partial(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial \vec{p}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right) \right\rangle_{h^3} \quad (3.4)$$

qui se nomme l'équation de Klimontovich. Sachant que les variables de position dans l'espace des phases (\vec{x}, \vec{p}) sont indépendantes du temps on arrive alors à l'expression suivante

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = - \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left(\frac{d\vec{x}_j(t)}{dt} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t))}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) + \frac{d\vec{p}_j(t)}{dt} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial \vec{p}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right) \right\rangle_{h^3} \quad (3.5)$$

En utilisant les relations de la dynamique des particules on arrive facilement à l'expression suivante

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = - \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left(\vec{v}_j \cdot \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t))}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) + \vec{F}_{tot} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial \vec{p}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right) \right\rangle_{h^3} \quad (3.6)$$

Le premier terme du membre de droite peut s'exprimer en utilisant la propriété des distributions de Dirac $\vec{p}_j \delta(\vec{p} - \vec{p}_j) = \vec{p} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j)$ et ainsi on arrive à l'expression suivante

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) \right\rangle_{h^3} - \left\langle \vec{F}_{tot} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t)) \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right\rangle_{h^3} \quad (3.7)$$

où l'on retrouve l'équation de Boltzmann pour l'espèce chimique α . La force totale s'appliquant sur les particules sont de deux natures : les forces extérieures au plasma (gravité et/ou force électromagnétique) et les forces d'interaction entre particules comme dans le cas de la diffusion coulombienne. Dans le cas des forces extérieures, leurs expressions de dépendent pas de la position dans l'espace des phases des particules. Ainsi on peut sortir de la moyennisation $\langle \rangle$ les

forces extérieures qui, de plus agissent sur des échelles plus grande que les cellules fondamentales de l'espace des phases.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} = - \left\langle \sum_{j=1}^{N_\alpha} \vec{F}_{int} \cdot \frac{\partial \delta(\vec{p} - \vec{p}_j(t))}{\partial \vec{p}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) \right\rangle_{h^3} = \sum_{\beta} \mathcal{C}(f_\alpha, f_\beta) \quad (3.8)$$

où \mathcal{C} est l'opérateur d'interaction entre les différentes particules du plasma. Dans les plasmas standards, nous avons déjà noté que ces derniers étaient très dilués et que l'interaction principale entre les particules se produisant au travers de la diffusion coulombienne. Afin d'apprécier la grandeur de cet opérateur d'interaction, on peut essayer d'en estimer l'ordre de grandeur en posant que dans la sphère de Debye, l'écart Δf_α à la fonction de distribution d'équilibre $f_{o,\alpha}$ est régie par la statistique de Maxwell-Boltzmann qui nous indique que

$$\frac{\Delta f_\alpha}{f_{o,\alpha}} \equiv \frac{q\lambda_D E}{k_B T} \quad (3.9)$$

où E est le champ électrique de l'ion autour duquel on considère la sphère de Debye et λ_D est la longueur de Debye du plasma. C'est l'écart à la fonction de distribution à l'équilibre qui engendre la diffusion coulombienne, ce qui fait que l'on peut écrire l'opérateur d'interaction comme

$$\mathcal{C} \equiv -\vec{F}_{int} \cdot \frac{\partial(f_{o,\alpha} + \Delta f_\alpha)}{\partial \vec{p}} \sim -qE \frac{\Delta f_\alpha}{m_\alpha v_e \alpha} = -\frac{q^2 n \varepsilon_p f_{o,\alpha}}{\varepsilon_o m_\alpha v_\alpha \lambda_D} \quad (3.10)$$

où $\varepsilon_p \ll 1$ est le "petit" paramètre du plasma vu précédemment et mesurant le rapport entre la densité d'énergie électromagnétique du plasma par rapport à sa densité d'énergie cinétique d'agitation thermique. En identifiant les termes présents dans l'estimation obtenue, on montre facilement que

$$|\mathcal{C}| \sim \omega_{p,\alpha} \varepsilon_p f_{o,\alpha} \equiv \nu f_{o,\alpha} \ll f_{o,\alpha} \quad (3.11)$$

avec ν la fréquence de diffusion coulombienne très petite par rapport aux autres fréquences caractéristiques du plasma (voir cours précédents). Au terme de cette évaluation, on voit que pour les plasmas "classiques", leur faible densité de particules amène à pouvoir négliger la présence d'interactions locales entre particules et donc à faire tendre $\mathcal{C} \rightarrow 0$. Dans ce cadre l'équation de Klimontovich devient alors l'équation de Vlasov qui traduit la conservation de la densité de particules dans l'espace des phases

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (3.12)$$

Dans le cadre d'un plasma, la force extérieure est principalement la force électromagnétique $\vec{F}_{est} = q_\alpha(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Il est à noter que cette équation, de par l'absence de collisions dissipatives entre particules est isentropique et donc qu'elle est réversible dans le temps. Il y a actuellement de nombreux travaux menés sur les types de solutions attendues de cette équation qui intéressent la communauté des plasmas, en particulier dans le cadre des plasmas de fusion.

