

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
DÉPARTEMENT DE FORMATION 1ER CYCLE
SCIENCES EXACTES

Électromagnétisme - 1er semestre
Électrostatique - Magnétostatique (PM3)

FABIEN CASSE
adapté d'un cours de S. Laurent

Année universitaire 2008-2009

université
PARIS
PARIS 7
DIDEROT

Table des matières

1	Les bases de l'électrostatique	7
1.1	Intégrales de volume, de surface et de contour	7
1.2	Les opérateurs scalaires et vectoriels	14
1.2.1	Gradient d'un champ scalaire	14
1.2.2	Divergence d'un champ vectoriel	15
1.2.3	Rotationnel d'un champ vectoriel	16
1.2.4	Propriétés et théorèmes	16
1.3	Loi de Coulomb	17
1.3.1	La charge électrique	17
1.3.2	Densités de charges et de courant	18
1.3.3	La loi de Coulomb	21
1.4	La notion de champ électrique	22
1.4.1	Définition	22
1.4.2	Principe de superposition	23
1.4.3	Limite d'application de la loi de Coulomb	27
1.5	Les lois de l'électromagnétisme	28
1.5.1	Historique	28
1.5.2	Les équations de Maxwell	28
2	Champ et potentiel électrostatiques	31
2.1	Energie potentielle électrostatique	31
2.1.1	Travail de la force électrostatique	31
2.1.2	Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles	34
2.1.3	Potentiel d'un ensemble de charges ponctuelles	36
2.2	Distribution volumique de charges	36
2.2.1	Equation de Poisson	36
2.2.2	Potentiel électrostatique d'une distribution de charges volumique	37
2.2.3	Energie d'une distribution de charges	38
2.2.4	Energie d'interaction de plusieurs distributions de charges	38
2.2.5	Champ électrique et énergie électrostatique	39
2.2.6	Circulation du champ électrostatique et potentiel	39
2.3	Symétrie et invariance du champ électrique	40
2.3.1	Principe de Curie	40
2.3.2	Invariance	41
2.4	Théorème de Gauss	41
2.4.1	Flux du champ électrique et théorème de Gauss	42
2.4.2	Application du théorème de Gauss	42

3	Conducteurs en électrostatique et Condensateurs	47
3.1	Conducteurs en équilibre électrostatique	48
3.1.1	Champ à l'intérieur d'un conducteur	48
3.1.2	Conséquences	49
3.1.3	Théorème de Coulomb	49
3.1.4	Pouvoir des pointes	50
3.1.5	Les cavités au sein d'un conducteur	51
3.2	Les condensateurs	52
3.2.1	Définition et propriétés	52
3.2.2	Ordre de grandeur et remarque	53
3.2.3	Énergie d'un condensateur	54
4	Dipôles électriques et polarisation la matière	55
4.1	Dipôle électrique	55
4.1.1	Définition du dipôle	55
4.1.2	Champ électrique d'un dipôle	57
4.1.3	Cas d'une distribution de charges ponctuelles quelconque	58
4.1.4	Remarques	59
4.2	Polarisation de la matière	59
4.2.1	Moment dipolaire induit	59
4.2.2	Vecteur Polarisation	60
4.2.3	Application au condensateur	61
4.2.4	Equations de Maxwell dans les diélectriques en électrostatique	62
4.3	Application aux forces de cohésion dans la matière	63
4.3.1	Energie d'interaction d'un dipôle dans un champ électrique	63
4.3.2	Forces de Van der Waals	66
5	Magnétostatique	67
5.1	Equation de conservation de la charge	67
5.2	Equations de la magnétostatique	69
5.2.1	Equations de Maxwell	69
5.2.2	Potentiel vecteur	70
5.2.3	Loi de Biot et Savart	71
5.2.4	Propriétés de symétrie et d'invariance du champ magnétique	72
5.2.5	Distribution surfacique et linéique de courant	74
5.3	Théorème d'Ampère	76
5.3.1	Formulation	76
5.3.2	Application au champ créé par un fil	77
5.4	Force de Laplace	78
5.4.1	Définition	78
5.4.2	Effet Hall	79
5.4.3	Définition de l'Ampère	81

Avant-Propos

Ce cours traite des fondements de l'électromagnétisme. De la cohésion de la matière aux télécommunications sans fil, les lois de la physique qui régissent ces phénomènes sont décrites par l'électromagnétisme. Le cours présentera au premier semestre les lois fondamentales de l'électromagnétisme et s'attardera sur l'étude des phénomènes électriques et magnétiques. Au second semestre seront introduits les phénomènes d'induction qui sont à la base de la production d'électricité et du fonctionnement des moteurs électriques, et les ondes électromagnétiques, qui décrivent la nature ondulatoire de la lumière et sont le support de tous les signaux de télécommunications actuels.

La découverte des lois de l'électromagnétisme s'est faite pour l'essentiel entre la fin du 18^e siècle et le début du 20^e siècle. Ces lois sont toujours très largement utilisées pour concevoir de nouvelles technologies. Ces lois ont même survécu à la relativité restreinte et à la mécanique quantique. L'histoire de leur découverte est fascinante. Vous êtes encouragés à aller au *Palais de la découverte* pour découvrir et voir à l'oeuvre les expériences qui ont été menées au 19^e siècle pour aboutir à l'établissement de ces lois. Ce cours vous permettra de comprendre l'essentiel des expériences qui s'y déroulent.

Chapitre 1

Les bases de l'électrostatique

Sommaire

1.1	Intégrales de volume, de surface et de contour	7
1.2	Les opérateurs scalaires et vectoriels	14
1.2.1	Gradient d'un champ scalaire	14
1.2.2	Divergence d'un champ vectoriel	15
1.2.3	Rotationnel d'un champ vectoriel	16
1.2.4	Propriétés et théorèmes	16
1.3	Loi de Coulomb	17
1.3.1	La charge électrique	17
1.3.2	Densités de charges et de courant	18
1.3.3	La loi de Coulomb	21
1.4	La notion de champ électrique	22
1.4.1	Définition	22
1.4.2	Principe de superposition	23
1.4.3	Limite d'application de la loi de Coulomb	27
1.5	Les lois de l'électromagnétisme	28
1.5.1	Historique	28
1.5.2	Les équations de Maxwell	28

1.1 Intégrales de volume, de surface et de contour

Intégrales de surface

SOIT $f(M)$ un champ scalaire défini en tout point M d'un espace dans lequel on choisit une surface (S) délimité par un contour. L'intégrale de f sur cette surface est donnée par :

$$\iint_S f(M)dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta S_i \quad (1.1)$$

Dans cette expression, ΔS_i représente une toute petite surface centrée en M_i , d'autant plus petite que n est grand.

Si $f(M) = 1 \forall M \in S$, alors la valeur de l'intégrale est l'aire de la surface S .

Intégrales de volume

Soit $f(M)$ un champ scalaire défini en tout point M d'un espace dans lequel on choisit un volume (V) délimité par une surface. L'intégrale de f dans ce volume est donnée par :

$$\iiint_V f(M)dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta V_i \quad (1.2)$$

Dans cette expression, ΔV_i représente un tout petit volume centré en M_i , d'autant plus petit que n est grand.

Si $f(M) = 1 \forall M \in V$, alors la valeur de l'intégrale est le volume V .

Illustration avec les coordonnées cartésiennes

Nous allons voir sur des exemples simples en utilisant les coordonnées cartésiennes ce que sont les intégrales de volume et de surface.

Considérons le parallélépipède rectangle de la figure (1.1) et choisissons un système d'axes comme

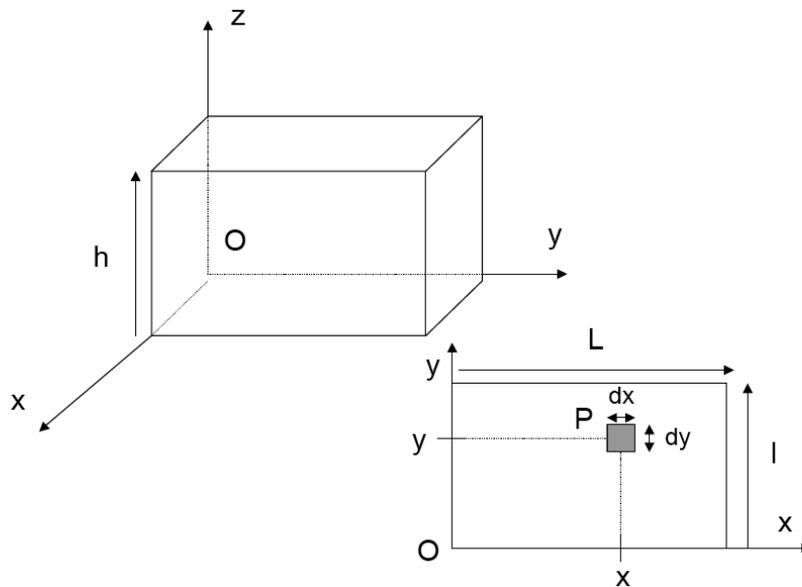


FIG. 1.1 – Calcul du volume d'un parallélépipède

sur la figure. Pour calculer l'aire de ce parallélépipède, nous voyons qu'il suffit de calculer l'aire de chaque face. Prenons donc celle située dans le plan $z = 0$ et découpons la en un très grand nombre de petits rectangles de dimensions infinitésimales, c'est à dire qu'elles sont infiniment petites ; on les note traditionnellement dx et dy . A chaque point P de coordonnées (x,y) de la face correspond un de ces rectangles. L'aire de chaque rectangle est $dx dy$ et l'aire de la face est donc la somme de toutes ces aires infinitésimales. Une telle somme est une intégrale à deux dimensions. C'est la généralisation à deux dimensions du calcul d'une longueur : un segment situé entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = L$ a une longueur L car

$$\int_{x=0}^{x=L} dx = L \quad (1.3)$$

En calculant l'intégrale, on effectue en fait la somme pour tous les points P du segment des distances infinitésimales dx centrées en chaque point P . Le calcul de la surface s'écrit de la même

façon :

$$\text{Aire} = \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=l} dx dy \quad (1.4)$$

Comme les variables x et y varient de façon indépendante, c'est à dire que quelque soit la valeur de x , y varie toujours entre 0 et l , on calcule l'intégrale de l'une puis de l'autre des variables c'est à dire en considérant tout d'abord par exemple que x est une constante et en intégrant sur y puis en intégrant sur x . Le calcul d'une intégrale double revient alors au calcul successif de deux intégrales simples.

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=l} dx dy = \int_{x=0}^{x=L} \left(\int_{y=0}^{y=l} dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=L} [y]_0^l dx = \int_{x=0}^{x=L} (l - 0) dx = [lx]_0^L = L \times l \quad (1.5)$$

Que fait on pour un volume ? La même chose avec une dimension de plus. On découpe le volume en un ensemble de parallélépipèdes rectangles élémentaires de volume $dx dy dz$ et on intègre :

$$\text{Volume} = \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=l} \int_{z=0}^{z=h} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=h} L \times l dz = L \times l \times h \quad (1.6)$$

Ces calculs permettent de comprendre le principe même d'un calcul de surface ou de volume : on découpe en surfaces ou volumes élémentaires et on intègre.

Une application directe de ces intégrales est le calcul de la charge électrique totale d'un système. Un volume élémentaire de matière noté $dV = dx dy dz$ centré en un point M de coordonnées (x, y, z) possède la charge $dq = \rho(x, y, z, t) dV$. La charge volumique traduit la répartition de la charge au sein du volume. C'est une fonction considérée comme continue du moment que la séparation effective entre charges élémentaires du système (électrons, protons...) est faible devant les dimensions caractéristiques que l'on considère. Quelle est la charge totale Q de ce système ? Ce sera la somme de toutes les charges élémentaires soit donc $Q = \sum_{\text{tous les points M}} dq$. Cette somme équivaut à une intégrale du moment que la répartition de charges est considérée comme continue :

$$Q = \sum_{\text{tous les points M}} dq = \iiint_{\text{volume total}} \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Exemple :

Une membrane cellulaire est assimilée à un parallélépipède : elle occupe tout l'espace situé en $x \leq 0$ et compris dans les intervalles $-L \leq y \leq +L$ et $-H \leq z \leq +H$. La membrane est chargée et la charge se concentre essentiellement à la frontière $x = 0$. On modélise la répartition spatiale de la charge par la donnée de la charge volumique :

$$x \leq 0, -L \leq y \leq +L, -H \leq z \leq +H, \rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-x/a} \\ \rho(x, y, z) = 0 \text{ ailleurs}$$

La charge totale portée par la membrane s'écrit donc :

$$Q = \iiint_{\text{volume membrane}} \rho(x, y, z, t) dx dy dz = \int_{-L}^L \int_{-H}^H \int_{x=-\infty}^0 \rho_0 e^{-x/a} = -4HL\rho_0 a$$

Remarque (facultatif) Le calcul d'intégrales multiples diffère si les variables ne sont pas indépendantes. Par exemple pour un triangle (Figure 1.2), y ne varie pas de 0 à l pour toutes les valeurs de x . Il faut tenir compte dans le cas du triangle dessiné du fait que $y \leq lx/L$. Nous n'aurons pas dans ce cours à rencontrer ce type d'intégrales. Dans chaque intégrale rencontrée, les variables seront

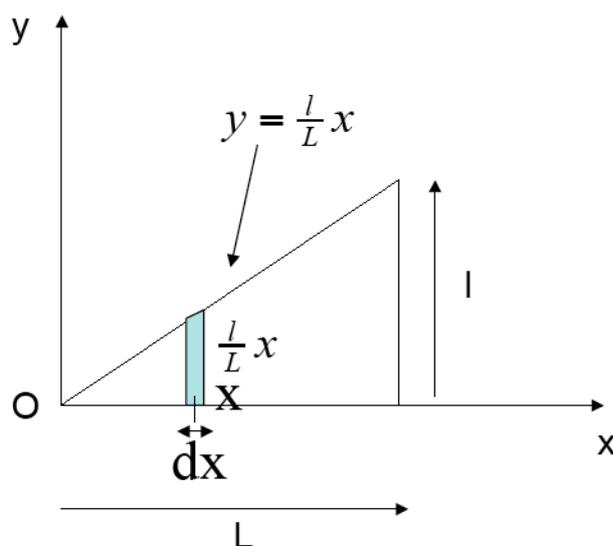


FIG. 1.2 – Calcul de l'aire d'un triangle

indépendantes donc nous ne nous étendrons pas sur des calculs plus compliqués. A titre d'information, la façon de procéder dans ce cas est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \iint dx dy = \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=\frac{l}{L}x} dx dy \\ &= \int_{x=0}^{x=L} \frac{l}{L} x dx = \left[\frac{lx^2}{2L} \right]_0^L = \frac{L \times l}{2} \end{aligned}$$

On a tenu compte du fait que y dépendait de x en intégrant d'abord par rapport à y puis ensuite par rapport à x . Le terme $\int_{x=0}^{x=L} \frac{l}{L} x dx$ illustre bien que l'aire est la somme des aires élémentaire $y(x)dx = \frac{l}{L} x dx$ dont l'une est représentée sur la figure.

Intégrales de contour

On les appelle aussi intégrales curvilignes ou linéïques.

Définition : Soit $f(P)$ un champ scalaire défini en tout point d'un espace dans lequel on définit une courbe (C) entre deux points A et B. L'intégrale de cette fonction le **long de AB** est donnée par :

$$\int_{AB} f(P) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i \quad (1.7)$$

On la note également

$$\int_{AB} f(P) dl = \int_{AB} f(P) dP \quad (1.8)$$

dl ou encore dP est donc une distance élémentaire infinitésimale du contour. Si $f(P) = 1$; alors l'intégrale est simplement la longueur du contour.

Prenons comme contour le segment situé sur l'axe (Ox) et compris entre les points O et $A(a, 0, 0)$.

La distance élémentaire dl peut donc s'écrire $dl = dx$. Pour $f(P) = x^2 + zy$

$$\int_{AB} f(P)dl = \int_{x=0}^{x=a} (x^2 + zy)dx \quad (1.9)$$

Il ne reste qu'à intégrer en notant qu'ici, y et z ne sont pas des variables d'intégration puisque le contour est inclus dans l'axe (Ox) donc seule la variable x varie quand P parcourt le contour. Nous verrons en exercice et dans la suite du cours d'autres exemples de calcul d'intégrales de contour. Nous allons voir d'autres exemples d'intégrales de contour, de surface ou de volume qui utilisent des géométries qui ne sont pas adaptées aux coordonnées cartésiennes : les sphères et les cylindres. Pour le cas d'une sphère, comment en effet exprimer à l'aide de coordonnées cartésiennes une surface élémentaire de la sphère ? On s'en sort facilement en introduisant un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème. On utilisera trois systèmes de coordonnées possibles dans ce cours : le système des coordonnées cartésiennes, le système des coordonnées cylindriques et le système des coordonnées sphériques. On utilisera l'un ou l'autre selon le problème rencontré. Le choix de tel ou tel système sera gouverné par *les symétries* du problème rencontré. Si nous avons affaire à une sphère, on choisira naturellement les coordonnées sphériques etc. Nous allons maintenant introduire les systèmes de coordonnées sphériques et cylindriques et voir quelques exemples de calculs de surface et de volume avec ces géométries là.

Les coordonnées cylindriques et sphériques

Les coordonnées cylindriques

Soit un cylindre de rayon R , de hauteur h et d'axe (Oz) . Soit $P(x, y, z)$ un point quelconque de

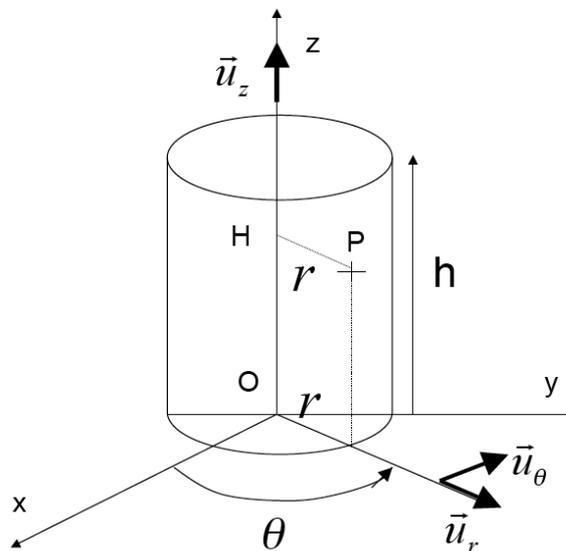


FIG. 1.3 – Coordonnées cylindriques

l'espace. Soit H le projeté orthogonal de P sur l'axe (Oz) .

