Examen - FC9 "Particules de Haute Energie"

Dynamique relativiste de particules chargées dans un champ électromagnétique statique et uniforme

Mardi 10 janvier 2012 - 14h-16h

Tous les documents sont autorisés ainsi que les calculatrices. On négligera dans toutes les questions la présence de les forces radiatives agissant sur des particules électriquement chargées pour ne considérer que la force de Lorentz. Les différents référentiels considérés dans cet examen sont repérés par des axes cartésiens restant parallèles entre eux. Dans tout l'examen, les expressions utilisent le système d'unités CGS Gaussien. où c représente la vitesse de la lumière.

Première partie : Particule dans un champ électromoteur

Dans cette première partie du problème, nous considérons un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ où règne un champ électromagnétique. Ce référentiel est repéré par une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans $\mathcal{R}$, nous avons un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_o \vec{e}_x$ ($B_o > 0$) traversé par un plasma se propageant avec une vitesse uniforme et constante $\vec{\beta}_F = -\beta_F \vec{e}_z$ avec ($\beta_F > 0$). La loi d'Ohm issue de la magnétohydrodynamique nous indique qu'un champ électrique (dit électromoteur) est induit par cet écoulement et que ce champ électrique s'exprime comme $\vec{E} + \vec{\beta}_F \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Soit $\mathcal{R}'$ un référentiel d'inertie se déplaçant dans $\mathcal{R}$ avec une vitesse constante $\vec{\beta}_R = \dfrac{\vec{v_R}}{c}$. La transformation de Lorentz donnant les composantes du champ électromagnétique dans le repère d'inertie $\mathcal{R}'$ en fonction des composantes du champ électromagnétique dans $\mathcal{R}$ nous indique que

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \gamma_R \left(\vec{E} + \vec{\beta}_R \wedge \vec{B}\right) - \frac{\gamma_R^2}{\gamma_R^2 + 1} \vec{\beta}_R (\vec{\beta}_R \cdot \vec{E}) \\
\vec{B}' &= \gamma_R \left(\vec{B} - \vec{\beta}_R \wedge \vec{E}\right) - \frac{\gamma_R^2}{\gamma_R^2 + 1} \vec{\beta}_R (\vec{\beta}_R \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

où $\gamma_R^{-2} = 1 - \beta_R^2$.

1. Expliquer pourquoi dans le cas d'un champ électromoteur, on a toujours $|\vec{E}| < |\vec{B}|$.
2. Montrer qu'il n'existe qu'un seul référentiel $\mathcal{R}'_\mathcal{B}$ dont la vitesse de déplacement dans $\mathcal{R}$ soit orthogonale à $\vec{E}$ et à $\vec{B}$ et dans lequel le champ électrique $\vec{E}'$ est nul. Donner l'expression de la vitesse de déplacement $\vec{\beta}_B$ du référentiel $\mathcal{R}'_\mathcal{B}$ en fonction de $\vec{E}$, $\vec{B}$ ainsi que de B^2.
   On donne pour indication la relation suivante sur le produit vectoriel $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$ où $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont trois vecteurs quelconques.
3. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}'$ dans $\mathcal{R}'_\mathcal{B}$ en fonction de E^2, B^2 et de $\vec{B}$. Ce champ magnétique a t'il une norme plus importante ou moins importante que le champ magnétique perçu dans $\mathcal{R}$?
4. Dans le cas de la configuration citée en début d'énoncé ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ orthogonaux), montrer que la vitesse de déplacement de $\mathcal{R}'_\mathcal{B}$ dans $\mathcal{R}$ peut s'écrire
$$\vec{\beta}_B = \frac{E_o}{B_o} \vec{e}_z$$

On considère une particule de masse m et de charge électrique $q > 0$ passant par l'origine du référentiel $\mathcal{R}$ à l'instant t donné avec une vitesse $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_y$ ($v_o > 0$).

5. Exprimer la vitesse $\vec{v'}_o$ de cette particule dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{B}}$ au moment où cette particule passe par l'origine de $\mathcal{R}$. Montrer que la norme de $\vec{v'}_o$ est plus grande que v_o.
6. Montrer que la trajectoire de cette particule dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{B}}$ est circulaire et que la vitesse de la particule dans ce référentiel est constante. Donner l'expression du rayon de cette trajectoire ainsi que sa pulsation de rotation.
7. Exprimer la puissance d'émission synchrotron de cette particule dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{B}}$. En déduire la puissance d'émission de cette particule dans le référentiel de l'observateur $\mathcal{R}$.
8. Décrire de façon qualitative la trajectoire de la particule dans le référentiel de l'observateur $\mathcal{R}$. Montrer que l'énergie de cette particule n'est pas constante dans le temps dans ce référentiel.

SECONDE PARTIE : PARTICULE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE DOMINANT

Dans cette seconde partie, on considère la même configuration du champ électromagnétique ($\vec{B} = B_o \vec{e}_x$, $\vec{E} = E_o \vec{e}_y$ avec $B_o > 0$ et $E_o > 0$) sauf que nous considérons un champ électrique dominant le champ magnétique ($E_o > B_o$). On considère cette fois une particule de masse m et de charge électrique $q > 0$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ ayant une vitesse $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_z$ au moment où elle passe par l'origine du repère $\mathcal{R}$.

9. Montrer qu'il n'existe qu'un seul référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}$ dont la vitesse de déplacement dans $\mathcal{R}$ est orthogonale à $\vec{E}$ et à $\vec{B}$ et dans lequel le champ magnétique $\vec{B}'$ est nul. Donner l'expression de la vitesse de déplacement $\vec{\beta}_E$ de ce référentiel particulier en fonction de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et de E^2.
   Montrer que dans le cas de notre problème, cette vitesse s'exprime comme
   $$\vec{\beta}_E = -\frac{B_o}{E_o} \vec{e}_z$$
   On donne pour indication la relation suivante sur le produit vectoriel $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$ où $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont trois vecteurs quelconques.
10. Exprimer la vitesse v'_o de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}$ au moment où elle passe par l'origine de $\mathcal{R}$. Donner également l'expression du champ électrique $\vec{E}'$ dans $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}$. Ce champ électrique est-il plus fort que le champ électrique perçu dans $\mathcal{R}$?
11. Montrer que la composante de la vitesse selon l'axe (Ox) reste constante et nulle au cours du mouvement de la particule.
12. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique relativiste dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}$, montrer que les composantes v'_y et v'_z de la vitesse $\vec{v'}$ sont reliées au facteur de Lorentz par les relations suivantes :
   $$\begin{aligned} v'_z(t') &= \frac{v'_o \gamma'_o}{\gamma'(t')} \\ v'_y(t') &= \omega_E c \frac{d\gamma'}{dt'} \end{aligned}$$
   où ω_E est une pulsation dont on donnera l'expression et où $\gamma'^{-2}_o = 1 - v'^2_o/c^2$.
13. En utilisant alors directement l'expression du facteur de Lorentz en fonction des composantes de la vitesse, montrer que l'expression de ce facteur de Lorentz est particule a une vitesse qui varie au cours du temps t' et que les composantes de sa vitesse vérifient
   $$\gamma^2(t') = \gamma'^2_o + \omega_E^2 t'^2$$
   On posera que $t' = 0$ correspond à l'instant où la particule passe par l'origine de $\mathcal{R}$.
14. Donner un schéma de la trajectoire de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}$.