3.2 La MHD : validité et équations de conservation

Comme nous l'avons évoqué dans le préambule de ce chapitre, la MHD est un formalisme qui permet de décrire mathématiquement le comportement à grande échelle d'un plasma magnétisé. Ce formalisme généralise la description à grande échelle d'un fluide neutre donnée par l'hydrodynamique. La nature des plasmas va nous amener à considérer quelques hypothèses supplémentaires par rapport à l'hydrodynamique pour prendre en compte la nature ionisée du gaz ainsi que son interaction avec le champ électromagnétique ambiant.

3.2.1 Domaine de validité de la MHD : Hypothèses

Dans un fluide neutre, les différentes espèces d'atomes et de molécules sont neutres, ce qui amène, dans ses versions les plus simples, à ne considérer les différents constituants du fluide que comme des entités de masse différentes. Dans le cas d'un plasma, les espèces chimiques présentes (ions, neutres et électrons) diffèrent beaucoup plus par leur masse mais également par leurs charges électriques. Afin de pouvoir obtenir une description du plasma comme un fluide unique, nous allons en premier lieu poser une hypothèse importante : nous allons considérer que le plasma est localement neutre, c'est à dire qu'en chaque point, nous avons autant de charges positives que de charges négatives. Nous avons vu précédemment que ce n'est pas tout à fait vérifié à l'échelle de la sphère de Debye où un champ électrostatique est présent. Par contre nous avons également vu qu'au delà de la sphère de Debye, ce potentiel électrique s'annulait et que le plasma pouvait être considéré comme neutre. Ce constat nous permet dès à présent de restreindre le domaine de validité de la description MHD : elle ne peut être valide que sur des échelles spatiales sensiblement plus grande que la longueur de Debye. Si on appelle l_o la plus petite longueur sur laquelle la MHD est valide on aura $l_o \gg \lambda_D$.

En ce qui concerne les échelles de temps caractéristiques du plasma, la description MHD ne rend pas compte des mouvements microscopiques des particules, c'est à dire qu'elle suppose, comme en hydrodynamique, que le mouvement de ces particules est beaucoup plus rapide que le temps caractéristique de déplacement de l'ensemble du plasma. La dynamique individuelle de chaque espèce de particules est régie par deux temps caractéristiques : le temps de rotation de la particule autour du champ magnétique $\omega_{c\alpha}^{-1}$ et le temps d'oscillation des perturbations à l'équilibre donné par l'inverse de la pulsation plasma $\omega_{p\alpha}^{-1}$. Le plus petit temps caractéristique descriptible par la MHD τ_o sera donc beaucoup plus grand que le plus grand des temps cités précédemment. Dans le cas d'un plasma classique composé de ions-électrons, le temps caractéristique le plus grand est ω_{ci}^{-1} en raison de la masse des ions ainsi que de l'amplitude du champ magnétique. La MHD sera donc capable de décrire tout phénomène dont le temps caractéristique sera supérieur à $\tau_o \gg \omega_{ci}^{-1}$. Si l'on souhaite relier l_o et τ_o il nous faut déterminer à quelle vitesse les perturbations locales de densité ou de champ magnétique se propage à travers le plasma. Les perturbations se propagent sous la forme d'ondes basse fréquence en vertu de la contrainte sur τ_o . Nous avons vu dans le chapitre précédent que les ondes basse fréquence qui vérifient $\omega \ll \omega_{ci}$ sont les ondes d'Alfvén donc la vitesse de propagation V_A est

$$V_A^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_o n_o m_i c^2}{B_o^2}} \simeq \frac{B_o^2}{\mu_o n_o m_i} \quad (3.13)$$

où n_o est la densité volumique du plasma et B_o le champ magnétique. On a naturellement le lien entre longueur minimale et temps minimal pouvant être décrit par la MHD $l_o = V_A \tau_o$. Cette échelle spatiale minimale nous permet également de pouvoir estimer la densité de courant maximale J_o présent dans le plasma grâce à la relation $\mu_o \vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$ qui nous permet d'estimer que $J_o \equiv B_o / \mu_o l_o$. Dans un plasma composé d'électrons et d'ions, cette densité de courant électrique est égale à $J_o = n_i q_i \|\vec{u}_i - \vec{u}_e\|$. L'ordre de grandeur de l'écart de vitesses moyennes entre électrons et ions peut être évalué en formant le rapport

$$\frac{\|\vec{u}_i - \vec{u}_e\|}{V_A} = \frac{B_o}{\mu_o l_o n_i q_i V_A} = \frac{V_A}{\omega_{ci} l_o} \ll 1 \quad (3.14)$$