- On note r la distance HP : $r = HP$
- On note θ l'angle $(\vec{u}_x, \overrightarrow{HM})$.
- on note z la coordonnée cartésienne de P suivant l'axe (Oz)

L'ensemble des trois variables (r, θ, z) permet de localiser n'importe quel point de l'espace. Ce sont les coordonnées cylindriques de P . A ces coordonnées cylindriques, on associe une base de vecteurs orthonormés (l'équivalent de la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ pour les coordonnées cartésiennes) notée $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$. On les définit ainsi :

- \vec{u}_r est parallèle à \overrightarrow{HP} et dirigé de H vers P :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{HP}}{\|\overrightarrow{HP}\|} \quad (1.10)$$

- \vec{u}_θ est dans le plan parallèle à (Oxy) et passant par P et est perpendiculaire à \vec{u}_r . Il est orienté "par le sens de rotation qui va de l'axe des x positif vers celui des y positif". Voir le schéma.
- \vec{u}_z est le vecteur du repère cartésien classique.

Ce système de vecteurs diffère fondamentalement du système cartésien en ce sens que l'orientation des deux premiers vecteurs dépend du point P considéré. Nous allons nous servir de ce

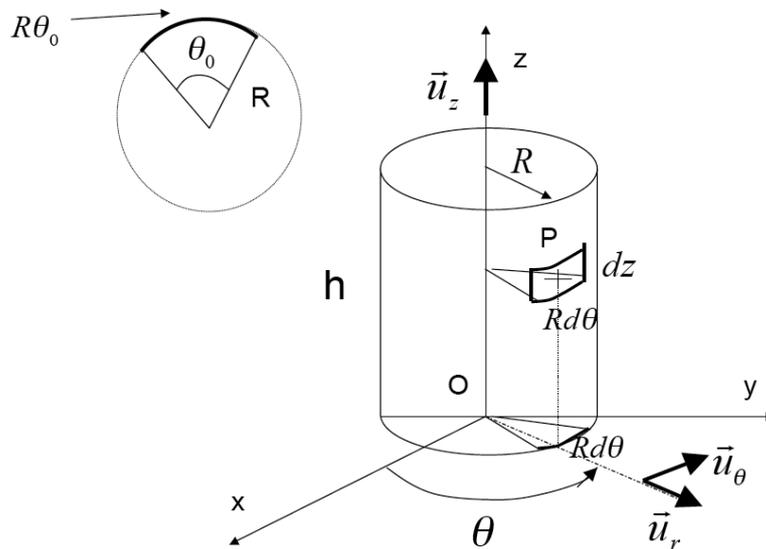


FIG. 1.4 – Calcul de l'aire et du volume du cylindre

système pour calculer l'aire et le volume du cylindre. Vous pourrez vous convaincre qu'une surface élémentaire du "tronc" de ce cylindre est un arc de cercle élémentaire que multiplie la hauteur élémentaire dz . Soit P un point de la surface. Il a donc pour coordonnées $(r = R, \theta, z)$. L'arc de cercle infinitésimal passant par P a pour longueur $Rd\theta$: en effet, il faut savoir que quand un arc de cercle de rayon R a comme angle le définissant (voir figure) θ_0 , la longueur de cet arc est $R\theta_0$ avec θ_0 exprimé en radians. Pour un angle infinitésimal $d\theta$ on obtient donc $Rd\theta$. L'aire du tronc sera obtenue en sommant chaque aire infinitésimale avec z variant de 0 à h et θ variant de 0 à 2π :

$$\int_{z=0}^{z=h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} R d\theta dz = \int_{z=0}^{z=h} R \times 2\pi dz = 2\pi R h \quad (1.11)$$

Quant à l'aire d'une base, il faut introduire l'aire infinitésimale de valeur $r dr d\theta$; en effet, le point P est cette fois à une distance r quelconque de l'axe. Les deux aires des deux bases seront :

$$\int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r d\theta dr = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi r dr = \pi R^2 \quad (1.12)$$

Quant au volume, on pourra se convaincre qu'un volume élémentaire est $dr \times r d\theta \times dz$. On obtient :

$$\int_{r=0}^{r=R} \int_{z=0}^{z=h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} R d\theta dz = \int_{r=0}^{r=R} r \times 2\pi h = [2\pi h r^2 / 2]_0^R = \pi R^2 h \quad (1.13)$$

Représentons nous maintenant la Terre comme une boule et un point P quelconque situé à l'intérieur

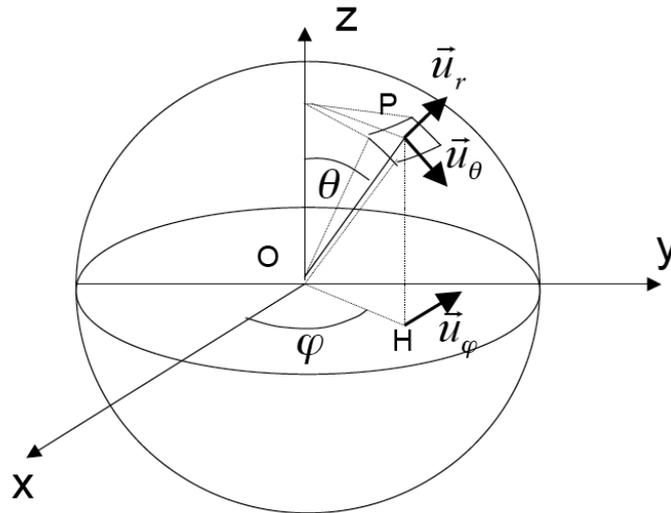


FIG. 1.5 – Les coordonnées sphériques

ou en surface. On représente en géographie un point P de la surface par deux angles : la latitude et la longitude. Dans le repère des coordonnées sphériques, on fait de même : un point P est repéré par deux angles et une distance :

- On note r la distance entre le centre du repère (ici la Terre) et le point P : $r = OP$. De même que pour les coordonnées cylindriques, r est toujours positif puisque c'est une distance.
- On note θ l'angle $(\vec{u}_z, \overrightarrow{OP})$. C'est relié à la latitude par $\pi/2 - \text{latitude}$
- Soit H le projeté de P sur le plan (xOy) . On note φ l'angle $(\vec{u}_x, \overrightarrow{OH})$.

Avec ces trois coordonnées, on peut situer n'importe quel point P de l'espace. A noter qu'il suffit de faire varier r entre 0 et ∞ , θ entre 0 et π et φ entre 0 et 2π pour couvrir tout l'espace. On peut également faire varier θ entre 0 et 2π et φ entre 0 et π .

On associe de même le repère des coordonnées sphériques :

- \vec{u}_r est parallèle à \overrightarrow{OP} et dirigé de O vers P :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad (1.14)$$

- \vec{u}_θ est dans le plan défini par $(\vec{u}_z, \overrightarrow{OP})$: c'est un plan méridien. \vec{u}_θ est perpendiculaire à \overrightarrow{OP} et il est orienté "par le sens de rotation qui va de l'axe des z positifs vers le point P". **Il pointe donc vers le sud dans l'exemple de la figure.** Voir le schéma.
- \vec{u}_φ est dans le plan (Oxy) : il est perpendiculaire à \overrightarrow{OH} et **il pointe vers l'est.**

Calculons maintenant l'aire d'une sphère de rayon R . Sur une sphère, le point P varie avec pour coordonnées $r = R$ fixe et θ et φ qui varient. Un élément de surface est le produit de deux arcs de cercle élémentaires. Il y a un petit piège :

Quand θ varie avec r et φ constants, le point P suit une méridienne qui est un cercle de rayon R ; l'arc de cercle infinitésimal a comme longueur $Rd\theta$. Quand φ varie avec r et θ constants, le point P évolue sur un arc de cercle situé dans un plan parallèle au plan de l'équateur : il suit une parallèle. C'est un cercle dont le rayon dépend de la latitude du point P et donc de l'angle θ . Il sera de rayon nul au pôle nord et sud et de rayon R à l'équateur. On peut voir que le rayon n'est rien d'autre que la distance $OH = r\sin\theta$. L'arc de cercle infinitésimal a comme longueur $r\sin\theta d\varphi$.

L'élément de surface sera donc : $R\sin\theta d\varphi Rd\theta$ et l'aire :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} R\sin\theta d\varphi Rd\theta = 4\pi R^2 \quad (1.15)$$

En ce qui concerne le volume, le volume infinitésimal sera : $dr \times r d\theta \times r\sin\theta d\varphi$ et le volume est :

$$\int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (1.16)$$

1.2 Les opérateurs scalaires et vectoriels

AVANT d'aborder les équations de Maxwell, nous avons besoin d'introduire trois outils mathématiques qui permettent d'effectuer des opérations de dérivation sur les champs scalaires et vectoriels. Deux d'entre eux vont être introduits de façon complètement abstraites faute de temps mais ont une signification physique que l'on rencontrera plus tard et qui apparaît également quand on étudie la mécanique des fluides. On pourra se reporter au livre de Feynman, "électromagnétisme 1", chapitre 2 pour percevoir leur sens. Le troisième opérateur est le gradient :

1.2.1 Gradient d'un champ scalaire

Un champ scalaire est caractérisé en chacun de ses points par un nombre. La question qui se pose est comment relier la valeur de ce champ en un point à celle en un point très proche ? Si nous travaillons avec une fonction mathématique d'une seule variable, la réponse est simple : nous utiliserons la dérivée. Ainsi une fonction f en la variable x est reliée à f en $x + dx$ par : $f(x + dx) \simeq f(x) + f'(x)dx$, à condition que $dx \rightarrow 0$. La variation élémentaire, notée df , de la fonction f entre les deux positions est donc donné par $df \simeq f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$. Mais que pouvons nous dire quand la fonction dépend de trois variables ? Intéressons nous par exemple au champ de température. Si la température est de $10^\circ C$ en un endroit, l'écart en température ne sera certainement pas le même si l'on va à droite, à gauche, au dessus ou en dessous de cet endroit : **la variation en température dépend de la direction choisie**. C'est pour cela qu'on introduit la notion de gradient de température. On le note $\vec{\nabla}T$ et il vaut :

$$\vec{\text{grad}} T = \vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z \quad (1.17)$$

Avec : $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ les vecteurs unitaires du repère cartésien et $\frac{\partial T}{\partial x}$ la dérivée dite partielle par rapport à x : c'est tout simplement la dérivée de la fonction $T(x, y, z)$ en supposant que y et z sont des constantes (et non des variables). On la distingue de la dérivée classique dite dérivée droite par cette forme ∂ , appelée "d rond". L'expression du gradient fait intervenir un opérateur vectoriel ∇

baptisé "nabla". L'expression de cet opérateur est

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.18)$$

où les composantes selon chaque direction est l'opérateur dérivée partielle. Il est à noter que l'expression de cet opérateur diffère selon le système de coordonnées choisi.

Ainsi si nous cherchons à connaître la variation élémentaire de température dT à la distance dx d'une position donnée et dans la direction (Ox) , comme pour une fonction à une seule variable, on va calculer $dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx$. On voit donc qu'il suffira de projeter le gradient, qui est un vecteur, selon cette direction, ce qui revient à faire le produit scalaire du gradient avec $dx\vec{u}_x$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = \vec{\nabla} T \cdot dx\vec{u}_x \quad (1.19)$$

De la même manière, lorsqu'on cherche à connaître la variation élémentaire de température dans une direction quelconque, on notera dT cette variation et $d\vec{M}$ le vecteur de norme infinitésimale selon cette direction (l'équivalent de $dx\vec{u}_x$ dans une direction quelconque); alors $dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{M}$. On se familiarisera avec ce gradient dans les exercices.

L'expression du gradient dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) est

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z \quad (1.20)$$

alors que dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) on obtient

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (1.21)$$

1.2.2 Divergence d'un champ vectoriel

Un champ vectoriel est caractérisé par la donnée de TROIS nombres en chaque point de l'espace : ce sont les trois coordonnées du vecteur en ce point. Le champ des vitesses est un vecteur que l'on peut noter :

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{cases}$$

Les trois composantes dépendent elles-même des trois coordonnées d'espace. La divergence du champ vectoriel \vec{v} est un scalaire, (ce n'est pas un vecteur) défini par :

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.22)$$

L'expression de cet opérateur en coordonnées cylindriques (r, φ, z) devient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.23)$$

De même dans le système de coordonnées sphérique (r, θ, φ) , on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.24)$$

1.2.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

Ce troisième et dernier opérateur s'applique également aux champs vectoriels. Le rotationnel d'un vecteur est lui-même un vecteur :

$$\overrightarrow{\text{rot}} v = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (1.25)$$

Remarquez de vous-même que si vous prenez le produit vectoriel de ∇ avec \vec{v} vous obtiendrez la définition du rotationnel. (Et de même si vous prenez le produit scalaire de ∇ avec \vec{v} , vous obtiendrez la divergence de \vec{v} .)

Ces deux derniers opérateurs n'ont pas de signification immédiate mais ne sont finalement basés que sur des dérivées partielles. Leur manipulation ne présente aucune difficulté si l'on prend soin de bien lire leur définition.

L'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques (r, φ, z) est plus complexe

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (1.26)$$

De même, en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le rotationnel s'exprime

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \quad (1.27)$$

1.2.4 Propriétés et théorèmes

Nous pouvons d'emblée mentionner quelques propriétés remarquables qui nous seront utiles ultérieurement dans ce cours. Ainsi que se passe-t-il quand on compose les différents opérateurs cités plus haut ?

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} T = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} T) = \overrightarrow{\nabla}^2 T = \Delta T \quad (1.28)$$

On obtient alors un nouvel opérateur appelé Laplacien Δ . L'expression de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées est

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{cartésien}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{cylindrique}) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \quad (\text{sphérique}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cet opérateur est polyvalent car il peut s'appliquer aussi bien à un champ scalaire qu'à un champ vectoriel. En effet si on inverse l'ordre des opérateurs, on obtient alors un laplacien applicable à un champ vectoriel

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v}) = \overrightarrow{\nabla}^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} \quad (1.30)$$

L'expression de cet opérateur diffère de celle donnée pour un champ scalaire. Nous ne donnerons pas son expression dans ce cours car l'utilisation du laplacien vectoriel est en dehors du programme de ce cours.

Quand on conjugue divergence et rotationnel, le calcul vectoriel est facile car on montre que

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} T = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} T) = \vec{0} \quad (1.31)$$

$$\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (1.32)$$

Vous pouvez vous entraîner au calcul vectoriel en prenant une fonction T arbitraire et en vérifiant les expressions ci-dessus dans les trois systèmes de coordonnées.

Théorème de Green-Ostrogradsky

Ce théorème nous sera très utile dans la suite car il va nous permettre de résoudre de nombreux problèmes relatifs au calcul des champs électrostatiques. Considérons un champ vectoriel \vec{A} présent dans un volume fini V , ce volume étant délimité par une surface *fermée* S . Alors le théorème de Green-Ostrogradsky nous dit que

$$\boxed{\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS}} \quad (1.33)$$

Ainsi la somme sur tout un volume fini de la divergence d'un champ vectoriel est égale à l'intégrale de ce champ sur la surface délimitant le volume.

Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes donne une propriété fondamentale du rotationnel d'un champ vectoriel. En effet, considérons une surface finie S délimitée par un contour C . Le théorème de Stokes nous dit que s'il existe un champ vectoriel \vec{A} présent sur cette surface, alors l'intégrale de surface de ce champ vectoriel est égale à l'intégrale curviligne de ce champ le long du contour *fermé* C , soit

$$\boxed{\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl}} \quad (1.34)$$

Il est important de noter que les signes intégraux apparaissant avec un rond au milieu signifient que le contour ou les zones d'intégration sont *fermées* sur elles-mêmes (la surface d'une sphère, le périmètre d'un cercle, etc ...).

1.3 Loi de Coulomb

1.3.1 La charge électrique

Historique

ON PRÊTE les premières observations sur l'électricité statique à Thalès de Milet vers 600 av. J.C. Il constata qu'une fois frotté, l'ambre jaune (élektron en grec) avait la curieuse propriété d'attirer à lui des fragments de tissus, des brins de paille. En 1600, William Gilbert, médecin de la reine d'Angleterre, démontre que l'ambre n'est pas la seule substance capable d'attirer les corps légers : le diamant, le verre, la résine avaient la même propriété. Il compara ce phénomène d'attraction à celui observé avec les aimants et put ainsi établir une distinction totale entre les corps électrisés et les phénomènes magnétiques. Il baptisa "electrisa" les corps qui attirent à la façon de l'ambre.

Expérience Faites la vous même. Prenez une règle et un vêtement en laine. Frottez la règle énergiquement sur la laine et approchez la de vos cheveux. Vous constaterez que ces derniers sont attirés par la règle.

Autre expérience : prenez une cuillère en plastique et frottez la sur la laine. Approchez la cuillère d'une assiette dans laquelle a été déposé du poivre moulu. Que se passe t-il ? Le poivre est attiré par la cuillère et vient s'y coller. La force électrique est supérieure à la force de gravitation.

Au milieu du 17^e siècle, le bourgmestre de Magdeburg, Otto von Guericke, conçut une boule de soufre qu'il fit tourner sur un axe en appuyant à sa surface un chiffon. Quand on avançait un objet en métal vers la sphère, une étincelle fugitive se produisait. Il constata également que les petits objets étaient attirés par la sphère mais qu'une fois en contact avec elle, ils étaient au contraire

repoussés. Ils perdaient de plus cette propriété après avoir touché le sol. Il venait de découvrir que la force électrique peut être attractive ou répulsive.

En 1735, Fay de Cisternay distingue deux sortes d'électricité. L'électricité vitreuse (celle du tube de verre frotté) et l'électricité résineuse (celle de l'ambre frotté). L'une attire l'autre mais deux objets étant électrisés de la même manière se repoussent. On parle alors de l'existence de deux "fluides" électriques distincts. C'est Benjamin Franklin (18^e) qui considère qu'il n'existe qu'une seule électricité et qu'elle peut être soit positive, soit négative. Il attribue ainsi arbitrairement le signe + à l'électricité vitreuse (verre) et le signe - à l'électricité résineuse (plastique).

Les 18^e et 19^e siècles voient naître bon nombre de machines électrostatiques de plus en plus perfectionnées qui permettent de comparer une multitude de corps chargés les uns aux autres et surtout de quantifier combien un corps possède de "fluide électrique". C'est en cherchant à quantifier l'électrisation d'un corps qu'en 1871, Cavendish introduit la notion de charge électrique et il faudra attendre 1897 pour que Thomson démontre l'existence de l'électron.

Par son expérience, Otto von Guericke mettait en évidence les deux méthodes d'électrisation des objets : **le frottement** qui permet en fait d'arracher des électrons à la matière (ici la boule de soufre et le chiffon) et ainsi créer un excès ou une lacune en électrons dans un corps. Ce dernier n'est dès lors plus neutre et possède une charge résiduelle négative ou positive. **Le chargement par contact** qui apparaît sur les objets métalliques : un métal neutre en contact avec un corps chargé par exemple positivement devient lui même chargé positivement. Les deux corps se repoussent alors. Nous en reparlerons dans les prochains chapitres.