Comme nous pouvons le voir l'écart des vitesses moyennes entre électrons et ions est relativement faible comparé à la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén. Cette condition est importante car la vitesse d'Alfvén caractérise la vitesse de propagation de perturbations du champ magnétique

3.2.2 Equations de conservation de la MHD multi-fluides

Après avoir défini le domaine de validité d'application de la MHD, nous allons maintenant écrire les différentes lois de conservation du plasma en nous concentrant plus particulièrement sur la densité de masse puis sur la quantité de mouvement du plasma. Pour ce faire nous allons partir de l'équation de Vlasov qui permet de décrire de façon complète le comportement du plasma à toutes les échelles. Dans le cadre de la MHD, seules les plus grandes échelles spatiales nous intéressent (i.e. supérieures à l_o). Nous allons donc prendre en compte dans notre description toutes les particules, situées en un point de l'espace donné, c'est à dire en intégrant l'équation de Vlasov de l'espèce chimique α sur l'espace des quantités de mouvement

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} \right] d^3p = 0 \quad (3.15)$$

Conservation de la masse

La densité volumique de quantité de mouvement moyenne de l'espèce chimique α est définie comme

$$n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \vec{p} d^3p \quad (3.16)$$

où n_α est la densité volumique et \vec{u}_α la vitesse moyenne des particules de l'espèce chimique α . Le temps et la variable d'espace \vec{x} étant indépendantes de la coordonnée de quantité de mouvement \vec{p} , on peut donc intervertir l'intégration et les opérateurs de dérivée sur t et \vec{x} . On obtient alors la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha d^3p \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \frac{\vec{p}}{m_\alpha} d^3p \right) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} F_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} d^3p = 0 \quad (3.17)$$

Le premier terme fait intervenir la densité moyenne de l'espèce chimique α et le second la quantité de mouvement moyenne de l'espace α . Le dernier terme est nul comme il est aisé de le voir par intégration par partie

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) + [F_{ext} f_\alpha]_{-\infty}^{+\infty} - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \frac{\partial \vec{F}_{ext}}{\partial \vec{p}} d^3p = 0 \quad (3.18)$$

En effet, le troisième terme est nul car la fonction de distribution f_α tend vers zéro quand $p \rightarrow \infty$ et le quatrième s'annule également car $\partial(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})/\partial \vec{p} = 0$. On obtient finalement la même équation de conservation de la masse qu'en hydrodynamique, c'est à dire

$$\boxed{\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0} \quad (3.19)$$

On retrouve bien là l'expression d'une loi de conservation où une dérivée temporelle d'une fonction est égale à l'opposé de la divergence d'un flux.

Conservation de la quantité de mouvement

Afin d'exprimer la conservation de la quantité de mouvement de l'espèce α , nous allons maintenant appliquer la même méthodologie que pour la conservation de la masse mais en prenant en compte l'équation de Vlasov multipliée par la quantité de mouvement \vec{p}

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \vec{p} f_\alpha}{\partial t} + \vec{p} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} \right) + \vec{p} \left(\vec{F}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} \right) \right] d^3p = 0 \quad (3.20)$$

En effet cela fait apparaître dans le terme de dérivée temporelle la quantité de mouvement moyenne que nous avons défini précédemment. A ce stade plusieurs manipulations mathématiques sont à prendre en compte pour faire apparaître l'équation MHD sous sa forme conservative. La première manipulation concerne le second terme que nous allons transformer en divergence grâce à la relation $\vec{p}\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{p}\overleftarrow{v})$ où $\vec{p}\overleftarrow{v}$ est un tenseur de rang 2 (i.e. une matrice carrée 3x3). L'équation devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{p} f_{\alpha} d^3 p + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}\overleftarrow{v} f_{\alpha} d^3 p \right) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{p} \left(\vec{F}_{ext} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{p}} \right) d^3 p = 0 \quad (3.21)$$

Le second terme de l'équation est très riche car plusieurs entités physiques y sont cachées. La première d'entre elles est la pression thermique associée au mouvement des particules. En effet si toutes les particules avaient la même vitesse que la vitesse moyenne \vec{u} alors l'ensemble s'écoulerait sans aucune agitation thermique, c'est à dire avec une température nulle. Bien évidemment ça n'est pas le cas et la pression thermique est associée avec l'étalement de la fonction de distribution autour de la valeur moyenne de vitesse. L'écart quadratique apparaissant dans la fonction de distribution Maxwelllienne $\exp(-(\vec{p} - \vec{u}_{\alpha})^2/k_B T)$ est l'énergie d'agitation thermique $k_B T$. On voit bien que plus la température est grande et plus les particules ont des vitesses qui peuvent s'écarter de leurs valeurs moyennes et plus la pression thermique sera grande. La pression thermique de l'espèce α est donc définie par un tenseur de pression $\overleftrightarrow{P}_{\alpha}$ dont l'expression est (\vec{U} est la vitesse moyenne de l'ensemble des espèces chimiques)

$$\overleftrightarrow{P}_{\alpha} = m_{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v} - \vec{U})(\overleftarrow{v} - \overleftarrow{U}) f_{\alpha} d^3 p \quad (3.22)$$

On voit sur cette pression que si la température est nulle alors f_{α} est assimilable à une fonction de Dirac centrée en $\vec{v} = \vec{U}$ et que la pression thermique est nulle. Le second terme peut être modifié pour faire apparaître ce tenseur de pression :

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}\overleftarrow{v} f_{\alpha} d^3 p &= m_{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v} - \vec{U})(\overleftarrow{v} - \overleftarrow{U}) f_{\alpha} d^3 p \\ &+ m_{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\vec{U}(\overleftarrow{v} - \overleftarrow{U}) + (\vec{v} - \vec{U})\overleftarrow{U} + \vec{U}\overleftarrow{U} \right] f_{\alpha} d^3 p \\ &= \overleftrightarrow{P}_{\alpha} + m_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{U}\overleftarrow{u}_{\alpha} + \overleftarrow{u}_{\alpha}\vec{U} - \vec{U}\overleftarrow{U}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le dernier terme de l'équation concerne la prise en compte de la force électromagnétique $\vec{F}_{ext} = q_{\alpha}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. En utilisant la même relation mathématique que pour le terme précédent on transforme le dernier terme en

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{p} q_{\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{p}} d^3 p &= m_{\alpha} q_{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f_{\alpha} \overleftarrow{v} \right) d^3 p \\ &- m_{\alpha} q_{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \overleftarrow{v} \right) d^3 p \end{aligned} \quad (3.24)$$

La première intégrale du membre droit de l'équation est nulle en vertu du théorème de Green-Ostrogradki qui stipule que

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f_{\alpha} \overleftarrow{v} \right) d^3 p = \oint_{-\infty}^{+\infty} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overleftarrow{v} f_{\alpha} \right) d^2 p = \vec{0} \quad (3.25)$$

car la surface fermée délimitant l'intégrale se trouve à $p \rightarrow \pm\infty$ où la fonction de distribution $f_\alpha \rightarrow 0$. Il ne nous reste plus que le dernier terme à traiter, ce que nous allons faire en le décomposant en deux sous-termes

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \overleftarrow{v} \right) d^3p &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \right) d^3p \\ &+ \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{p}} d^3p \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dans le membre de droite, le premier terme est nul car \vec{E} ne dépend pas de \vec{v} et $\partial(\vec{v} \wedge \vec{B})/\partial \vec{p} = 0$ (car la composante selon une direction de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne dépend pas de la composante de la vitesse dans cette direction!). L'autre terme n'est pas nul et son expression est simple car la dérivée $\partial \vec{v} / \partial \vec{p} = \overleftarrow{1} / m_\alpha$ où $\overleftarrow{1}$ est la matrice identité. L'équation précédente va donc devenir

$$m_\alpha q_\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left((\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \overleftarrow{v} \right) d^3p = n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \wedge \vec{B}) = n_\alpha q_\alpha \vec{E} + \vec{J}_\alpha \wedge \vec{B} \quad (3.27)$$

où \vec{J}_α est la densité de courant électrique associé à l'espèce chimique α .

Maintenant que nous avons traité tous les termes de l'équation de conservation de la quanta de mouvement, nous pouvons récapituler cette équation comme

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\alpha \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\rho_\alpha (\vec{U} \overleftarrow{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \overleftarrow{U} - \vec{U} \overleftarrow{U}) + \overleftarrow{P}_\alpha \right) = n_\alpha q_\alpha \vec{E} + \vec{J}_\alpha \wedge \vec{B}} \quad (3.28)$$

où $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$ est la densité volumique de masse de l'espèce chimique α . Cette équation a bien une structure de loi de conservation avec la présence de termes dus à la présence d'une force extérieure, la force électromagnétique. Le système d'équations de conservation MHD multi-fluides comporte également une équation de conservation de l'énergie qui permet de compléter la description des différentes composantes du plasma. Nous n'aborderons pas, dans le cadre de ce cours, cette équation car nous allons principalement nous focaliser sur la dynamique du plasma dans les différentes applications que nous verrons.