Quantification de la charge

L'expérience de Millikan en 1909 (voir sur internet, sur Wikipédia) a montré que la charge électrique d'une goutte d'huile est **quantifiée**, c'est à dire qu'elle s'écrit toujours sous la forme $Z \times e$ avec Z un entier relatif, et e la charge élémentaire qui vaut $1,6 \cdot 10^{-19} C$ (Le coulomb C est l'unité de charge). Dans la suite du cours, la charge d'un corps sera toujours un multiple de la charge élémentaire. Cette dernière correspond en fait (en valeur absolue) à la charge de l'électron et du proton.

Des particules ayant une charge plus petite que e existent : ce sont les quarks que l'on considère comme les constituants ultimes de la matière et dont la charge est une fraction de la charge élémentaire.

Conservation de la charge

La charge possède une autre propriété fondamentale : dans un système fermé (c'est à dire tel qu'aucune charge ne le traverse) la charge électrique totale du système reste constante. Par charge électrique totale, on entend la somme algébrique des charges positives et négatives. On a déjà rencontré cette propriété en mécanique classique avec la masse d'un système fermé.

1.3.2 Densités de charges et de courant

Densité de charges ou charge volumique

Nous avons introduit la notion de charge électrique en raisonnant sur des charges ponctuelles que l'on pouvait séparer dans l'espace. Cette description sera très pratique dans la suite du cours pour introduire des notions élémentaires. Elle n'a en revanche de sens que si on s'intéresse à ce qui se passe à très petite échelle. Le corps humain par exemple possède quelques 10^{29} charges positives et négatives. Connaître la position de tous les protons et électrons d'une structure macroscopique serait quelque peu fastidieux. Ce qui va nous intéresser en pratique est de connaître la charge moyenne à telle ou telle position d'un objet et son évolution au cours du temps. On introduit de ce fait une grandeur nivelée : la charge volumique notée $\rho(x, y, z, t)$ qui s'exprime en

$C.m^{-3}$. Un volume élémentaire de matière notée dV centré autour de la position repérée par les coordonnées x,y,z possède une charge $dq = \rho(x,y,z,t)dV$ au temps t . Qu'appelle t-on ici volume élémentaire ? Tout va dépendre de ce que l'on cherche à étudier. En pratique dans la suite du cours, le volume sera très petit devant la taille du système mais sera encore très grand (au moins la centaine d'Angströms) pour qu'on puisse faire abstraction de la structure atomique de la matière.

Intensité électrique

Le courant ou intensité électrique est le nombre de charges qui traverse une surface S donnée par unité de temps. L'intensité électrique se définit toujours pour une surface S donnée. Quand on parle par exemple de l'intensité parcourant un fil électrique, la surface S est, par exemple, la section du cylindre constituant le fil.

Une intensité est un nombre algébrique ; il faut donc définir le sens positif. La définition rigoureuse

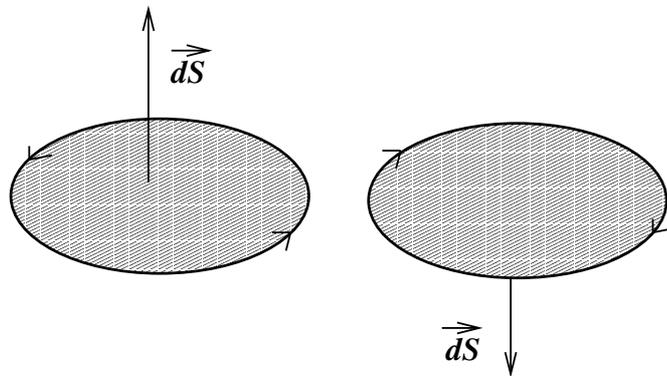


FIG. 1.6 – Convention d'orientation d'une surface pour la définition de l'intensité algébrique

est donnée ci dessous. Par la suite, il faudra la respecter systématiquement voir figure 1.6. On note C le contour de la surface S et on choisit un sens pour ce contour. On dit alors que la surface S va elle même être orientée par la règle dite du tire bouchon (ou encore en se servant de sa main droite) : un tire bouchon dont le manche tourne dans le sens de C progresse dans un certain sens. On introduit alors les faces - et + de la surface respectivement à ce sens. Si on note alors dq la charge qui traverse S en passant de la face - à la face +, entre les instants t et $t + dt$, l'intensité s'écrit :

$$i_S(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1.35)$$

Elle s'exprime en Ampère (A) qui est une des unités de base du système SI. Le sens positif de l'intensité I est donc donné par l'orientation de C : l'intensité est positive si elle va de la face - vers la face +.

Remarque Pour trouver le sens avec la main droite, il faut faire le signe de l'auto stop : les quatre doigts, pouce à part, sont joints et le pouce "en l'air". En tournant le poignet dans le sens de C , le pouce indique le sens positif de I .

Densité de courant

On peut voir l'intensité électrique comme un débit de charges. Une intensité de 1 ampère signifie qu'une charge de 1 coulomb passe par seconde à travers la surface choisie. Si nous cherchons maintenant à voir quelle charge passe précisément en chaque partie de la surface, nous faisons

appel à la notion de densité de courant. Considérons un petit élément noté dS de cette surface et qui est centré en un point M (représenté figure 1.6). On va orienter cet élément de surface en introduisant un vecteur représentatif de cet élément de surface, noté \vec{dS} . Ce vecteur est défini comme ayant comme norme l'aire de la surface dS , comme direction la normale à cette surface au point M et comme sens celui introduit précédemment par la règle du tire bouchon de - vers +.

On suppose que les charges ont une vitesse moyenne \vec{v} et portent toutes la même charge q_1 ; l'en-

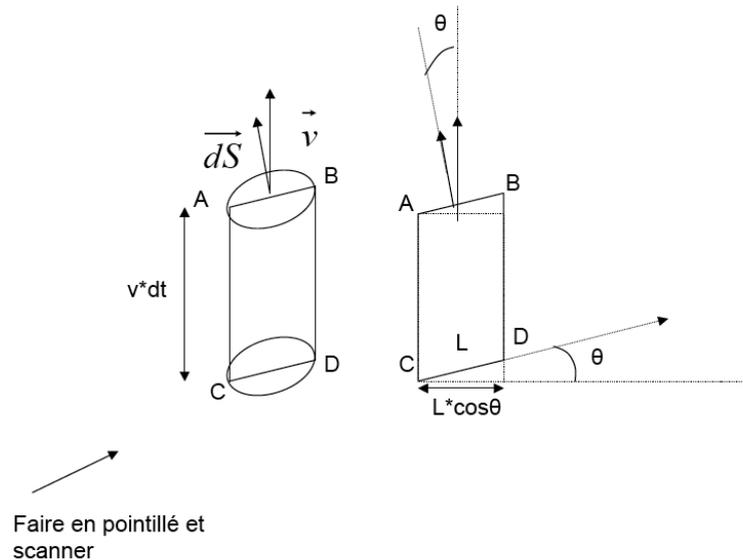


FIG. 1.7 – Volume d'un cylindre dont la base fait l'angle $\pi/2 - \theta$ avec son axe

semble des charges qui traversent entre t et $t + dt$ cet élément de surface se trouvaient dans un cylindre de base dS et de longueur vdt entre $t - dt$ et t . Ce cylindre a pour volume $dV = \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$. (Regarder la figure (1.7) pour se convaincre du produit scalaire ; le volume d'un cylindre *rectangle* (section perpendiculaire à l'axe du cylindre) est le simple produit de la section du cylindre par la longueur. Ici le cylindre n'est pas rectangle. Le volume est alors le produit de la section dS' du cylindre *rectangle associé* par la longueur qui reste la même. La section en question est $dS' = \cos\theta \times dS$ et le volume est donc $dS' \times vdt = \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$). Si on note n le nombre de particules par unité de volume (ou encore densité particulière), la charge totale qui passe pendant dt à travers dS sera donc notée $nq_1 dV = nq_1 \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$. On note le vecteur $\vec{J} = nq_1 \vec{v}$ la densité de courant. La charge totale dq qui passe pendant dt à travers l'ensemble de la surface S est la somme de toutes les charges élémentaires $nq_1 dV$ passant par chaque élément de surface dS . Comme il s'agit d'une somme continue, on a en fait affaire à une intégrale (nous reverrons cela en détail plus tard). On note

$$dq = \iint_S nq_1 dV = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} dt \quad (1.36)$$

On en déduit que :

$$i_S(t) = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (1.37)$$

On peut généraliser ce raisonnement lorsque plusieurs types de charges sont présentes (protons, électrons....). Si on note q_i , n_i et \vec{v}_i la charge, la densité particulière et la vitesse moyenne des charges

de type i , le vecteur densité de courant s'écrit :

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (1.38)$$

\vec{J} est donc la quantité de charges qui passe par unité de temps et unité de surface.

Remarque : la densité de charges s'écrit alors :

$$\rho = \sum_i n_i q_i \quad (1.39)$$

En pratique, \vec{J} est un vecteur qui va dépendre des trois coordonnées d'espace x , y et z par l'intermédiaire de la variation spatiale de la densité de charge et de la vitesse de chaque charge. \vec{J} peut également dépendre du temps. On le note donc $\vec{J}(x, y, z, t)$

1.3.3 La loi de Coulomb

Enoncé

On suppose l'existence de deux particules chargées ponctuelles fixes dans l'espace, et qui portent les charges q_1 et q_2 . La force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par la particule 1 sur la particule 2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{P}_1 P_2\|^2} \vec{u}_{12} \quad (1.40)$$

Avec $\|\vec{P}_1 P_2\|$ la norme du vecteur $\vec{P}_1 P_2$, \vec{u}_{12} le vecteur unitaire (de norme unité) dirigé de 1 à 2 et ϵ_0 une constante appelée permittivité du vide telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$ (N pour Newton).

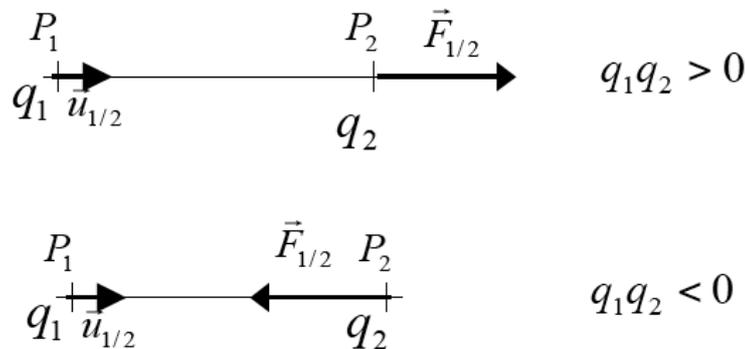


FIG. 1.8 – Illustration de la loi de Coulomb

Propriétés

- La force de Coulomb ne dépend donc que du produit des deux charges et de la distance entre celles-ci. Elle varie de plus comme l'inverse **au carré** de la distance entre les deux charges.
- La force est parallèle à la direction joignant les deux charges ponctuelles et la force exercée par 1 sur 2 est bien entendu l'opposé de la force exercée par 2 sur 1 (principe d'action et de réaction).

- La force de Coulomb présente une analogie remarquable avec la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{P}_1 \vec{P}_2\|^2} \vec{u}_{12} \quad (1.41)$$

Cependant, contrairement à la force de gravitation qui est toujours attractive, la force électrique de Coulomb est une force répulsive si les deux charges ont même signe (cf figure 1.8 avec $q_1 q_2 > 0$) et attractive si les deux charges sont de signe contraire ($q_1 q_2 < 0$).

- La loi de Coulomb possède une dernière propriété essentielle : la force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge. Ainsi quel que soit le nombre de charges dont est composé le système, la loi de Coulomb peut être utilisée pour calculer l'interaction de chaque paire.
- Ordre de grandeur ; considérons une mole de gaz dihydrogène et estimons la force qui serait nécessaire pour maintenir chaque électron de chaque atome d'hydrogène à la distance d'un mètre du noyau correspondant. Cette force serait égale à la force d'attraction électrostatique entre un électron et un proton que multiplie le nombre d'atomes d'hydrogène présent. On obtient $F = 2.10^{-4} N$. A titre de comparaison, calculons maintenant la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre ces mêmes protons et électrons. On obtient $F = 7.10^{-44} N$. La force de Coulomb est extrêmement forte. Seules les forces nucléaires qui maintiennent les protons ensemble au sein du noyau sont plus intenses que la force électrostatique. La force de gravitation est du coup toujours négligée à l'échelle des particules élémentaires chargées. La force électrique n'est en revanche pas ressentie à l'échelle macroscopique en absence d'intervention extérieure, du fait que tous les corps possèdent autant de protons que d'électrons (On dit qu'ils sont *neutres*) .
- La force d'origine électrique joue un rôle fondamental dans **la cohésion de la matière**. Elle permet non seulement de lier au niveau atomique électrons et protons mais est aussi responsable de différents types de liaisons que l'on rencontre entre atomes et entre molécules : liaisons de Van Der Waals, liaison ionique, liaison hydrogène. Bon nombre de phénomènes d'interaction chimique et biologique utilisent la force électrique. Nous en verrons différents exemples tout au long du cours.

1.4 La notion de champ électrique

1.4.1 Définition

EN MÉTÉOROLOGIE, on introduit une notion très utile en pratique : le **champ** de température, c'est à dire la valeur de la température en tout point du globe. La température peut en effet être représentée par une fonction mathématique dont la valeur va dépendre de la position spatiale que l'on considère. On note généralement cette fonction $T(x, y, z)$, avec x, y et z les coordonnées cartésiennes du point du globe que l'on considère.

Plus généralement, un champ est une grandeur physique qui prend une valeur différente en tout point de l'espace. Un champ n'est pas forcément un nombre (on parle plutôt de **scalaire**), il peut être également un **vecteur**. Ainsi, si on souhaite représenter la valeur de la vitesse d'un écoulement d'eau en tout point de l'écoulement, on va parler d'un champ de vitesse : la vitesse du fluide au point de coordonnées x, y, z sera représentée par la donnée du champ $\vec{v}(x, y, z)$. Cette notion de champ scalaire et vectoriel sera systématiquement utilisé par la suite.

La loi de Coulomb et les propriétés qui s'y rapportent nous apprennent que si on imagine un ensemble de N charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$ situées en différents points P_i fixes de l'espace, la force

exercée par toutes les charges sur une charge Q située en M s'écrit simplement comme la somme de toutes les forces qu'exerce chaque charge q_i sur Q :

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q \times q_i}{\|\vec{P}_i M\|^2} \vec{u}_{P_i M} = Q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{P}_i M\|^2} \vec{u}_{P_i M} = Q \vec{E}(M) \quad (1.42)$$

On s'aperçoit dans l'équation ci-dessus que cette force peut s'écrire sous la forme du produit de la charge Q avec un vecteur \vec{E} qui ne dépend que de la position M de la particule, **une fois positions et charges des autres particules connues**. \vec{E} est ce qu'on appelle le **champ** électrique créé par l'ensemble des charges q_i situées aux positions P_i . Le champ électrique est une fonction ne dépendant que de la position M . Il permet d'exprimer simplement la force exercée par la distribution de charges q_i sur une charge quelconque située en un point quelconque. Il suffit pour cela de connaître l'expression de $\vec{E}(M)$ en chaque point M de l'espace. $\vec{E}(M)$ est donc une fonction qui dépend de trois variables, les trois coordonnées cartésiennes de M : x, y, z qui décrivent tout l'espace. On notera donc le champ \vec{E} sous la forme : $\vec{E}(x, y, z)$.

Si on applique ce qu'on vient de voir à une seule charge q_1 existant en un point P_1 , cette charge crée un champ électrique en un point quelconque M qui s'écrit :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\|\vec{P}_1 M\|^2} \vec{u}_{P_1 M} \quad (1.43)$$

1.4.2 Principe de superposition

Les équations (1.42) et (1.43) nous montrent ainsi que **le champ existant en M dû à une distribution de charges q_i situées aux points P_i est simplement la somme des champs créés par chaque charge q_i au point M** .

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) \quad (1.44)$$

Ce fait est appelé le **principe de superposition des champs**.

La loi de Coulomb et le principe de superposition vont nous permettre de comprendre déjà qualitativement l'origine de la structure spatiale de *certaines* molécules simples. (toutes les molécules n'ont pas une géométrie qui peut s'expliquer par le raisonnement qui va suivre) Commençons par la molécule de dioxyde de carbone CO_2 . La classification périodique des éléments est rappelée sur la figure (1.9). Elle indique la position dans le tableau de chaque élément ; elle montre par ailleurs pour chaque élément son *électronégativité*. La notion d'électronégativité est introduite en chimie pour caractériser la capacité d'un élément à **attirer les électrons** vers lui lors de la formation d'une liaison chimique. C'est un nombre d'autant plus élevé que l'élément attire fortement les électrons. L'origine physique de l'électronégativité dépasse le cadre de ce cours. Admettons simplement son existence. On peut constater sur la figure que le fluor F a la plus forte électronégativité et on le trouve en général sous forme ionisée F^- : son électronégativité est tellement forte qu'il a capturé un électron à un autre élément.

Nous voyons sur le tableau que l'oxygène est plus électronégatif que le carbone. Lors de la formation d'une molécule de CO_2 , chaque atome d'oxygène va donc naturellement **avoir tendance** à attirer vers lui des électrons du carbone. La différence d'électronégativité entre les deux éléments n'est cependant pas suffisamment forte pour qu'on puisse dire que l'oxygène a arraché des électrons au carbone. Dans la pratique, tout se passe comme si certains électrons du carbone s'éloignaient du noyau de carbone pour se rapprocher des deux oxygènes. Nous simplifierons le système en disant que chaque oxygène possède une charge négative $-q$ tandis que le carbone possède la charge $+2q$. **Comment vont se positionner les deux charges négatives vis à vis de la charge positive ?** Les deux charges négatives se repoussent et vont donc s'écarter le plus possible l'une de l'autre ; mais elles

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Période																		
1	H 2,1																	He
2	Li 1	Be 1,5											B 2	C 2,5	N 3	O 3,5	F 4	Ne
3	Na 0,9	Mg 1,2											Al 1,5	Si 1,8	P 2,1	S 2,5	Cl 3,0	Ar
4	K 0,8	Ca 1	Sc 1,3	Ti 1,5	V 1,6	Cr 1,6	Mn 1,5	Fe 1,8	Co 1,9	Ni 1,8	Cu 1,9	Zn 1,6	Ga 1,6	Ge 1,8	As 2	Se 2,4	Br 2,8	Kr
5	Rb 0,8	Sr 1	Y 1,2	Zr 1,4	Nb 1,6	Mo 1,8	Tc 1,9	Ru 2,2	Rh 2,2	Pd 2,2	Ag 1,9	Cd 1,7	In 1,7	Sn 1,8	Sb 1,9	Te 2,1	I 2,5	Xe
6	Cs 0,7	Ba 0,9	Lu	Hf 1,3	Ta 1,5	W 1,7	Re 1,9	Os 2,2	Ir 2,2	Pt 2,2	Au 2,4	Hg 1,9	Tl 1,8	Pb 1,9	Bi 1,9	Po 2	At 2,2	Rn
7	Fr 0,7	Ra 0,9	Lr	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Uu	Uub	Uut	Uuq	Uup	Uuh	Uus	Uuo

FIG. 1.9 – Classification périodique des éléments et valeur de l'électronégativité de chaque élément

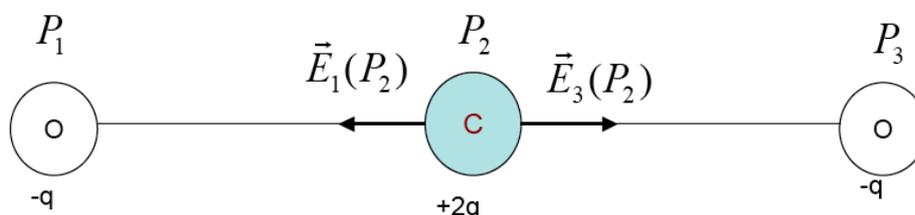


FIG. 1.10 – Géométrie de la molécule de dioxyde de carbone

sont toutes deux attirées par la charge positive. Elles vont donc se situer toutes les trois sur une même droite, les charges négatives de part et d'autre de la charge positive et à la même distance. Un rapide calcul montre que le champ créé par les deux charges négatives au niveau de la charge positive est alors nul. Cette dernière est donc à l'équilibre.