3.2.3 Le modèle MHD à un fluide

Il est possible de simplifier encore la description dynamique du plasma en le décrivant comme un seul fluide qui prend comme caractéristiques les moyennes des différentes espèces le composant. Ainsi nous allons définir des grandeurs moyennes permettant de rendre compte des aspects principaux du plasma. La densité moyenne de masse du plasma

$$\rho = \sum_{\alpha} n_\alpha m_\alpha \simeq n_i m_i \quad (3.29)$$

est dominé par celle des ions en raison du rapport de masse entre ions et électrons. La vitesse moyenne du plasma

$$\vec{U} = \frac{\sum_{\alpha} n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha}{\sum_{\alpha} n_\alpha m_\alpha} \quad (3.30)$$

est elle-aussi dominée par les ions. En effet, nous avons vu que l'écart de vitesse entre les ions et les électrons est faible comparée à la vitesse d'Alfvén. Etant donné l'écart de masse entre ions et

électrons, nous pouvons donc en conclure que $\vec{U} \simeq \vec{u}_i$. La densité de courant moyenne sera donnée par $\vec{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}$ et le tenseur de pression thermique totale sera $\overleftrightarrow{P} = \sum_{\alpha} \overleftrightarrow{P}_{\alpha}$.

Le modèle de MHD à un fluide consiste à ne pas considérer chacune des équations de chaque espèce séparément mais à les ajouter pour pouvoir décrire le plasma comme un fluide moyen dont les caractéristiques sont données par les variables que nous venons de définir. Les équations décrivant ce fluide sont obtenues en additionnant les différentes équations de toutes les espèces chimiques du plasma. En commençant par les équations de conservation de la masse, nous avons

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial n_{\alpha} m_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) \right) = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\rho \vec{U}) = 0} \quad (3.31)$$

L'équation de conservation de l'impulsion du fluide moyen s'obtient avec la même approche

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial \rho_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\rho_{\alpha} (\vec{U} \overleftrightarrow{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} \overleftrightarrow{U} - \vec{U} \overleftrightarrow{U}) + \overleftrightarrow{P}_{\alpha} \right) \right] &= \sum_{\alpha} \left(n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{E} + \vec{J}_{\alpha} \wedge \vec{B} \right) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\rho \vec{U} \overleftrightarrow{U} + \overleftrightarrow{P})} &= \vec{J} \wedge \vec{B} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Il est à noter que le fluide moyen n'est pas soumis directement à la force électrique car il est électriquement neutre pour les phénomènes descriptibles par la MHD. Néanmoins, même si le plasma reste neutre, un champ électrique est tout de même présent dans le plasma et contribue à l'évolution du champ électromagnétique. Dans les plasmas composés d'électrons et d'ions, la loi d'Ohm nous permet de relier le champ électrique aux autres grandeurs MHD. Cette loi est obtenue en considérant l'équation de conservation de l'impulsion pour les électrons. En effet, ces particules sont si légères comparées aux ions que l'on peut négliger les termes d'inertie de l'équation comportant la masse des électrons. Cette simplification consiste à supposer que les électrons s'adaptent très rapidement (de façon quasi instantanée) à la moindre force qui leur est appliquée en comparaison aux ions qui seront beaucoup plus lents à réagir. Si les termes d'inertie sont négligés dans l'équation, on arrive à un équilibre de forces tel que

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \overleftrightarrow{P}_e = n_e q_e \vec{E} + n_e q_e \vec{u}_e \wedge \vec{B} \quad (3.33)$$

Afin de faire apparaître le courant associé au fluide moyen, nous pouvons faire apparaître le courant associé aux ions

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \overleftrightarrow{P}_e \simeq n_e q_e \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} + n_e q_e \vec{U} \wedge \vec{B} \quad (3.34)$$

où nous avons utilisé les relations $n_e q_e = -n_i q_i$ et $\vec{U} \simeq \vec{u}_i$. La loi d'Ohm peut maintenant s'écrire

$$\vec{E} = -\vec{U} \wedge \vec{B} + \frac{\vec{J} \wedge \vec{B} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \overleftrightarrow{P}_e}{n_e |q_e|} \quad (3.35)$$

Le premier terme du membre de droite domine les deux autres. En effet, si on estime le rapport entre ces termes, on constate que

$$\frac{\|\vec{J} \wedge \vec{B}\|}{\|n_e q_e \vec{U} \wedge \vec{B}\|} \sim \frac{B^2}{\mu_0 l_0 n_i q_i U B} = \frac{V_A^2}{U l_0 \omega_{ci}} \ll 1 \quad (3.36)$$

$$\frac{\|\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \overleftrightarrow{P}_e\|}{\|n_e q_e \vec{U} \wedge \vec{B}\|} \sim \frac{C_S^2}{\omega_{ci} l_0 U} \ll 1 \quad (3.37)$$

Ces ordres de grandeur sont vérifiés dans les plasmas usuels, c'est à dire des plasmas suffisamment magnétisé. Dans le cas où le champ magnétique serait très petit par rapport à la pression thermique, le terme comportant le gradient de pression des électrons ne pourrait pas être négligé. Le terme comportant la densité de courant, associé à l'effet Hall, ne deviendrait significatif que dans le cas où le plasma serait au repos, c'est à dire où la vitesse moyenne tendrait vers zéro. Si les conditions physiques du plasma permettent de vérifier toutes les conditions mentionnées alors le plasma se trouve dans un régime de MHD appelé **MHD Idéale**. La loi d'Ohm prend alors la forme particulièrement simple

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{U} \wedge \vec{B}} \quad (3.38)$$

En MHD Idéale, le champ électrique est généré par le mouvement du plasma à travers le champ magnétique ce qui en fait un champ électromoteur. J'insiste ici que le jeu d'équations MHD comporte également une équation d'énergie assurant la conservation de l'énergie totale. Afin de pouvoir fermer les relations entre les grandeurs caractérisant le plasma, une équation d'état est nécessaire afin de relier pression thermique, densité de masse et vitesse du son (i.e. température). L'une des équations d'état les plus utilisée est celle décrivant le plasma comme un fluide isentropique de la même façon qu'en hydrodynamique. Cela se traduit par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (3.39)$$

où $\gamma = C_P/C_V$ est l'indice polytropique du plasma qui est égal à 5/3 pour les plasmas complètement ionisés. Pour cette équation d'état il est aisé de montrer que l'expression de la vitesse du son $C_S^2 = \gamma P/\rho$.

La dernière équation nécessaire pour la description du plasma et du champ électromagnétique concerne l'évolution dans le temps du champ magnétique. Afin de répondre à cette demande, nous pouvons simplement utiliser l'équation de Maxwell-Faraday et la loi d'Ohm

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot (\vec{U} \overleftarrow{B} - \vec{B} \overleftarrow{U})} \quad (3.40)$$

Pour finaliser la présentation des équations MHD, il est important de rappeler que le champ magnétique est un champ à divergence nulle et que donc en plus des équations citées précédemment, il faut prendre en compte la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

3.3 Ondes MHD

La MHD est un formalisme qui permet donc de décrire l'évolution dans le temps du plasma et du champ électromagnétique à l'échelle spatiale macroscopique. Le prix à payer pour obtenir cette description est de pas avoir accès à toute la microphysique, en particulier les phénomènes existants à l'échelle de la sphère de Debye. La nature des ondes se propageant dans le plasma sur les échelles MHD sont des ondes de très basses fréquences et de grande longueur d'onde. Afin de déterminer la structure des ondes MHD, nous allons nous placer dans le contexte le plus simple possible, c'est à dire celui d'un plasma magnétisé au repos et homogène. Dans ces conditions, la densité de masse, la vitesse du fluide, la pression thermique et le champ magnétique pourront s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_o + \delta\rho \\ \vec{U} = \delta\vec{U} \\ P = P_o + \delta P \\ \vec{B} = \vec{B}_o + \delta\vec{B} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

CHAPITRE 3. INTRODUCTION À LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

où les grandeurs notées avec un indice o sont les grandeurs d'équilibre (avec $\vec{U}_o = \vec{0}$) et celles notées avec δ sont les perturbations de faible amplitude qui constituent les ondes MHD. Nous supposons, que la structure de ces perturbations suit une forme en onde plane telle que

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \delta\rho_o e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.42)$$

avec $\delta\rho_o \ll \rho_o$. Les ondes MHD ne sont pas des ondes purement électromagnétiques donc nous ne pouvons pas employer seulement les équations de Maxwell pour déterminer leur relation de dispersion. Nous allons donc utiliser les équations MHD (qui implique les phénomènes électromagnétiques mais également les effets dynamiques de la matière) pour déterminer l'équation de propagation des ondes MHD. La première équation MHD que nous allons linéariser concerne la conservation de la masse qui va devenir

$$\frac{\partial(\rho_o + \delta\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot ((\rho_o + \delta\rho)\delta\vec{U}) = 0 \quad (3.43)$$

Nous allons nous restreindre au termes de premier ordre en perturbation, ce qui nous donne pour l'équation précédente ($\partial\rho_o/\partial t = 0$ car le plasma est à l'équilibre)

$$i\omega\delta\rho - i\vec{k} \cdot \rho_o\delta\vec{U} = 0 \Rightarrow \delta\rho = \frac{\vec{k} \cdot \delta\vec{U}}{\omega} \rho_o \quad (3.44)$$