Imaginons maintenant la molécule de méthane CH_4 . Le carbone est plus électronégatif que l'hydrogène. Chaque électron de chaque hydrogène aura donc tendance à se rapprocher du carbone. On supposera que le carbone devient chargé $-4q$ et chaque hydrogène $+q$. Comment se positionne chaque charge positive vis à vis de la charge négative ? Les ions positifs s'écartent le plus possible les uns des autres tout en étant attirés par la charge négative. Les hydrogènes se disposent ainsi aux sommets d'un tétraèdre régulier dont le centre est occupé le carbone (voir Fig.1.11).

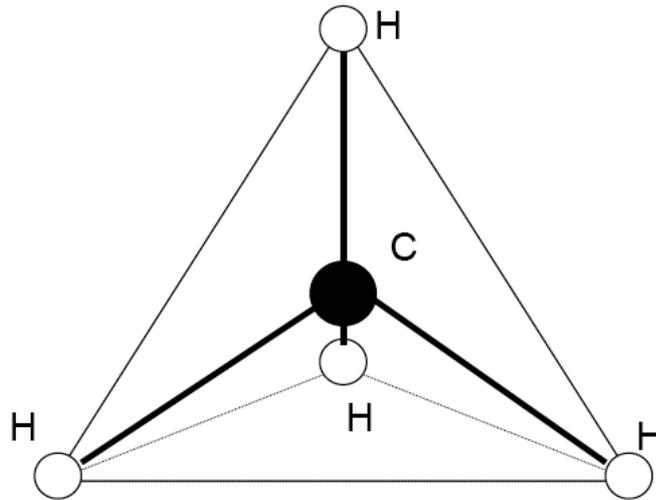


FIG. 1.11 – Géométrie de la molécule de méthane

Champ électrique engendré par une distribution de charge

La généralisation de la loi de Coulomb pour une distribution de charge volumique $\rho(x, y, z)$ *d'extension finie* est donnée par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM^3} \overrightarrow{PM} \quad (1.45)$$

Nous verrons par la suite comment se justifie cette écriture. Cette expression nous donne le champ électrique engendré au point M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) par l'ensemble de la distribution de charge. Le point P est le point de coordonnées (x, y, z) permettant de réaliser l'intégration sur l'ensemble de la distribution.

- Dans la solution, $d\tau(P)$ est la notation pour un élément de volume infinitésimal centré en P et PM est la distance entre chaque élément de volume infinitésimal $d\tau(P)$ et le point M où on cherche la valeur du champ. $\rho(P)$ est la valeur de la charge volumique au point P .
- La solution est une intégrale sur un volume : le volume défini par l'ensemble des points P tel que $\rho(P) \neq 0$. La seule différence avec ce qu'on a fait précédemment est que dans l'expression de l'intégrale existe une fonction

$$f(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{[(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2 + (z_M - z)^2]^{3/2}} \quad (1.46)$$

qu'il faut intégrer sur les trois coordonnées de l'espace (x, y, z) avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= (x_M - x)\vec{u}_x + (y_M - y)\vec{u}_y + (z_M - z)\vec{u}_z \\ PM &= \sqrt{(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2 + (z_M - z)^2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

On verra évidemment des exemples dans les travaux dirigés.

- On peut retrouver dans cette expression l'expression du champ électrique d'une charge ponctuelle : on retrouve la dépendance en $1/PM^2$ et le fait que le champ dépende de la charge

par le terme $\rho(P)d\tau(P)$. Finalement, chaque charge élémentaire $\rho(P)d\tau(P)$ crée un champ électrique et le champ résultant n'est que la somme de chacun de ces champs comme le principe de superposition nous le confirme.

Autres types de distribution

Le calcul d'une telle intégrale de volume n'a souvent rien d'évident; les exemples de calculs simples que l'on peut appréhender sont rares. L'exemple qui suit est possible à calculer parce que nous allons nous simplifier la vie et travailler avec une distribution plus simple : une distribution surfacique de charges. Cet exemple nécessite ceci dit d'introduire les notions de densité surfacique et linéique de charges, dont nous nous servirons fréquemment par la suite.

L'exemple est celui d'un disque métallique uniformément chargé en surface. Qu'est ce que veut dire un disque "uniformément chargé en surface"? Nous verrons dans un chapitre ultérieur que dans les métaux, les charges en excès sont confinées à l'intérieur d'une fine couche d'épaisseur a au voisinage immédiat de la surface du métal. Il n'y a pas de charges en excès dans tout le reste du volume du métal. Décrire la distribution de charge en introduisant une charge volumique ρ n'a dès lors pas beaucoup de sens puisque celle-ci est nulle partout sauf au niveau des frontières du métal. La distance a est en pratique extrêmement faible par rapport à toutes les autres dimensions du problème. C'est pour cela qu'on introduit une densité surfacique de charges notée σ . Tout se passe comme si la charge n'était située que sur la surface de la distribution. La charge dq portée par l'élément de surface infinitésimal dS s'écrit $dq = \sigma dS$ où σ s'exprime en $C.m^{-2}$. Dans une distribution surfacique de charge, la charge volumique est nulle et toute la charge est située sur la surface. La charge totale s'écrit donc :

$$Q = \iint_{\text{surface de la distribution}} \sigma dS$$

De la même manière, si la distribution de charge est un fil, on introduit la densité linéique de charge, notée λ et telle qu'une longueur infinitésimale dl porte la charge $dq = \lambda dl$. λ est en $C.m^{-1}$ et la charge totale portée par le fil s'écrit :

$$Q = \int_{\text{trajectoire du fil}} \lambda dl$$

Que devient l'expression du champ électrique en un point M quelconque pour une distribution surfacique ou linéique?

De la même façon que pour une distribution volumique, chaque charge élémentaire $dq = \sigma dS$ ou $dq = \lambda dl$ va créer son propre champ en M. Le champ résultant sera donc la somme des champs créés par chaque charge élémentaire. Cette somme sera une intégrale de surface dans le cas d'une distribution surfacique et une intégrale linéique dans le cas d'une distribution linéique.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P)dS(P)}{PM^3} \vec{PM} \quad (1.48)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(P)dl(P)}{PM^3} \vec{PM} \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

On va illustrer le calcul sur l'exemple du disque de rayon R , de centre O , de densité surfacique de charges uniforme σ et d'axe de symétrie (Oz). On va se simplifier considérablement la tâche en ne calculant le potentiel qu'en un point M quelconque de l'axe des z positifs. On note donc $OM = z > 0$

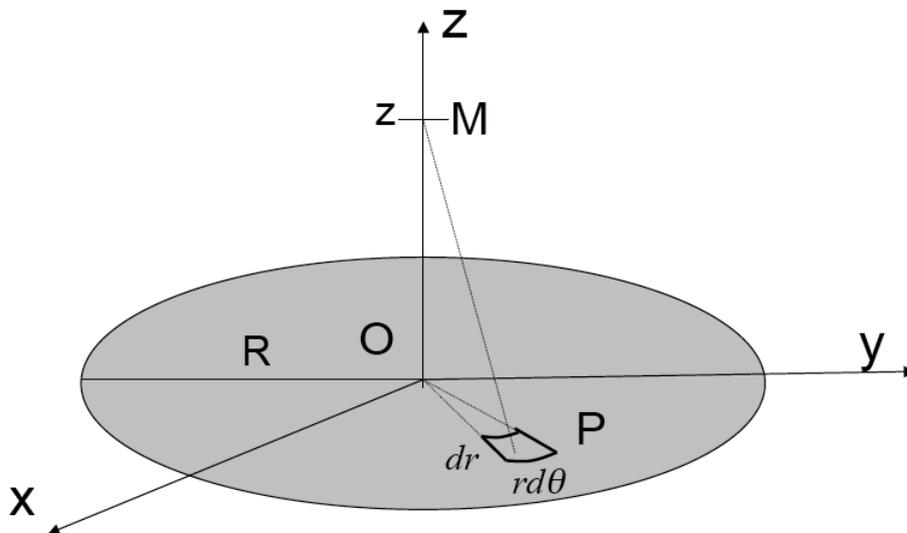


FIG. 1.12 – Calcul du champ électrique créé par un disque en un point M de son axe de rotation

1. La première question à se poser est quel système de coordonnées choisir ? Le disque possède un axe privilégié autour duquel toute rotation le change en lui même. Les coordonnées cylindriques semblent donc être un choix judicieux.

2.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P)dS(P)}{PM^3} \vec{PM} \quad (1.51)$$

Que vaut dS ? Un point P quelconque du disque a pour coordonnées $(r, \theta, z = 0)$. Nous avons vu qu'une surface élémentaire centrée en P est $dS = r d\theta dr$. De plus $PM^2 = PO^2 + OM^2$ donc $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$. De même, le vecteur $\vec{PM} = -r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$.

3. On n'a plus qu'à intégrer :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma(-r \vec{u}_r + z \vec{u}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r d\theta dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\sigma}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r z dr \vec{u}_z \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dans la première intégrale, le premier terme est nul car il faut voir que $\int_0^{2\pi} \vec{u}_r d\theta = \vec{0}$. En effet, lors d'une rotation complète autour de l'axe, les vecteurs \vec{u}_r se compensent par symétrie et donnent une intégrale nulle. Notez que comme $z > 0$, $\sqrt{z^2} = z$. Si on avait choisi $z < 0$, on aurait eu $\sqrt{z^2} = -z$.

Ce calcul est possible parce que nous nous sommes restreints à déterminer \vec{E} sur l'axe. Du coup, pour toutes les charges élémentaires situées à la même distance r de l'axe, le dénominateur en $1/PM^2$ était le même, ce qui simplifie considérablement les choses. Nous verrons la plupart des exemples abordables de calcul en exercice.

1.4.3 Limite d'application de la loi de Coulomb

Nous avons parlé jusqu'à présent de la force exercée par une distribution de charges sur une autre charge en supposant qu'elles étaient toutes à des positions fixes. Ce cas n'existe évidemment

pas dans la nature. Un électron ne peut pas être maintenu fixe ; en présence d'autres électrons, la force électrique qu'il subira va entraîner son mouvement et la force qu'il fait subir aux autres va les faire eux même bouger. Les distances entre charges vont donc évoluer au cours du temps et le champ électrique créé par une distribution de charges en mouvement va donc dépendre lui même du temps. Nous n'étudierons cependant pas en détail ce cas dans la suite du cours.

Il faut en revanche noter que la force qui s'exerce sur une charge en présence d'un champ électrique ne se résume plus à la loi de Coulomb dès que cette charge est en mouvement. **La loi de Coulomb n'est plus valable.** L'expression de la force peut s'écrire cependant simplement à condition que l'on introduise un nouveau champ : $\vec{B}(x, y, z, t)$. On trouve en effet expérimentalement que la force qui agit sur une charge Q située en M à l'instant t ne dépend que de Q , de la vitesse \vec{v} de la particule en M à t et de deux champs nommés $\vec{B}(M, t)$ et $\vec{E}(M, t)$:

$$\vec{F}(M, t) = Q(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)) \quad (1.53)$$

On retrouve dans le premier terme de droite la force électrique à la différence près qu'exprimer le champ électrique en utilisant la loi de Coulomb n'est plus valable. Un nouveau terme apparaît par ailleurs : il dépend du produit vectoriel de la vitesse par un nouveau champ qu'on nommera champ magnétique \vec{B} . Nous verrons à la fin de ce cours comment les déplacements de charge (ou courant) créent ce type de champ.

1.5 Les lois de l'électromagnétisme

1.5.1 Historique

NOUS venons de voir que les champs magnétiques et électriques tirent tous deux leur origine de la présence de charges (en mouvement pour le cas du champ magnétique). Pour le moment, nous ne connaissons cependant aucune expression pour ces champs, la loi de Coulomb n'étant valable que si les charges sont fixes.

Jusqu'en 1831, les phénomènes magnétiques et électriques sont de fait considérés comme deux phénomènes distincts bien que tous deux dus à la présence de charges : des charges s'attirent ou se repoussent du fait de la présence du champ électrique qu'elles créent. Aimants et fils parcourus par des courants s'attirent ou se repoussent selon le sens du courant du fait du champ magnétique qu'ils créent.

En 1831, Faraday découvre un lien entre les deux champs ; il remarque qu'un champ magnétique variable dans le temps (créé par des courants électriques eux même variables) **induit** un champ électrique. Faraday met ainsi à jour le phénomène d'induction électromagnétique. Champ magnétique et électrique sont corrélés.

En 1864, Maxwell démontra le phénomène complémentaire à l'induction de Faraday : un champ électrique variable dans le temps **induit** l'existence d'un champ magnétique. Il pose dès lors quatre équations, appelées les équations de Maxwell, qui synthétisent l'ensemble des connaissances acquises au cours des siècles et qui unifient phénomènes électriques et magnétiques. On emploie dès lors le terme d'électromagnétisme.

1.5.2 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont quatre équations qui permettent de calculer les expressions des champs $\vec{E}(x, y, z, t)$ et $\vec{B}(x, y, z, t)$ à partir des sources de charges qui leur donnent naissance et que l'on peut représenter par leur densité volumique de charge $\rho(x, y, z, t)$ et de courant $\vec{J}(x, y, z, t)$. Elles sont la synthèse de l'ensemble des connaissances acquises au cours des siècles et portent le

nom des physiciens qui par leur expérience ont apporté une contribution essentielle à la découverte des phénomènes électromagnétiques.

$$\text{Conservation du flux magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.54)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.55)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.56)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.57)$$

La seconde équation traduit sous forme mathématique la découverte de Faraday : un champ magnétique variable dans le temps **induit** un champ électrique. On l'appelle l'équation de Maxwell-Faraday. La troisième équation est intimement liée au théorème de Coulomb : une distribution de charges de densité de charge ρ est à l'origine d'un champ électrique. Nous verrons ultérieurement cependant pourquoi cette équation fût appelée l'équation de Maxwell Gauss. La quatrième équation fait référence au travail d'Ampère qui proposa que des courants électriques soient à l'origine d'un champ magnétique, comme le terme $\mu_0 \vec{J}$ l'exprime. Le second terme de cette équation fût introduit par Maxwell et traduit l'effet complémentaire de l'induction : un champ électrique variable dans le temps **induit** un champ magnétique. Il nous reste à introduire la constante μ_0 : la perméabilité du vide ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$.

Remarques

- Ces équations sont à la base de toute l'électromagnétisme. Elles couvrent à elles seules les phénomènes électriques et la propagation de la lumière ; vous verrez dans un cours sur les ondes électromagnétiques que $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Elles permettent de comprendre en grande partie comment la matière s'est constituée, qu'elle soit biologique ou minérale et pourquoi la matière est ou isolante ou conductrice. Tout ça dans quatre équations qui n'utilisent que des dérivées premières de l'espace et du temps ! Les implications technologiques de leur découverte sont immenses : l'induction est à la base de la production d'électricité, toutes les télécommunications reposent sur la propagation de signaux électromagnétiques. Elles ont de plus survécu à la découverte de la mécanique quantique ; elles restent valable jusqu'à des distances inférieures à la taille d'un atome.
- Ces équations sont dites locales. Connaissant la charge volumique et la densité de courant en un point, elles donnent la valeur du champ électrique et du champ magnétique en ce même point.

La résolution des équations de Maxwell pour une distribution de charges et de courant quelconque peut s'avérer particulièrement compliquée. Dans ce cours, nous n'étudierons que des situations très simplifiées dans lesquelles rien ne dépendra du temps. La charge volumique ne dépendra pas du temps et la densité de courant non plus ; les charges pourront se déplacer dans le temps MAIS à des vitesses constantes au cours du temps et de manière continue (il n'y a pas d'interruption du courant, ce dernier est donc dit permanent ou encore continu) de telle sorte que \vec{J} ne dépendra pas du temps. C'est ce qu'on appelle le cas statique. Dès lors, les champs \vec{E} et \vec{B} ne dépendent pas du temps et les dérivées partielles par rapport au temps s'annulent. Les équations de Maxwell se simplifient sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.58)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (1.59)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.60)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.61)$$

Dans le cas statique, les équations ci dessus nous montrent ainsi que les champs \vec{E} et \vec{B} sont découplés. On les étudiera séparément. On appelle magnétostatique le domaine de la physique qui étudie la formation de champs magnétiques dus à la présence de courant permanent. La magnétostatique est donc décrite par les équations :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

On appelle électrostatique le domaine de la physique qui étudie la formation de champs électriques dus à la présence de distribution statique de charges. L'électrostatique est donc décrit par les équations :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (1.62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.63)$$

Chapitre 2

Champ et potentiel électrostatiques

Sommaire

2.1	Energie potentielle électrostatique	31
2.1.1	Travail de la force électrostatique	31
2.1.2	Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles	34
2.1.3	Potentiel d'un ensemble de charges ponctuelles	36
2.2	Distribution volumique de charges	36
2.2.1	Equation de Poisson	36
2.2.2	Potentiel électrostatique d'une distribution de charges volumique	37
2.2.3	Energie d'une distribution de charges	38
2.2.4	Energie d'interaction de plusieurs distributions de charges	38
2.2.5	Champ électrique et énergie électrostatique	39
2.2.6	Circulation du champ électrostatique et potentiel	39
2.3	Symétrie et invariance du champ électrique	40
2.3.1	Principe de Curie	40
2.3.2	Invariance	41
2.4	Théorème de Gauss	41
2.4.1	Flux du champ électrique et théorème de Gauss	42
2.4.2	Application du théorème de Gauss	42

2.1 Energie potentielle électrostatique

NOUS allons commencer notre étude des phénomènes électrostatiques en introduisant la notion d'énergie électrostatique. Elle va nous permettre immédiatement d'estimer quelle énergie on pourrait récolter suite à la séparation d'un cristal de sel NaCl en ses paires d'ions (Na^+ , Cl^-). Nous allons travailler tout au long de ce chapitre essentiellement avec des systèmes virtuels, mais nous verrons que leur étude permettra d'introduire des notions fondamentales comme la notion de potentiel électrique, de capacité, de stockage de l'énergie dont on se sert finalement tous les jours.

2.1.1 Travail de la force électrostatique

Considérons deux particules chargées, de charge q_1 et q_2 immobiles en deux points O et P distants de d_P . Ce système possède-t-il une énergie ? En mécanique classique, on considère qu'un système possède une énergie si un travail a dû être fourni pour créer le système tel qu'il est. Et ce

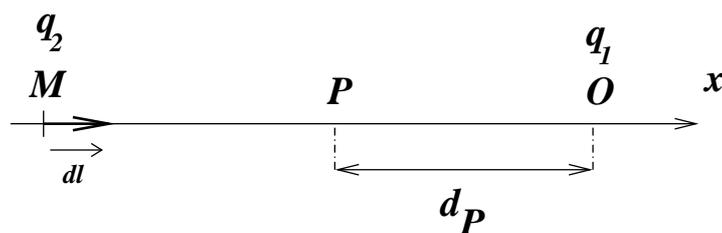


FIG. 2.1 – Chemin suivi par la particule de charge q_2 pour se rapprocher de la charge q_1 située en O jusqu'à une distance d_P .

travail est précisément la valeur de l'énergie du système.

Exemple : Quand une personne soulève un sac de masse m depuis le sol, il fournit une énergie d'autant plus grande que la masse m est grande et/ou que la hauteur est élevée. La personne travaille pour lutter contre la force de pesanteur qui maintient le sac au sol. On définit l'énergie E du sac situé à une altitude z par rapport au sol précisément comme le travail W que la personne a du fournir pour le porter à cette attitude ; Pour ce faire, la personne a du exercer la force opposée au poids et le travail réalisé s'écrit donc $W = \int_{z=0}^z \vec{P} \cdot \vec{u}_z dz = -mgz$. On retrouve l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur car comme vous l'avez vu en première année, la variation d'énergie potentielle est l'opposée du travail des forces extérieures soit $E_p = mgz$.

Pour approcher les deux charges électriques l'une de l'autre à la distance d_P , il a fallu s'opposer à la force répulsive ou attractive qui existe entre les deux charges. L'énergie du système est donc le travail qu'il a fallu fournir pour s'opposer à cette force.

Cherchons à évaluer ce travail en supposant que la charge q_1 était seule au départ en O et que nous apportons depuis un point situé en "moins l'infini" la charge q_2 jusqu'en P ; q_1 exerce sur q_2 en chacune des positions successives (notées M) de q_2 une force électrique qui s'écrit d'après la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{O/M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{u}_{OM} \quad (2.1)$$

Pour chaque position M, nous devons donc fournir la force opposée $-\vec{F}_{O/M}$ pour maintenir q_2 en M. Le travail que l'on fournit pour emmener q_2 de l'infini jusqu'en P est donc l'opposé du travail que la force électrostatique fournit. C'est donc :

$$W_{\infty \rightarrow P} = \int_{-\infty}^P -\vec{F}_{O/M} \cdot \vec{dl} \quad (2.2)$$

Dans cette écriture nous avons utilisé la définition d'un travail d'une force vue en mécanique ; le travail est l'intégrale **le long de sa trajectoire** du produit de la force par le déplacement élémentaire du point matériel . Ici \vec{dl} représente ce déplacement élémentaire de la particule le long de sa trajectoire (l est une l'abscisse curviligne) : \vec{dl} est un vecteur tangent à la trajectoire, de même sens et qui vaut en norme une distance élémentaire parcourue le long de cette trajectoire.

Le chemin suivi par q_2 est donc une droite que l'on va nommer (Ox). Chaque déplacement élémentaire de la charge a comme direction \vec{u}_x puisqu'elle vient de "moins l'infini" sur l'axe et se rapproche de l'origine et il est donc noté $dx\vec{u}_x$ avec dx la distance élémentaire parcourue. La force exercée par q_1 sur q_2 s'écrit, d'après la loi de Coulomb (notez pourquoi il y a un signe - en reprenant l'expression de la loi de Coulomb) :

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} \vec{u}_x \quad (2.3)$$

Le travail s'écrit alors :

$$W = - \int_{-\infty}^{-d_P} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \int_{-\infty}^{-d_P} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_P} \quad (2.4)$$

On intègre entre le départ et l'arrivée. A noter que le point P a comme abscisse $x = -d_P$ avec d_P la distance PO. Nous voyons que ce travail est négatif si les deux charges ont des signes opposés et est au contraire positif si les deux charges ont même signe. C'est général en physique : un travail fourni par un opérateur sera effectivement positif si il a dû vaincre une force (ici la force répulsive entre les deux charges) et donc si il a dû donner de l'énergie au système. Le travail sera négatif dans le cas contraire car les deux charges se rapprochent spontanément. Ce phénomène vous est déjà connu : pour évaporer l'eau liquide et donc séparer des molécules d'eau entre elles, on doit rompre des liaisons d'origine électrique (par définition attractives, sinon elles ne se formeraient pas spontanément !); on y arrive car on fournit de l'énergie au système via une augmentation de la température. En revanche, quand l'eau se transforme en glace, elle donne de l'énergie à l'extérieur ; l'eau multiplie en effet le nombre de liaisons attractives entre les molécules, ce qui pousse à leur ordonnancement et ainsi à la formation de cristaux de glace.

Expression générale du travail de la force électrostatique

Dans un contexte plus général, nous avons vu que les équations de Maxwell étaient les équations régissant le comportement du champ électromagnétique. Dans le cas particulier de l'électrostatique, l'équation de Maxwell-Faraday nous indique que $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$. En exploitant une propriété vue sur l'opérateur vectoriel "nabla", i.e. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$, et bien nous pouvons écrire en toute généralité que le champ électrique peut s'écrire sous la forme $\vec{E} = \vec{\nabla} f$ où f est un champ scalaire.

L'intérêt de cette écriture est que le calcul du travail de la force électrostatique appliqué sur une charge q se simplifie. En effet, ce travail entre un point A et un point B quelconques de l'espace sera

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B q \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B q \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl} = \int_A^B q df = q \{f(B) - f(A)\} \quad (2.5)$$

Nous obtenons ainsi que le travail de la force électrostatique ne dépend que de la valeur de la fonction f aux points A et B mais pas du tout du chemin emprunté par la charge q . Cette propriété est caractéristique des forces conservatives de l'énergie mécanique comme vous l'avez vu en première année. En écrivant l'énergie mécanique E_m de la particule de charge q aux points A et B et en exprimant qu'elle se conserve, on obtient que

$$\begin{aligned} E_m(B) - E_m(A) &= 0 = E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A) = W_{A \rightarrow B} + E_p(B) - E_p(A) \\ \Rightarrow E_p(B) - E_p(A) &= -q \{f(B) - f(A)\} \text{ d'où } E_p = -qf + cste \end{aligned} \quad (2.6)$$

Par convention, on définit le potentiel électrostatique V comme $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Ainsi on peut écrire l'énergie potentielle d'une charge q plongée dans un champ électrique \vec{E} comme $E_p = qV + cste$. L'unité physique dans le système international du potentiel électrostatique V est le Volt du nom du célèbre physicien Volta qui étudia les premières piles électriques. L'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q comporte donc deux contributions, la première est le potentiel qui décrit localement l'état du champ électrique et la seconde est la charge elle-même qui indique comment réagit la particule vis-à-vis du champ électrique. Il est à noter que la présence de la constante dans l'expression du potentiel (et de l'énergie potentielle associée) n'a aucun rôle car elle disparaît dès que l'on exprime le champ électrique au travers du gradient. Par convention on suppose que le potentiel V s'annule quand on s'éloigne à l'infini de la source du champ, cela permet de fixer une valeur arbitraire de cette constante (souvent nulle).

2.1.2 Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Pour définir l'énergie potentielle d'une paire de charges, il faut avant tout exprimer le potentiel électrostatique décrivant le champ engendré par une des charges. Considérons deux charges, q_1 et q_2 situées en P et en M respectivement. Le champ électrique ressenti par q_2 sera alors

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{PM^3} \overrightarrow{PM} \quad (2.7)$$

Nous savons que le potentiel $V(M)$ est relié au champ par $\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla}V$ donc il nous faut trouver le champ scalaire tel que $-\overrightarrow{\nabla}f = \overrightarrow{PM}/PM^3$. On peut vérifier que ce champ scalaire f est simplement l'inverse de la distance $1/PM$ car

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}_M \frac{1}{PM} &= \overrightarrow{\nabla}_M \frac{1}{\sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}} \\ &= \frac{\partial[\sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}]^{-1/2}}{\partial x} \vec{u}_x + \text{termes en y et z} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial(x-x_P)^2}{\partial x} [\sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}]^{-3/2} \vec{u}_x + \text{termes en y et z} \\ &= \frac{-(x-x_P)\vec{u}_x}{PM^3} + \frac{-(y-y_P)\vec{u}_y}{PM^3} + \frac{-(z-z_P)\vec{u}_z}{PM^3} \\ &= -\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \end{aligned}$$

Le potentiel en M engendré par une charge q_1 située au point P peut donc s'écrire comme

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{PM} \quad (2.8)$$

où on a posé comme nulle la constante apparaissant durant l'intégration car on suppose par convention que le potentiel s'annule quand $PM \rightarrow \infty$. L'énergie d'un système de deux charges ponctuelles q_1, q_2 séparées d'une distance r_{12} est donc :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.9)$$

On lui donne le nom d'énergie **d'interaction** entre deux charges. Remarquons que cette expression est symétrique entre q_1 et q_2 et que nous aurions trouvé le même résultat si nous avions considéré le champ ressenti par q_1 et engendré par q_2 .

On peut vérifier que la force qu'exerce q_1 sur q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = -\overrightarrow{\nabla}E_p = -\frac{dE_p}{dr_{12}} \vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \quad (2.10)$$

où $\vec{u}_{12} = \overrightarrow{r_{12}}/r_{12}$. De même, pour avoir la force s'appliquant sur q_2 et générée par q_1 , on écrit

$$\vec{F}_{q_2/q_1} = -\overrightarrow{\nabla}E_p = -\frac{dE_p}{dr_{21}} \vec{u}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{u}_{21} = -\vec{F}_{q_1/q_2} \quad (2.11)$$

On vérifie ainsi le principe d'action-réaction. Supposons maintenant que nous voulions apporter une troisième charge au système. Nous savons d'après le principe de superposition que la force totale qui agit sur cette charge est la somme des forces dues à chaque charge prise séparément. Le travail à fournir va donc être la somme des travaux à fournir pour chaque couple de charges.

L'énergie totale d'un système formé de plusieurs charges est donc la somme des énergies de chaque paire de charges. Pour N charges séparées par des distances r_{ij} :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.12)$$

Le terme $1/2$ apparaissant dans la formule vient du fait qu'en faisant la double somme sur i et j on comptabilise deux fois chaque paire, il nous faut donc diviser par deux le résultat final.

Nous allons appliquer ce que nous venons de voir au calcul de l'énergie d'un cristal de chlorure de sodium, NaCl (constituant essentiel du sel). Le sodium Na occupe la première case de la troisième ligne de la classification tandis que le chlore occupe l'avant dernière case de cette même ligne. La différence d'électronégativité entre sodium et chlore est très importante. En pratique, le sodium cède un électron au chlore. Sodium et chlore se trouvent dans le cristal de NaCl sous forme ionisée (Cl^- , Na^+). On peut voir du coup ce cristal comme une alternance d'ions positifs et négatifs (Voir figure 2.2). L'énergie d'un tel système est le travail qu'il a fallu fournir pour construire le

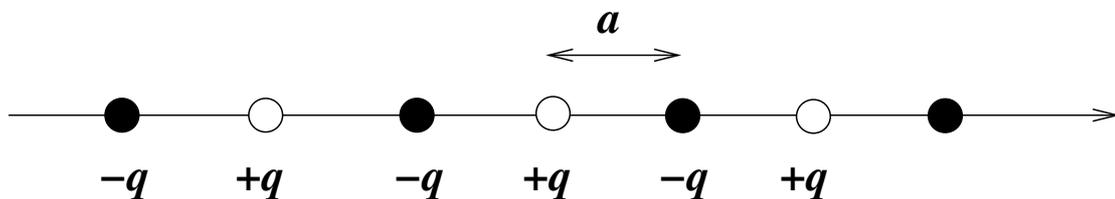


FIG. 2.2 – Structure cristalline de NaCl

cristal à partir de ses ions. Pour déterminer l'énergie d'un tel système, nous devons donc sommer l'énergie entre toutes les paires d'ions du cristal. Le calcul est fastidieux mais ne présente aucune difficulté. Un calcul simpliste consiste à prendre un ion en particulier, par exemple un ion positif i situé au milieu de la rangée d'ions du cristal. en appliquant la formule (2.12), on obtient l'énergie potentielle de cet ion avec l'ensemble du cristal, c'est à dire

$$E_{p,i} = -2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} + 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a} - 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{3a} + \dots = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \sum_{i=1}^{N/2} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \quad (2.13)$$

avec a la distance entre deux ions consécutifs et N le nombre d'ions. Sachant que N est très grand devant 1, on peut prendre la limite de la série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}/i = \ln 2$. On obtient ainsi une estimation de l'énergie potentielle du cristal en multipliant ce résultat par le nombre d'ions présents dans le cristal N . On a ainsi

$$E_p = -\frac{\ln 2}{2\pi\epsilon_0} \frac{Nq^2}{a} \quad (2.14)$$

Cette énergie est négative : globalement dans toute la structure, l'énergie d'interaction attractive entre plus proches voisins l'emporte sur l'énergie d'interaction répulsive entre ions de même charge. Du coup, en se formant, le cristal de NaCl va fournir de l'énergie à l'extérieur. Ou vu autrement, pour séparer le cristal en chacun de ces ions, il faudra fournir de l'énergie pour vaincre cette attraction prédominante entre les ions. Cette énergie est appelée énergie de dissociation par les chimistes. Ils peuvent la mesurer et ne trouvent que 10% de différence avec le calcul dont on vient de parler. Modéliser la cohésion du cristal de NaCl par un ensemble d'interactions de Coulomb est fondamentalement correcte.

2.1.3 Potentiel d'un ensemble de charges ponctuelles

Considérons un ensemble de N charges ponctuelles fixes q_1, q_2, \dots, q_N . D'après le principe de superposition, le champ total est la somme des champs créés par chaque charge :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (2.15)$$

Soit V_i le potentiel créé par chaque charge, $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i$. On voit que :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}V_i = -\vec{\nabla}\left(\sum_{i=1}^N V_i\right) = -\vec{\nabla}(V) \quad (2.16)$$

Le gradient étant une somme de dérivées, on peut introduire la somme sur chaque charge à l'intérieur du gradient. On voit donc que le potentiel V créé par l'ensemble des charges est la somme des potentiels créés par chaque charge.

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (2.17)$$

Le principe de superposition s'applique donc aussi au potentiel électrostatique. Nous pouvons ainsi écrire l'expression du potentiel en un point M par un ensemble de N charges ponctuelles situées aux points P_i :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M} \quad (2.18)$$

Ici encore nous avons supposé que la constante d'intégration était nulle pour permettre au potentiel de s'annuler à l'infini.

2.2 Distribution volumique de charges

2.2.1 Equation de Poisson

NOUS avons vu au premier chapitre qu'en pratique, on travaille essentiellement avec des distributions volumiques de charges et non avec un ensemble de charges ponctuelles. Cette section va donc généraliser les notions introduites précédemment au cas de distributions volumiques de charge. Les deux équations de Maxwell de l'électrostatique vont nous permettre de déterminer une équation, l'équation de Laplace que satisfait le potentiel et dont la solution donne l'expression du potentiel électrique.

Soit D une distribution volumique de charges de charge volumique $\rho(x, y, z)$.

Nous savons que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

Nous avons vu que le champ électrostatique peut s'écrire sous la forme $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Cela amène naturellement l'équation de Maxwell-Gauss à être exprimée comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

Cette équation porte le nom d'équation de Laplace quand $\rho = 0$ et d'équation de Poisson quand $\rho \neq 0$ (du nom des mathématiciens qui ont étudié les diverses solutions de cette équation). On montre que si une solution de cette équation existe alors cette solution est unique (théorème d'unicité). L'expérience montre que la résolution de cette équation est souvent ardue du fait de la présence de l'opérateur laplacien. Nous privilégierons donc d'autres approches pour calculer V sauf dans certains cas où cette relation est la seule utilisable.

2.2.2 Potentiel électrostatique d'une distribution de charges volumique

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'expression du champ électrique engendré par une distribution volumique de charges était

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM^3} \overrightarrow{PM} \quad (2.22)$$

La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla}V$ liant le potentiel au champ étant toujours valable, il nous faut trouver une expression de V dont le gradient donne l'expression du champ électrostatique ci-dessus. En reprenant un résultat déjà démontré dans ce cours, nous pouvons écrire

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P)d\tau(P) \overrightarrow{\nabla}_M \left(\frac{1}{PM} \right) \quad (2.23)$$

où ∇_M est l'opérateur nabla pris au point M . Ce point M est fixe au cours de l'intégration sur le volume, nous pouvons donc le sortir de sous le signe intégral. On obtient ainsi

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\nabla}_M \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM} \right) \quad (2.24)$$

On obtient ainsi l'expression du potentiel engendré par une distribution volumique de charge

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM} \quad (2.25)$$

On peut généraliser ce résultat à d'autres types de distribution comme les distributions surfaciques et linéiques

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P)dS(P)}{PM} \\ V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(P)dl(P)}{PM} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Reprenons l'exemple d'une plaque chargée uniformément avec une densité surfacique σ et un rayon R (voir figure 1.11). Calculons, à présent le potentiel au point M dont les coordonnées cylindriques sont $(r, \theta, z) = (0, 0, z)$. En appliquant la formule précédente et en se rappelant que $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$ et que $dS = r dr d\theta$, on arrive facilement à

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \quad (2.27)$$

Il faut noter que cet exemple a été fait dans le cas où $z > 0$ ce qui donne $\sqrt{z^2} = z$. Pour vérifier si tout est bien conforme, on peut calculer le champ magnétique associé à ce potentiel car

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z \quad (2.28)$$

On retrouve bien la même expression du champ électrique. On peut noter ici que seul la composante verticale du gradient est non-nulle car le potentiel ne dépendait que de la variable z .