Le terme proportionnel à $\delta\rho\delta\vec{U}$ n'est pas retenu car il est d'ordre 2. L'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée nous donne un lien supplémentaire entre les diverses perturbations

$$i\omega\rho_o\delta\vec{U} - i\vec{k}\delta P = \delta\vec{J} \wedge \vec{B}_o = \frac{i}{\mu_o} ((\vec{B}_o \cdot \delta\vec{B})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{B}_o)\delta\vec{B}) \quad (3.45)$$

L'équation d'état du gaz nous fournit la dernière relation pour avoir un jeu d'équations complet

$$\frac{\delta P}{\rho_o^\gamma} - \gamma \frac{P_o}{\rho_o^{\gamma+1}} \delta\rho = 0 \quad (3.46)$$

Dans cette dernière équation nous voyons apparaître la vitesse du son C_S comme définie en hydrodynamique $\delta P/\delta\rho = C_S^2 = \gamma P_o/\rho_o$. La dernière équation à linéariser est l'équation d'induction magnétique qui permet d'écrire

$$i\omega\delta\vec{B} = -i \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)\delta\vec{U} - (\vec{k} \cdot \delta\vec{U})\vec{B}_o \right] \quad (3.47)$$

Nous avons maintenant un jeu d'équations complet nous permettant d'écrire l'équation de propagation des ondes. En utilisant la définition de la vitesse du son, nous pouvons exprimer la perturbation en pression en fonction de celle en densité pour n'avoir plus que trois relations pour trois perturbations $\delta\rho, \delta\vec{U}, \delta\vec{B}$:

$$\begin{cases} \delta\rho = \frac{\vec{k} \cdot \delta\vec{U}}{\omega} \rho_o \\ \omega\rho_o\delta\vec{U} - \vec{k}C_S^2\delta\rho = \frac{1}{\mu_o} ((\vec{B}_o \cdot \delta\vec{B})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{B}_o)\delta\vec{B}) \\ \omega\delta\vec{B} = - \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)\delta\vec{U} - (\vec{k} \cdot \delta\vec{U})\vec{B}_o \right] \end{cases} \quad (3.48)$$

En combinant ces trois relations, on arrive une relation très utile pour identifier les différents types d'ondes

$$\omega\rho_o\delta\vec{U} - \vec{k}C_S^2\delta\rho = \frac{(\vec{B}_o \cdot \delta\vec{B})}{\mu_o} \vec{k} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{B}_o}{\omega\mu_o} \left((\vec{k} \cdot \delta\vec{U})\vec{B}_o - (\vec{k} \cdot \vec{B}_o)\delta\vec{U} \right) \quad (3.49)$$

A partir de cette relation nous allons pouvoir décrire les différentes ondes MHD présentes dans le plasma.

Ondes d'Alfvèn

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les ondes d'Alfvèn sont des ondes d'origine électromagnétique se déplaçant le long du champ magnétique. Ici le plasma ne travaille pas et aucune perturbation en densité (et en pression thermique) n'est attendue. Chercher des ondes incompressibles où $\delta\rho = 0$ nous amène immédiatement à voir que ces ondes vérifient alors $\vec{k} \cdot \delta\vec{U} = 0$ d'après la première relation que nous avons obtenue, c'est à dire que la perturbation en vitesse sera toujours perpendiculaire au vecteur d'onde. Dans la dernière relation obtenue précédemment, nous aurons ainsi

$$\omega\rho_o\delta\vec{U} = \frac{(\vec{B}_o \cdot \delta\vec{B})}{\mu_o}\vec{k} + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)^2}{\omega\mu_o}\delta\vec{U} \quad (3.50)$$

Les deux vecteurs \vec{k} et $\delta\vec{U}$ étant perpendiculaires, nous avons alors deux égalités qui nous donnent

$$\begin{cases} \omega\rho_o = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)^2}{\omega\mu_o} \\ \vec{B}_o \cdot \delta\vec{B} = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

On retrouve la vitesse de phase des ondes d'Alfvèn trouvées dans le précédent chapitre $v_{ph} = (\vec{k} \cdot \vec{B})/k\sqrt{\mu_o\rho_o}$. Nous avons dérivé cette expression dans le cas où le vecteur d'onde était parallèle au champ magnétique. Nous voyons maintenant que ces ondes peuvent avoir un vecteur d'onde quelconque avec comme particularité d'avoir toujours les perturbations en vitesse et en champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation. En effet, la perturbation en champ magnétique doit toujours vérifier cette contrainte car l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implique $\vec{k} \cdot \delta\vec{B} = 0$.