2.2.3 Energie d'une distribution de charges

Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 l'équation 2.12 donnant l'énergie d'un ensemble de charges ponctuelles :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(P_i) \quad (2.29)$$

où P_i est le point où se trouve la charge q_i et V est le potentiel électrostatique total. Nous pouvons maintenant généraliser l'expression de l'énergie au cas d'une distribution volumique de charge, de charge volumique ρ .

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho(P) V(P) d\tau(P) \quad (2.30)$$

où P est un point mobile au cours de l'intégration décrivant toute la distribution de charge. On généralise de même aux autres types de distribution

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \iint \sigma(P) V(P) dS(P) \\ E_p &= \frac{1}{2} \int \lambda(P) V(P) dl(P) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nous verrons plus avant dans ce chapitre comment l'on peut réexprimer cette énergie en fonction du champ électrostatique. Une réécriture en termes de densité de charge peut se faire en utilisant l'équation (2.25) qui fait apparaître une double intégration sur l'espace

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{x_1} \iiint_{x_2} \frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{4\pi\epsilon_0 |x_2 - x_1|} d^3x_1 d^3x_2 \quad (2.32)$$

Ce type de calcul peut s'avérer ardu et ne sera pas abordé dans le cadre de ce cours. Cette écriture peut bien évidemment se généraliser aux autres types de distribution.

2.2.4 Energie d'interaction de plusieurs distributions de charges

Dans le cas d'une distribution unique de charge, nous avons vu que l'effet du champ électrique engendré par la distribution sur elle-même peut être caractérisé par une énergie potentielle associée. Si maintenant nous considérons deux distributions volumique de charge ρ_1 et ρ_2 , l'énergie potentielle totale sera

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho_{\text{tot}}(P) V_{\text{tot}}(P) d\tau(P) = \frac{1}{2} \iiint (\rho_1 + \rho_2)(V_1 + V_2) d\tau(P) \quad (2.33)$$

où V_1 et V_2 sont respectivement les potentiels électrostatiques engendrés par les distributions ρ_1 et ρ_2 (en vertu du principe de superposition). Si on développe cette expression comme dans l'équation (2.32), on arrive à

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) d\tau(P) + \frac{1}{2} \iiint (\rho_1 V_2 + \rho_2 V_1) d\tau(P) \quad (2.34)$$

Les deux premiers termes du membre de droite correspondent aux énergies potentielles intrinsèques de chaque distribution de charge tandis que les deux derniers correspondent à l'énergie d'interaction entre les deux distributions. L'énergie d'interaction E_{int} représentée par ces deux termes, se résume à une seule expression car on voit que

$$\iiint (\rho_1 V_2) d\tau(P) = \iiint_{x_1} \iiint_{x_2} \frac{\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)}{4\pi\epsilon_0 |x_2 - x_1|} d^3x_1 d^3x_2 = \iiint (\rho_2 V_1) d\tau(P) \quad (2.35)$$

ce qui revient à écrire l'énergie totale E_p comme

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} + E_{int} = \frac{1}{2} \iiint (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) d\tau(P) + \iiint \rho_1 V_2 d\tau(P) \quad (2.36)$$

On a donc le choix pour le terme d'interaction de choisir l'une ou l'autre des distributions pour le calcul de ce terme.

2.2.5 Champ électrique et énergie électrostatique

Nous avons vu précédemment que l'énergie potentielle électrostatique peut s'exprimer en fonction d'une intégrale sur la densité de charge et sur le potentiel. Nous pouvons réexprimer tout cela en termes de champ électrique. Pour cela, il nous faut connaître une propriété de la divergence d'un vecteur qui dit que

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) = V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V = \frac{\rho}{\epsilon_0} V - \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (2.37)$$

Nous avons utilisé la relation de Maxwell-Gauss reliant la divergence du champ à la densité de charge pour obtenir le résultat. L'expression (2.30) peut alors se mettre sous la forme

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) + E^2) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau \quad (2.38)$$

La surface S apparaissant ici est une surface fermée qui entoure le volume d'intégration du deuxième terme (théorème de Green-Ostrogradsky). Cette relation se simplifie si le volume d'intégration s'étend jusqu'à l'infini car à l'infini le potentiel (et le champ) électrostatique s'annule. On obtient ainsi que

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} E^2 d\tau \quad (2.39)$$

On retrouve aisément l'expression de l'énergie potentielle totale entre deux distributions de charges en appliquant le principe de superposition qui dit que $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, ce qui donne

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) d\tau = E_{p,1} + E_{p,2} + E_{int} \quad (2.40)$$

2.2.6 Circulation du champ électrostatique et potentiel

Nous avons démontré que le champ électrique pouvait s'écrire sous la forme d'un gradient d'un potentiel V . Cette propriété découle directement de la loi de Maxwell-Faraday. Un corollaire de cette loi est que le champ est à circulation conservative. En effet si on applique le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday on obtient

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.41)$$

où C est le contour fermé délimitant la surface S . On voit que la circulation du champ électrostatique sur n'importe quel contour fermé sera toujours nulle. Du point de vue du potentiel électrostatique on vérifie cette propriété car

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) \quad (2.42)$$

Dans un contour fermé on a évidemment $A = B$ ce qui donne bien un résultat nul. Cette dernière relation est très importante car elle permet de calculer l'expression du potentiel électrostatique à partir de l'expression du champ électrostatique.

2.3 Symétrie et invariance du champ électrique

DANS cette section, nous allons voir comment les propriétés de symétrie des distributions influencent l'orientation du champ électrique ainsi que ses dépendances fonctionnelles. Ces propriétés nous aideront à déterminer l'orientation du champ ainsi que ses dépendances vis-à-vis des coordonnées spatiales.

2.3.1 Principe de Curie

Le principe de Curie est un principe très général de la Physique qui énonce que les symétries présentes dans la source d'un phénomène physique doivent se retrouver dans le phénomène lui-même. Ainsi si une distribution de charge quelconque présente un plan de symétrie, nous pouvons nous attendre à ce que le champ électrique soit lui aussi symétrique par rapport à ce plan. Considérons une distribution de charge quelconque ayant un plan de symétrie repéré par le plan

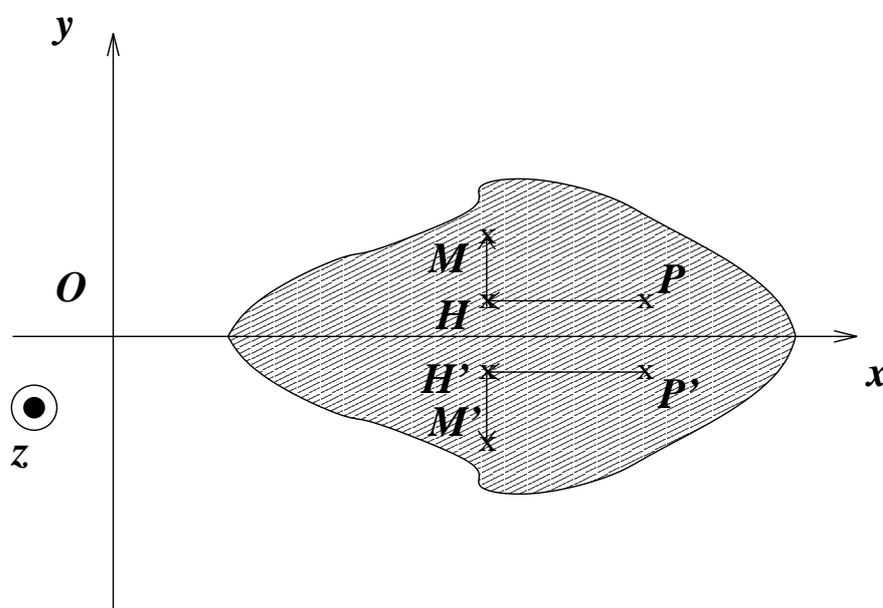


FIG. 2.3 – Distribution de charge présentant un plan de symétrie (plan xOz). On considère deux couples de points dont les positions sont symétriques par rapport au plan de symétrie.

(xOz). L'axe y repère la direction perpendiculaire au plan de symétrie (voir Fig.(2.3.1)). Si on souhaite calculer la valeur du champ électrique en un point M quelconque, on peut appliquer la relation que nous avons déjà vu

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM^3} \overrightarrow{PM} \quad (2.43)$$

où P est un point de la distribution. Si on décompose le vecteur \overrightarrow{PM} en une composante parallèle au plan de symétrie \overrightarrow{PH} et une composante perpendiculaire \overrightarrow{HM} , on obtient l'expression du champ électrique suivante

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM^3} (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{E}(M)_{//} + \vec{E}(M)_{\perp} \quad (2.44)$$

Considérons maintenant le champ électrique pris au point M' symétrique de M . On peut écrire le champ électrique en utilisant un point P' symétrique de P car lors de l'intégration, si P parcourt

toute la distribution, alors P' aussi par symétrie. On a alors

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P')d\tau(P')}{P'M'^3} (\overrightarrow{P'H'} + \overrightarrow{H'M'}) \quad (2.45)$$

En utilisant les propriétés de la symétrie, on montre facilement que $PM = P'M'$, $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{P'H'}$ et $\overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{H'M'}$. On a alors que

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P')d\tau(P')}{PM^3} (\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{HM}) = \vec{E}(M)_{//} - \vec{E}(M)_{\perp} \quad (2.46)$$

Cette dernière relation prouve donc que si par symétrie $\rho(P) = \rho(P')$ alors on obtient que le champ électrique produit par cette distribution *est lui aussi symétrique*.

Que se passe-t-il si le point M appartient au plan de symétrie? Alors le point $M' = M$ et on voit immédiatement que $\vec{E}(M)_{\perp} = -\vec{E}(M)_{\perp} = \vec{0}$, c'est à dire que le champ électrique appartient au plan de symétrie. Par corollaire, si plusieurs plans de symétrie passent par le point M considéré alors le champ électrique $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans, c'est à dire qu'il est orienté selon l'intersection de ces plans de symétrie. Nous avons considéré dans ce calcul une distribution volumique de charge mais la démonstration précédente peut facilement être généralisée à tous les types de distributions.

Exemple : Soit une distribution de charge de longueur infinie ayant une symétrie cylindrique (ρ ne dépend que du rayon). Prenons un point M sur la surface de ce cylindre. On voit tout de suite que le plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) est un plan de symétrie passant par M . De même, le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est lui aussi un plan de symétrie passant par M à cause de la longueur infinie de la distribution). Nous savons que le champ électrique est commun à ces deux plans, or seul le vecteur \vec{u}_r leur est commun, nous pouvons donc sans calcul en déduire que le champ électrique en M sera orienté selon la direction \vec{u}_r .

2.3.2 Invariance

L'invariance d'une distribution de charge sous l'effet d'une tranformation quelconque a des conséquences sur le champ électrique résultant. En effet si une distribution est invariante sous l'effet d'un déplacement suivant une coordonnées spatiale du problème alors le champ électrique en un point donné sera identique à avant la transformation. Cela veut dire que le champ est constant quand on fait varier cette coordonnée ou encore que le champ ne dépend pas de cette coordonnée.

Exemple : Reprenons la distribution à symétrie cylindrique de l'exemple précédent. Si on opère une rotation sur elle-même de la distribution alors on se retrouvera avec la même configuration : le champ électrique sera donc inchangé et nous pouvons dire que \vec{E} ne dépend pas de l'angle polaire θ . Si on opère maintenant une translation le long de l'axe (Oz) on aura toujours la même configuration de charge si la distribution a une longueur infinie : \vec{E} ne dépendra pas non plus de la variable z . En conclusion suite aux propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, nous pourrons écrire que le champ électrique au point M est $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ avec $E(r)$ qui peut être une fonction positive ou négative.

2.4 Théorème de Gauss

CETTE partie introduit un théorème qui permet de déterminer très facilement le champ électrique de distributions particulières de charges (plan infini, sphère, fil infini) qui interviennent dans la description de nombreux systèmes physiques.

2.4.1 Flux du champ électrique et théorème de Gauss

Nous avons vu au premier chapitre, au paragraphe (1.3.2) l'expression du courant électrique comme une intégrale sur une surface d'un vecteur densité de courant, cf équation (1.37).

$$i_S(t) = \iint_S \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}(P) \quad (2.47)$$

Une telle intégrale sur une surface s'appelle en physique un flux : on dit que l'intensité i_S est le flux du vecteur \vec{J} à travers la surface S . La définition est intuitive si on se souvient que l'intensité électrique est un débit ou flux de charges à travers une section donnée.

De la même manière, on définit le flux du champ électrique par l'expression :

$$flux = \iint_S \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) \quad (2.48)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky à l'équation du Maxwell Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ conduit à :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

Énoncé du théorème de Gauss : le flux du champ électrique à travers toute surface fermée contenant une charge Q_{int} est simplement égal au quotient de Q_{int} par ϵ_0 .

L'équation de Maxwell Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ est la forme locale de ce théorème.

Nous allons voir que ce théorème permet de grandement simplifier la détermination des valeurs de certains champs électriques.

2.4.2 Application du théorème de Gauss

Nous allons voir une application directe du théorème de Gauss : le calcul du champ électrique et du potentiel d'un noyau atomique. on va le modéliser comme une boule de rayon R contenant Z protons. La charge Q du noyau est donc $Q = Ze$. Soit ρ la charge volumique du noyau. On la supposera uniforme c'est à dire que

$$\forall M \in \text{sphère}, \rho(x, y, z) = \frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad (2.50)$$

L'application du théorème de Gauss suppose d'introduire une surface et de calculer un flux : c'est en choisissant astucieusement la surface qu'on peut remonter à partir du calcul du flux directement à l'expression du champ. On appelle cette surface la surface de Gauss. Nous allons systématiquement choisir une surface qui prend en compte les symétries du système. Voyons le sur cet exemple, d'autres suivront en TD. Voici une méthodologie à suivre pour faciliter le choix de surface puis le calcul.

1. Quel système de coordonnées choisir ? La distribution de charges que l'on considère a la symétrie sphérique. On va naturellement travailler en coordonnées sphériques avec l'origine du repère placé au centre de la sphère.
2. Nous avons vu dans la partie précédente que le champ électrique appartient aux plans de symétrie passant par le point où l'on souhaite calculer le champ électrique. Prenons donc un point M quelconque de l'espace. Tout plan passant par le point M et contenant le centre de la sphère est un plan de symétrie. On voit donc qu'une infinité de plans de symétrie passent par M et que l'intersection de ces plans est orientée selon le rayon de la sphère pointant vers M , c'est à dire selon la direction \vec{u}_r . Nous pouvons donc affirmer sans plus de calculs que le champ électrique est orienté selon $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$.

3. La distribution de charge est invariante selon toute rotation sur elle-même. Nous aurons le même champ électrique quels que soient les angles du repère sphérique θ et φ . Nous pouvons donc en déduire que le champ électrique ne dépend pas de ces variables. On obtient donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ où r est la distance entre le centre de la sphère et le point M .
4. Nous pouvons maintenant choisir une surface de Gauss S . Dans l'application du théorème de Gauss, la surface de Gauss S passe toujours par le point M que l'on considère. Prenons donc une sphère de centre O et de rayon $r = OM$. C'est bien une surface fermée dont le vecteur surface infinitésimal est orienté vers l'extérieur et s'écrit donc :

$$\vec{dS} = r d\theta \times r \sin\theta \times d\varphi \vec{u}_r \quad (2.51)$$

Dés lors :

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} E(r)\vec{u}_r \cdot r^2 d\theta \times \sin\theta \times d\varphi \vec{u}_r \\ &= E(r)r^2 \times 4\pi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Dans cette intégrale réalisée sur θ et φ , les considérations de symétries facilitent grandement le calcul d'intégrale puisque nous savons que \vec{E} ne dépend pas de θ et φ . Le calcul de la charge intérieure dépend de la valeur de r . En effet, si r est plus grand ou égal à R alors $Q_{int} = Ze$ alors que si r est inférieur à R , il nous faut calculer l'intégrale

$$Q_{int}(r) = \iiint \rho d\tau = \rho \int_0^r \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r'^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr' = 4\pi\rho \left[\frac{r'^3}{3} \right]_0^r = Ze \frac{r^3}{R^3} \quad (2.52)$$

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère s'écrira donc

$$\vec{E} = \frac{Zer}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{u}_r \quad (2.53)$$

alors que pour un point situé à l'extérieur de la sphère on aura

$$\vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (2.54)$$

Le choix d'une surface sphérique passant par M permet d'extraire du calcul du flux la valeur du champ précisément en M .

Le champ à l'extérieur de la sphère a la même expression que la loi de Coulomb ! Le champ créé par une distribution sphérique uniformément chargée est le même que celui créé par une même charge ponctuelle située au centre de la distribution.

Essayer de calculer le champ en calculant directement l'intégrale. La difficulté du calcul nous convainc que le théorème de Gauss est un outil très puissant. Nous verrons cependant qu'il n'apporte de solutions rapides que dans des géométries particulières, tout comme la première méthode rencontrée.

Commentaires

- Le théorème de Gauss ne serait pas valable si la force de Coulomb n'était pas en $1/r^2$. Il suffit de s'en convaincre en calculant le flux d'une charge ponctuelle :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\theta \times \sin\theta \times d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (2.55)$$

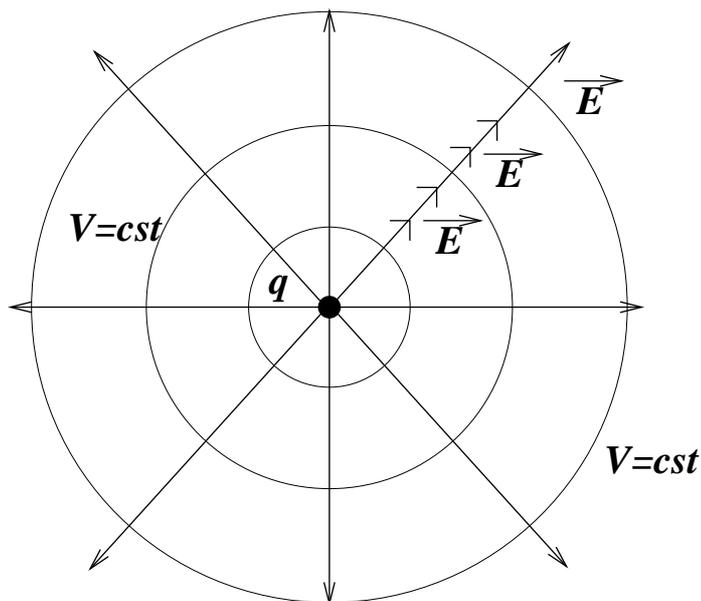


FIG. 2.4 – Lignes de champ et surfaces équipotentielles d’une charge ponctuelle, ici positive. Le champ électrostatique est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

Les facteurs en $1/r^2$ et en r^2 se compensent parfaitement ce qui ne serait pas le cas si la loi n’était pas en $1/r^2$.

La loi d’attraction gravitationnelle étant également en $1/r^2$, un théorème analogue existe pour l’attraction gravitationnelle avec la même conséquence ; la force d’attraction exercée par la Terre (supposée être une distribution sphérique de masse volumique uniforme) en un point est la même que la force qui s’exercerait si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre !

- Revenons maintenant à la notion de flux du vecteur \vec{E} avec l’exemple simple de la charge ponctuelle. Le théorème de Gauss nous apprend que le flux de \vec{E} est constant quelque soit la surface que l’on considère : il est soit nul si la surface ne contient pas la charge, soit égal à q/ϵ_0 si la surface entoure la charge.
- On utilise en électrostatique la notion de lignes de courant pour représenter spatialement l’allure du champ. Les lignes de champ sont par définition des courbes de l’espace qui sont en tout point M de l’espace tangentes au champ \vec{E} . Elles sont de plus orientées dans la direction du champ. Dans le cas d’une particule ponctuelle (voir figure 2.4), ces lignes sont donc des droites passant toutes par la charge. Elles “quittent” la charge si celle-ci est positive et convergent vers elle si elle est négative. Dit autrement, et le choix des mots n’est pas anodin, les lignes de champ **divergent** à partir des charges positives et elles **convergent** vers les charges négatives. Nous constaterons lors de l’étude du champ magnétique que ce dernier se comporte différemment et que la différence vient du fait que pour le champ magnétique, la **divergence** de \vec{B} est nulle tandis que pour le champ électrique, elle ne l’est pas. On a coutume également d’introduire les surfaces équipotentielles. Elles sont définies par l’ensemble des points M tels que $V(M) = \text{constante}$. Dans le cas d’une charge ponctuelle, ces surfaces sont donc des sphères. On retrouve cette idée de surface équipotentielle dans les cartes IGN avec les courbes de niveau, ou encore de même énergie potentielle de pesanteur ! Pour plus d’informations, lire le Feynmann page 69

Un dernier point : nous avons vu section précédemment que :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \quad (2.56)$$

Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ le long de la surface équipotentielle. $d\vec{OM}$ est donc tangent à la surface. Au cours de ce déplacement, le potentiel ne varie pas puisque nous sommes sur une surface équipotentielle. Donc $dV = 0$. On en déduit que $\vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0$. Le champ électrique est donc perpendiculaire au déplacement sur la surface. Il est donc normal à la surface. Nous pouvons en conclure que les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles. C'est une propriété générale des vecteurs gradient de fonctions.

Chapitre 3

Conducteurs en électrostatique et Condensateurs

Sommaire

3.1 Conducteurs en équilibre électrostatique	48
3.1.1 Champ à l'intérieur d'un conducteur	48
3.1.2 Conséquences	49
3.1.3 Théorème de Coulomb	49
3.1.4 Pouvoir des pointes	50
3.1.5 Les cavités au sein d'un conducteur	51
3.2 Les condensateurs	52
3.2.1 Définition et propriétés	52
3.2.2 Ordre de grandeur et remarque	53
3.2.3 Énergie d'un condensateur	54

AU MOMENT du démarrage d'une machine à laver le linge, le couple mécanique nécessaire pour démarrer la rotation du tambour est supérieur à celui nécessaire par la suite pour entretenir la rotation. C'est une caractéristique des forces de frottement : les forces de frottement dites statiques, qui empêchent la mise en rotation du tambour sont supérieures aux forces de frottement dites dynamique qui s'exercent une fois le tambour mis en mouvement. On peut avoir soi-même rencontré ce phénomène quand on cherche à pousser une charge lourde sur le sol : une fois la mise en mouvement de la charge effectuée, la force nécessaire pour maintenir le mouvement est plus faible que celle qu'il a fallu exercer pour la mettre en mouvement. Dans le cas de la machine à laver, vous verrez qu'on répond à ce problème en plaçant à l'entrée du circuit qui provoque le démarrage de la machine un condensateur : celui-ci est capable d'accumuler de l'énergie électrique et de la restituer au moment du démarrage. Le condensateur fournit l'énergie complémentaire à l'énergie fournie en permanence par le secteur pour mettre en route le tambour. Une fois celui-ci lancé, l'énergie fournie par le secteur suffit à le faire tourner.

Nous allons voir dans la deuxième partie de ce chapitre ce qu'est un condensateur. Nous avons besoin au préalable d'étudier le comportement des conducteurs dans le cadre de l'électrostatique, ce qui nous permettra de comprendre notamment le principe des paratonnerres, et pourquoi se réfugier dans une voiture est un réflexe sage en temps d'orage.

Les notions abordées dans ce chapitre sont illustrées magnifiquement sous forme d'expériences au palais de la Découverte (à côté du grand Palais, en bas des Champs Elysées). Allez y pour non seulement découvrir les multiples expériences que l'on peut y faire mais également pour écouter les présentations-spectacles des scientifiques qui y travaillent. Après ce cours, vous pourrez comprendre parfaitement l'essentiel des expériences que l'on peut y voir.

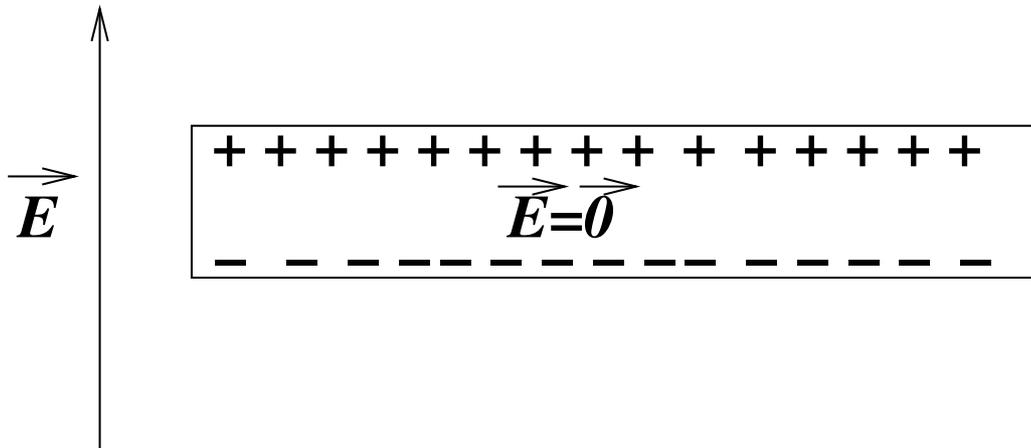


FIG. 3.1 – Répartition des charges dans un conducteur en présence d'un champ électrique extérieur au conducteur. Le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'un conducteur.

3.1 Conducteurs en équilibre électrostatique

DANS un conducteur électrique, comme le cuivre, un grand nombre d'électrons sont libres de se déplacer à l'intérieur du conducteur. Le conducteur est globalement neutre mais les électrons les moins liés au noyau de chaque atome sont libres de se déplacer. C'est une propriété intimement liée à la structure électronique de l'élément et à la structure cristalline pour un matériau solide.

Un grand nombre de matériaux ne sont pas classés comme conducteurs, on les appelle les isolants (verre, plastique, bois sec). Nous considérerons par la suite qu'aucun courant ne peut circuler dans un isolant. La distinction entre matériaux conducteurs et isolants n'est cependant pas nette. Il existe toute une gamme de corps allant des bons conducteurs aux bons isolants.

3.1.1 Champ à l'intérieur d'un conducteur

Considérons le bout de cuivre de la figure (3.1). Si un quelconque champ électrique existe dans la structure, il va mettre en mouvement les électrons libres du cuivre. Dans un conducteur non relié à l'extérieur, les électrons vont donc s'accumuler dans une région A de l'espace (Voir figure) créant ainsi une région chargée négativement et leur départ va créer en B un défaut d'électrons et donc une région chargée +. Il apparaît dès lors un champ électrique de sens contraire qui va s'opposer au déplacement des électrons. En électrostatique, nous supposons qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des électrons : cela implique que le champ créé s'opposera au champ initial de telle sorte que le champ total à l'intérieur du conducteur sera nul : aucun mouvement supplémentaire d'électrons ne sera possible. On dit alors que le conducteur est en équilibre, c'est à dire qu'il n'est le siège d'aucun mouvement d'ensemble des charges. Cette situation n'a rien d'irréelle. Tout bon conducteur isolé ne peut pas être le siège indéfiniment d'un courant en son sein car le mouvement des électrons entraîne inévitablement des pertes électriques : les forces de frottement (effet Joule) agissent également au niveau électronique et freinent inévitablement le mouvement des électrons. L'énergie perdue s'échappe la plupart du temps sous forme de chaleur. Si un champ électrique existe, les charges vont donc se disposer de telle sorte à s'opposer à l'existence même de ce champ et prévenir ainsi tout mouvement ultérieur d'électrons, consommateur d'énergie.

Nous retiendrons donc que dans la suite du cours, **les conducteurs sont en équilibre électrostatique, ce qui sous entend que le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul**

3.1.2 Conséquences

1. L'équation de Maxwell-Gauss nous informe que si le champ électrique dans le conducteur est nul, alors la charge volumique est nulle :

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad (3.1)$$

La charge volumique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est nulle. Cela ne signifie pas que le conducteur est forcément neutre ; cela signifie simplement que si les charges existent, elles sont disposées à la surface du conducteur. Dans l'exemple vu à la section précédente, les charges sont donc disposées aux surfaces du conducteur. Nous avons déjà rencontré cette notion au premier chapitre section 1.4.2 lors du calcul du potentiel créé par un disque métallique chargé.

2. Deuxième conséquence : **Le potentiel électrique d'un conducteur en équilibre électrostatique est uniforme.** En effet :

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(V) = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Donc V est une fonction qui ne dépend ni de x , ni de y ni de z . V est donc une constante en tout point du conducteur. La surface du conducteur est donc une équipotentielle.

3. Nous pouvons en déduire d'après la section (2.4.2) que les lignes de champ à l'extérieur du conducteur sont au niveau de la surface perpendiculaires à celle-ci.

3.1.3 Théorème de Coulomb

On va appliquer ce qu'on vient de voir à la détermination du champ électrique **au voisinage immédiat** d'un conducteur. Imaginons une surface métallique quelconque d'un conducteur en équilibre électrostatique et appelons $\sigma(P)$ la charge surfacique en un point P de la surface. Nous allons appliquer le théorème de Gauss pour déterminer la valeur du champ en un point M situé au voisinage immédiat de P . Nous savons déjà que le champ est perpendiculaire à la surface. Comme nous sommes au voisinage immédiat de la surface, M voit la surface comme un plan infini. Choisissons comme surface de Gauss un cylindre de base infinitésimale dS , d'axe perpendiculaire à la surface, et passant par les points M et M' , avec M' appartenant au métal (Voir figure). Nous avons :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \iint \frac{\sigma(P)dS}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

Décomposons la surface de Gauss en trois surfaces : les deux bases dS_1 et dS_2 et le contour cylindrique S_3 .

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \iint_{dS_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} \\ &+ \iint_{dS_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS} \end{aligned}$$

Le champ est nul dans le conducteur donc :

$$\iint_{dS_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (3.4)$$

La surface dS_2 peut être prise suffisamment proche de la surface du conducteur pour que le champ soit perpendiculaire à cette surface et suffisamment petite pour que \vec{E} soit considéré comme constant

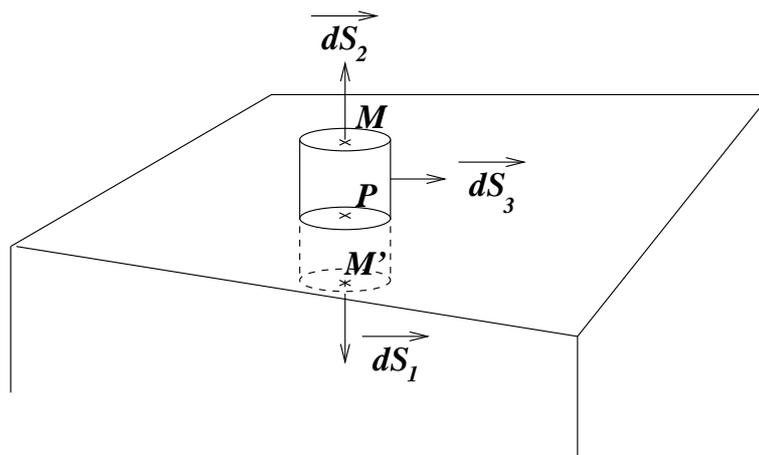


FIG. 3.2 – Surface de Gauss pour le calcul du champ créé par à la surface d'un conducteur

sur cette surface infinitésimale. Sous ces conditions on peut écrire

$$\iint_{dS_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}_2 \quad (3.5)$$

Le champ électrique étant perpendiculaire à la surface du conducteur, on peut aussi écrire que $\vec{E} \perp \vec{dS}_3$ d'où

$$\iint_{dS_3} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (3.6)$$

On en déduit que pour un point M au voisinage de la surface :

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{dS}_2 = \frac{\sigma(M) dS}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

La composante normale à la surface : E_N vérifie donc

$$E_N(M) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

Or nous venons de voir qu'au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, le champ est normal à la surface. Donc $\vec{E}_N(M) = \vec{E}(M)$ et le champ électrique au voisinage de la surface est donc simplement le rapport de la densité superficielle de charge sur ϵ_0 . Ceci constitue le théorème de Coulomb.

$$\text{Théorème de Coulomb : } \vec{E}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{u}_N \quad (3.9)$$

\vec{u}_N est le vecteur normal à la surface et sortant de cette surface.

3.1.4 Pouvoir des pointes

Pourquoi la foudre va préférentiellement frapper le paratonnerre : objet métallique pointu qui s'élève dans le ciel ? Ou encore pourquoi le feu de saint-elme, qui est constitué d'aigrettes lumineuses d'électricité, apparaît sur les piolets en montagne par temps d'orage ? A cause de ce qu'on appelle le pouvoir des pointes (métalliques).

Si un métal chargé possède une pointe, le champ électrique est plus élevé eu niveau de la pointe qu'en toute autre région de la surface. La surface mise à disposition des charges y est beaucoup

plus grande, et comme les charges se repoussent les unes les autres, il y en a une plus grande quantité au niveau de la pointe. Il en résulte un champ électrique plus intense au voisinage des pointes. Que se passe-t-il maintenant par temps d'orage ? L'atmosphère est soumise à bon nombre de phénomènes électriques, même par beau temps. Feynman en parle dans son livre d'électromagnétisme 1 au chapitre 9. On y apprend par exemple qu'en temps normal, la Terre est chargée négativement et l'atmosphère positivement et qu'il y a un gradient de potentiel de $100V/m$ (!!) au niveau du sol ! En temps d'orage, on retiendra simplement que le potentiel du nuage est beaucoup plus négatif que celui de la Terre ; les électrons ont donc tendance à se déverser sur Terre. Mais l'air n'est-il pas considéré comme un isolant ? Oui mais ce n'est pas un isolant parfait ; l'air possède toujours un certain nombre d'ions, de particules chargées. Leur concentration est suffisamment faible en temps normal pour ne pas laisser passer de courants importants mais par temps d'orage, il suffit qu'un de ces ions soient accélérés par la forte différence de potentiel entre le nuage et la Terre pour produire un très grand nombre d'autres ions : la particule chargée accélérée possède l'énergie suffisante pour arracher un électron à un autre atome lors d'une collision et ainsi l'ioniser. Celui-ci est alors également accéléré et un courant d'ions et d'électrons apparaît ainsi, ce qui permet aux électrons du nuage de s'échapper. La valeur minimale du champ électrique qui permet ce processus d'ionisation de l'atmosphère est ce qu'on appelle le *champ disruptif* de l'air et il vaut $3 \times 10^6 V/m$ à $20^\circ C$. Au niveau d'une pointe métallique, le champ électrique plus intense canalise le courant électrique ainsi formé. De plus amples détails se trouvent dans le même chapitre du Feynman.

3.1.5 Les cavités au sein d'un conducteur

Champ nul à l'intérieur de la cavité

Considérons une sphère métallique creuse : il existe à l'intérieur une cavité sphérique, fermée, vide de charges. **Nous pouvons montrer en exercice que le champ électrique à l'intérieur de la cavité est nul.** Ce résultat est en fait vrai pour un conducteur de forme quelconque dans lequel existe une cavité de forme quelconque. On peut le montrer de la façon suivante :

1. On va tout d'abord montrer que dans une région de charges, le potentiel électrostatique ne peut pas avoir d'extremum. Raisonnons par l'absurde. Supposons ainsi par exemple que le potentiel présente un maximum en un point M. Le potentiel décroît donc dans toutes les directions à partir de M. Or le champ étant dirigé des forts potentiels vers les faibles potentiels, le champ \vec{E} diverge depuis le point M dans toutes les directions de l'espace. Soit S une petite sphère centrée en M. le flux de \vec{E} à travers cette sphère est donc strictement positif puisque \vec{E} sort de la sphère en tout point de cette dernière. Donc d'après le théorème de Gauss, à ce flux positif correspond forcément une charge à l'intérieur de la sphère. Or il n'y a pas de charges dans la cavité. Conclusion, l'hypothèse de départ qui consiste à dire que le potentiel a un maximum dans la cavité est fautive. Nous pourrions dire de même pour le cas d'un minimum de potentiel.
2. Le potentiel est constant dans la cavité et nous savons qu'il est également constant sur les parois du conducteur (puisque le potentiel d'un conducteur est constant). Donc le potentiel est constant partout, ce qui signifie que son gradient est nul. **Le champ électrique est nul à l'intérieur de la cavité.**
3. D'après le théorème de Coulomb, on peut en déduire que la charge surfacique à l'interface conducteur cavité est nulle en tout point.

Cette démonstration a été faite sans rien supposer de ce qui se passe à l'extérieur du conducteur. Quelque soit le champ électrique que l'on établit à l'extérieur, les charges de la surface extérieure

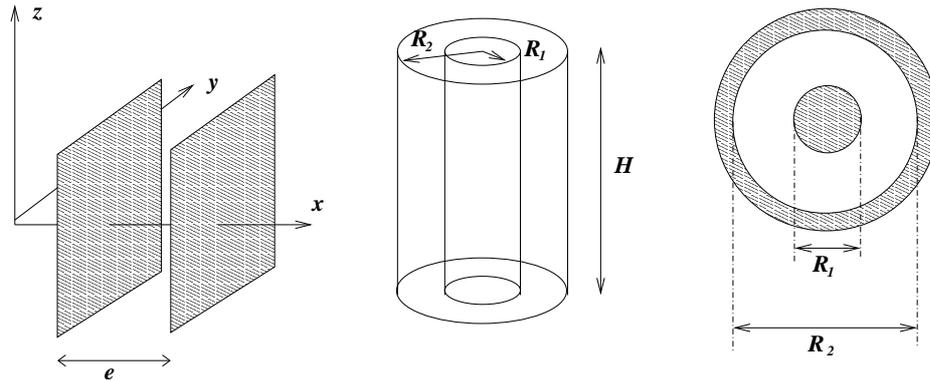


FIG. 3.3 – Différents types de condensateur : condensateur plan, condensateur cylindrique et condensateur sphérique.

du conducteur vont se déplacer et se réarranger de telle sorte que le champ électrique soit nul au sein du conducteur et par voie de conséquence au sein de la cavité. Une cavité au sein d'un conducteur est un lieu entièrement protégé de toute activité électrostatique extérieure. Et cela reste valable en dehors du cadre de l'électrostatique. C'est pour cela que les occupants d'une voiture sont protégés de la foudre par la carcasse métallique de la voiture : le champ électrique à l'intérieur y est nul. Faraday a démontré par ailleurs expérimentalement qu'une simple grille métallique permet également de protéger l'intérieur de toute influence. On appelle la grille la cage de Faraday. La plupart des appareils électroniques possède une carcasse métallique pour cette raison.