Ondes magnéto-sonores

Qu'en est-il des ondes sonores que nous connaissons bien dans notre vie de tout les jours? Et bien dans un plasma, les ondes sonores pures n'existent pas car il est impossible dans le contexte d'un plasma d'avoir la propagation de perturbations de pression qui n'affecterait pas le champ magnétique. Nous allons voir que dans un plasma, il peut y avoir deux types d'ondes magnéto-sonores associées à la propagation des perturbations de pression thermique. Nous allons, pour pouvoir déterminer leur caractéristiques, utiliser l'équation (3.49) en la projetant une première fois sur le vecteur \vec{k} puis sur le vecteur \vec{B}_o .

La projection sur \vec{k} donnera

$$\omega^2\delta\rho - k^2 \left(C_S^2\delta\rho + \frac{\vec{B}_o \cdot \delta\vec{B}}{\mu_o} \right) = 0 \quad (3.52)$$

tandis que la projection sur \vec{B}_o nous indique que

$$\vec{B}_o \cdot \delta\vec{U} = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)C_S^2\delta\rho}{\omega\rho_o} \quad (3.53)$$

CHAPITRE 3. INTRODUCTION À LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

Pour pouvoir déterminer la relation de dispersion des ondes magnétosonores, il nous reste à expliciter le terme $\vec{B}_o \cdot \delta \vec{B}$ et pour cela nous promettons l'équation d'induction magnétique le long du champ magnétique pour avoir

$$\omega \vec{B}_o \cdot \delta \vec{B} = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_o)^2 C_S^2}{\omega} \frac{\delta \rho}{\rho_o} + \omega \frac{\delta \rho}{\rho_o} B_o^2 \quad (3.54)$$

En combinant les équations (3.52) et (3.54) on obtient la relation de dispersion des ondes magnétosonores MHD

$$\omega^4 - \omega^2 (C_S^2 + V_A^2) k^2 + k^4 V_{A,k}^2 C_S^2 = 0 \quad (3.55)$$

où le carré de la vitesse d'Alfvén $V_A^2 = B_o^2 / \mu_o \rho_o$ et où $V_{A,k}^2 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_o)^2 / \mu_o \rho_o k^2$ est la vitesse d'Alfvén projetée sur le champ magnétique \vec{B}_o . On trouve une relation de dispersion certes complexe mais qui donne comme solutions deux types d'onde, chacune ayant une vitesse de phase indépendante de la pulsation ω , ce qui rend le plasma non-dispersif pour ces ondes. La résolution de la relation de dispersion revient à résoudre un polynôme en bi-carré qui aiment comme solutions

$$v_{\text{ph S,F}}^2 = \frac{1}{2} \left[(C_S^2 + V_A^2) \pm \sqrt{(C_S^2 + V_A^2)^2 - 4V_{A,k}^2 C_S^2} \right] \quad (3.56)$$

Les ondes magnétosonores rapides (Fast) possède la vitesse de phase la plus grande (signe +, supérieure à la vitesse d'Alfvén) alors que les ondes magnétosonores lentes (Slow) possède une vitesse de phase plus petite et inférieure à la vitesse d'Alfvén. C'est l'une des caractéristiques des plasmas, ces gaz ionisés, que d'avoir une famille d'onde "sonores" où sont intimement intriqués les phénomènes de pression thermique et les aspects magnétiques du plasma. Afin d'avoir un court aperçu des propriétés des ondes magnétosonores, on peut rapidement récapituler leurs propriétés pour deux types de propagation :

Propagation parallèle au champ magnétique $\vec{k} \parallel \vec{B}_o$

Dans ce cas de figure, nous avons $V_{A,k}^2 = V_A^2$, ce qui permet d'exprimer la vitesse de phase des ondes magnétosonores

$$v_{\text{ph S,F}}^2 = \frac{1}{2} [(C_S^2 + V_A^2) \pm (C_S^2 - V_A^2)] = V_A^2 \text{ ou } C_S^2 \quad (3.57)$$

Suivant la valeur des vitesses du son et d'Alfvén, les ondes magnétosonores sont soit des ondes sonores pures ou des ondes d'Alfvén.

Propagation perpendiculaire au champ magnétique $\vec{k} \perp \vec{B}_o$

La propagation perpendiculaire des ondes magnétosonores est possible mais induit que l'onde magnétosonore lente possède une vitesse de phase nulle alors que l'onde magnétosonore rapide aura une vitesse $v_{\text{ph, F}} = \sqrt{(C_S^2 + V_A^2)}$. La structure de cette onde autorise l'existence d'une perturbation en densité, en vitesse et en champ magnétique dont il est aisé de déduire les relations (Cf TD no 4).