3.2 Les condensateurs

3.2.1 Définition et propriétés

UN CONDENSATEUR est un appareil comportant deux armatures composées d'un matériau conducteur. Ces deux armatures ne sont pas en contact mais espacées d'une distance variable dépendant de la géométrie du condensateur. Les deux armatures sont portées à des potentiels électrostatiques différents, entraînant l'apparition d'une densité surfacique de charge sur chacune des armatures. La charge totale portée par chaque armatures est égale à l'opposée de l'autre armature.

On définit la capacité d'un condensateur C comme étant le coefficient de proportionnalité entre la charge portée par une armature et la différence de potentiel entre les deux armatures. Par convention, on choisit C comme positif et son unité dans le système international est le Farad (F). La différence de potentiel entre les armatures et la charge de la première armature est

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad (3.10)$$

Dans la suite de cette section, nous allons considérer trois types de condensateur et déterminer leurs capacités.

Condensateur plan

Dans ce type de condensateur, on considère deux armatures identiques en forme de plan dont la surface est S et la distance entre les deux plaques est e . Étant donnée la géométrie du condensateur, le système de coordonnées cartésien semble le plus pratique. Dans le cas de ce condensateur, il n'y a pas en tout point de plan de symétrie évident, nous n'allons donc pas utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique et le potentiel entre les deux plaques. Pour exprimer le potentiel, utilisons l'équation de Laplace. Dans l'hypothèse de plaques de très grande dimension

comparée à la distance entre les plaques, on peut considérer que les plaques ont une extension spatiale infinie.

Prenons un point M quelconque entre les deux plaques. Appliquons lui une translation parallèle aux plaques dans la direction y ou z : que se passe-t'il ? Rien car on se retrouve avec la même configuration parce que les plaques sont infinies. On a donc invariance par translation selon y et z et nous pouvons en déduire que ni le champ, ni le potentiel électrostatique ne dépendent de y et z . L'équation de Laplace sera donc

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = 0 \Rightarrow V(x) = Ax + B \quad (3.11)$$

où A et B sont des constantes. Pour déterminer la constante A on peut écrire le champ électrique

$$\vec{E}(x) = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x = -A \vec{u}_x \quad (3.12)$$

Le champ électrique est constant entre les deux armatures et son orientation est selon la direction (Ox) . Le théorème de Coulomb au voisinage de la première armature nous indique que $E(x_1) = \sigma_1/\varepsilon_o$ où x_1 est la position de la première armature. Cette densité surfacique de charge σ_1 est constante sur toute la plaque car le champ électrique est lui-même constant. La charge totale de l'armature sera $Q_1 = \sigma_1 S$. La deuxième armature aura ainsi une densité de charge $\sigma_2 = -\sigma_1$ car le vecteur normal à la surface de la deuxième armature est dirigé selon \vec{u}_x .

L'expression de la différence de potentiel entre les deux plaques sera donc

$$V(x_1) - V(x_2) = \frac{\sigma_1(x_2 - x_1)}{\varepsilon_o} = \frac{Q_1 e}{S \varepsilon_o} \rightarrow Q_1 = \frac{S \varepsilon_o}{e} (V_1 - V_2) \quad (3.13)$$

On obtient ainsi la capacité de ce condensateur comme $C = \varepsilon_o S/e$.

Condensateurs cylindrique et sphérique

Nous ne traiterons pas en détail ces condensateurs mais nous les étudierons en travaux dirigés. Néanmoins vous pouvez vous entraîner à calculer leur capacité cette fois-ci en calculant le champ électrique entre les armatures et en déduisant le potentiel. Sur ce type de condensateur, il vous est conseillé d'utiliser le bon système de coordonnées ainsi que le théorème de Gauss. Vous pourrez néanmoins utiliser la relation de Laplace pour arriver au même résultat. A titre indicatif, les capacités de ces condensateurs sont

$$C_{\text{cyl}} = \frac{2\pi\varepsilon_o H}{\ln R_2/R_1} \quad (3.14)$$

$$C_{\text{sph}} = \frac{4\pi\varepsilon_o R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (3.15)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons des armatures et H la hauteur du cylindre (voir Fig.3.3).

3.2.2 Ordre de grandeur et remarque

Si on rapproche de plus en plus les armatures du condensateur, le champ électrique entre les armatures va atteindre la valeur du champ disruptif de l'air et une étincelle va apparaître entre les deux armatures, déchargeant celles-ci.

Effectuons un ordre de grandeur : Supposons qu'on charge avec une tension de $10^5 V$ un condensateur constitué de deux plaques de 10 cm de diamètre. Sous cette tension, le champ disruptif est atteint pour une distance :

$$e = U/E = 10^5 / (3 \cdot 10^6) = 3 \text{ cm}. \quad (3.16)$$

C'est une valeur suffisante pour pouvoir voir une étincelle. Mais remarquez que nous ne pourrions pas faire l'expérience de nous même car nous ne disposons pas de $100000V$ au quotidien. Rendez vous au Palais de la découverte pour y voir un exemple de gros condensateur. IL fonctionne avec $60000V$.

La capacité vaut alors environ (voir remarque) $C = \pi(0,05)^2 \cdot [36\pi 10^9]^{-1} / (3 \cdot 10^{-2}) = 2 \cdot 10^{-12} F$. C'est une valeur très faible par rapport à ce que l'on rencontre dans les circuits électriques. Une capacité ordinaire vaut de quelques dizaines de nanofarad au microfarad. On obtient de telles valeurs de capacité en mettant entre les deux plaques conductrices à la place de l'air un autre matériau isolant. Nous verrons au prochain chapitre pourquoi cela augmente la valeur de C et permet ainsi pour une même tension de stocker plus de charges.

Remarques

- L'étude réalisée au cours des deux dernières sections suppose que le rapport de la longueur caractéristique de l'armature sur la distance e soit très grand. Ceci justifie l'hypothèse de l'invariance par translation des armatures et ainsi que le potentiel ne dépend que de z . Quand on se rapproche des bords du condensateur, cette hypothèse n'est plus valide et on constate alors que le champ n'est plus constant et n'est plus selon \vec{u}_x uniquement.
- Contrairement au cas d'une simple plaque conductrice, on peut accumuler beaucoup de charges de même signe sur chaque plaque du condensateur du fait de l'interaction électrostatique attractive qui apparaît entre chaque plaque ;
- Le système d'allumage d'une voiture comporte un certain nombre de condensateurs qui stockent l'énergie fournie par la batterie en vue de permettre l'étincelle au niveau de la bougie.

3.2.3 Énergie d'un condensateur

Le calcul de l'énergie portée par un condensateur se fait en utilisant la formule vue précédemment pour le calcul d'une distribution surfacique de charge. En effet, seule la surface des armatures étant porteuse de charge on peut écrire

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\iint \sigma_1 V_1 dS + \iint \sigma_2 V_2 dS \right) = \frac{1}{2} \left(V_1 \iint \sigma_1 dS + V_2 \iint \sigma_2 dS \right) = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \quad (3.17)$$

où nous avons utilisé la propriété des armatures d'un condensateur qui stipule que son potentiel est constant partout sur l'armature. Sachant que $Q_1 = -Q_2$, on arrive facilement à

$$E_p = \frac{Q_1}{2} (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{Q_1^2}{2C} \geq 0 \quad (3.18)$$

Remarque Cette énergie peut se re-écrire sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S e \quad (3.19)$$

Pour le condensateur plan vu précédemment de diamètre $10cm$ et pour une épaisseur de $3cm$, l'énergie maximale emmagasinée va être celle pour laquelle le champ électrique atteint la valeur du champ disruptif : elle vaut donc après calcul $0,009$ Joule ! Les condensateurs ne peuvent pas être utilisés pour stocker les surplus d'énergie électrique. L'énergie stockée ici est insuffisante. A titre de comparaison, une ampoule de $30W$ nécessite 30 Joules par seconde.

Chapitre 4

Dipôles électriques et polarisation la matière

Sommaire

4.1 Dipôle électrique	55
4.1.1 Définition du dipôle	55
4.1.2 Champ électrique d'un dipôle	57
4.1.3 Cas d'une distribution de charges ponctuelles quelconque	58
4.1.4 Remarques	59
4.2 Polarisation de la matière	59
4.2.1 Moment dipolaire induit	59
4.2.2 Vecteur Polarisation	60
4.2.3 Application au condensateur	61
4.2.4 Equations de Maxwell dans les diélectriques en électrostatique	62
4.3 Application aux forces de cohésion dans la matière	63
4.3.1 Energie d'interaction d'un dipôle dans un champ électrique	63
4.3.2 Forces de Van der Waals	66

NOUS savons déjà que la force électrique est responsable de la cohésion de l'atome et nous avons vu au second chapitre qu'on pouvait représenter de façon satisfaisante la cohésion du cristal NaCl par de simples interactions électrostatiques. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux différents types d'interaction de nature électrostatique qui gouvernent la constitution d'une molécule et les interactions entre molécules. Nous commencerons notre étude par la notion de dipôle électrique.

4.1 Dipôle électrique

Considérons la molécule de chlorure d'hydrogène HCl. Le chlore, avec ses 7 électrons sur la bande de valence est beaucoup plus **électronégatif** que l'hydrogène : il attire l'électron de l'hydrogène de telle sorte qu'on peut le considérer comme chargé négativement tandis que l'hydrogène est chargé positivement. La molécule d'HCl est neutre mais ce n'est pas pour autant qu'elle ne crée pas un champ électrique et c'est ce que nous allons voir maintenant.

4.1.1 Définition du dipôle

Soit A et B les positions respectives du chlore et de l'hydrogène. On assimilera l'hydrogène à une charge positive q et le chlore à une charge négative $-q$. Soit (Oz) l'axe passant par A et B et d la

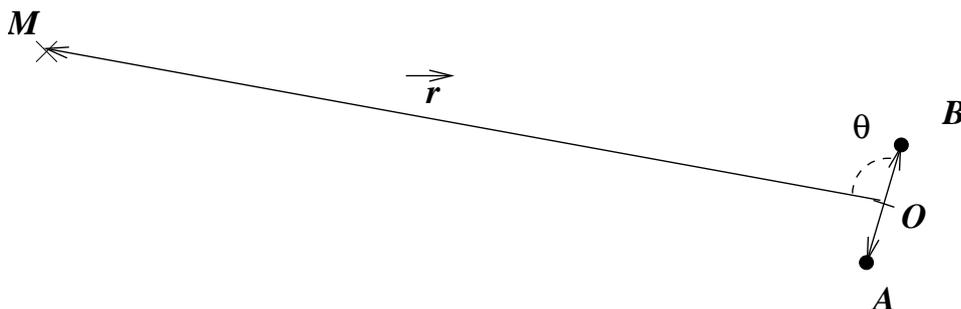


FIG. 4.1 – Système de coordonnées pour le dipôle. Un dipôle est constitué d'une charge positive en B et d'une charge négative en A, peu éloignées par rapport à la distance entre le dipôle et un observateur situé en M.

distance AB. On note O le centre de AB. On travaillera par la suite en coordonnées sphériques. Elles constituent en effet le meilleur choix de coordonnées dès qu'on travaille avec un dipôle, comme nous allons le voir maintenant. On note $M(r, \theta, \varphi)$ le point où on cherche le potentiel électrique. ($OM = r$) D'après le principe de superposition :

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{BM} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{AM} \quad (4.1)$$

Avec :

$$BM = \sqrt{\|\vec{BM}\|^2} = \sqrt{\|\vec{BO} + \vec{OM}\|^2} = \sqrt{(BO^2 + r^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OM})}$$

$$AM = \sqrt{\|\vec{AO} + \vec{OM}\|^2} = \sqrt{(AO^2 + r^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM})}$$

On se place maintenant à une distance $OM \gg d$. Cette approximation porte le nom d'**approximation dipolaire**.

Définition : on appelle *dipôle électrique* une paire de deux charges opposées séparées d'une distance très faible par rapport à la distance les séparant du point d'observation M.

Nous pouvons dès lors faire les développements limités suivants :

$$\text{Rappel : } (1 + x)^m \simeq 1 + mx \text{ pour } x \ll 1 \quad (4.2)$$

$$BM^{-1} = [r^2(1 + BO^2/r^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OM}/r^2)]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\vec{BO} \cdot \vec{OM}}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{\vec{BO} \cdot \vec{OM}}{r^3}$$

$$\text{De même } AM^{-1} = \frac{1}{r} - \frac{\vec{AO} \cdot \vec{OM}}{r^3} \quad (4.3)$$

Dans ce développement, on a négligé les termes du deuxième ordre en BO^2/r^2 . D'où :

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\vec{BO} \cdot \vec{OM}}{r^3} - \frac{1}{r} + \frac{\vec{AO} \cdot \vec{OM}}{r^3} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\vec{BO} + \vec{AO}) \cdot \vec{OM}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB} \cdot \vec{OM}}{r^3}$$

$$\text{Donc } V(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

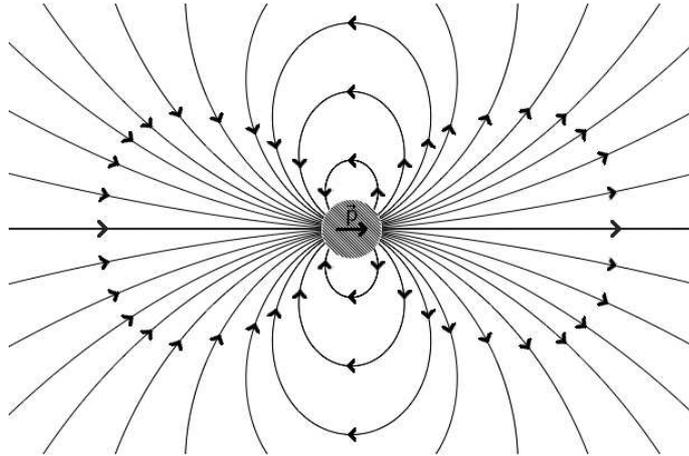


FIG. 4.2 – Lignes de champ électrique générées par un dipôle dont le moment dipolaire est \vec{p} .

où le vecteur $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ est un des vecteurs unitaires de la base de coordonnées sphérique.

Le potentiel est donc en $1/r^2$ et non en $1/r$ comme c'est le cas pour une charge ponctuelle. Quand on regarde à grande distance, le dipôle se comporte comme un ensemble neutre : le potentiel en $1/r$, qui est caractéristique d'une charge ponctuelle, n'existe donc pas ; en revanche il existe une contribution plus faible en $1/r^2$ due au fait que les charges positives et négatives sont spatialement séparées.

On définit le **vecteur moment dipolaire** $\vec{p} = q\vec{AB}$ (à ne pas confondre avec une quantité de mouvement). Le vecteur \vec{p} est toujours orienté du barycentre des charges négatives vers celui des charges positives. Nous avons donc :

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (4.4)$$

Avec p le module du vecteur moment dipolaire \vec{p} .

4.1.2 Champ électrique d'un dipôle

L'expression du gradient d'un champ scalaire V en coordonnées sphériques est

$$\vec{\nabla} V(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (4.5)$$

Sachant que le champ électrique est $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, nous pouvons calculer ce champ en commençant par la fonction

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) &= \frac{\partial \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ &= -2 \left(\frac{\cos \theta}{r^3} \right) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

L'expression du champ électrique découle du calcul précédent

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \\ E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta}{r^3} \right) \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p \sin \theta}{r^3} \right)\end{aligned}$$

Le champ étant un gradient du potentiel, il va donc évoluer en $1/r^3$ au lieu de $1/r^2$ comme pour une charge ponctuelle. On remarque que le champ n'a pas de composante selon \vec{u}_φ . Vous pouvez voir à titre indicatif l'allure des lignes de champ du dipôle sur la Fig.(4.2).

4.1.3 Cas d'une distribution de charges ponctuelles quelconque

Nous pouvons généraliser l'étude menée précédemment sur la molécule HCl à d'autres molécules possédant un plus grand nombre de charges distribuées de manière plus ou moins compliquée. Un exemple simple est la molécule d'eau H_2O . L'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, il a tendance à attirer les deux électrons situés sur les deux hydrogènes. L'oxygène possède donc une charge négative $-q$ tandis que les deux atomes d'hydrogène possèdent une charge $+q/2$. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la molécule d'eau n'est pas linéaire. Les deux atomes d'hydrogène sont disposés comme sur la figure. Ainsi le barycentre des charges négatives est décalé par rapport au barycentre des charges positives.

Cette géométrie s'explique par le fait que 4 des 6 électrons de la bande de valence de l'oxygène n'interviennent pas dans la formation des liaisons avec l'hydrogène. Sans entrer dans les détails, nous pouvons simplement dire que la répulsion électrostatique qui existe entre ces électrons et les liaisons provoque cette géométrie. La molécule d'eau va donc posséder un moment dipolaire.

Généralisons le système en supposant qu'une distribution possède N charges q_i situées en P_i et déterminons le potentiel en un point M situé à une distance très grande devant la séparation entre chaque charge. (voir la Fig.4.3)

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{P_i M} \quad (4.6)$$

Soit O l'origine du repère pris en un point quelconque de la distribution de charges. Puisque $OP_i \ll OM = r$, nous pouvons faire le même développement limité que pour l'équation (4.3) dans la section 4.1.1.

$$\frac{1}{P_i M} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \overrightarrow{P_i O} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Donc :

$$\begin{aligned}V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} - \frac{q_i}{r^3} \overrightarrow{P_i O} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \right]\end{aligned}$$

On note $Q = \sum_i q_i$ et \vec{p} le moment dipolaire de la distribution : $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$. Nous avons donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \right] \quad (4.7)$$

On constate que si la distribution n'est pas neutre : $Q \neq 0$ le terme dominant à grande distance est celui créé par une charge ponctuelle de charge Q située en O . A grande distance, le point M voit la distribution de charges comme une charge ponctuelle.

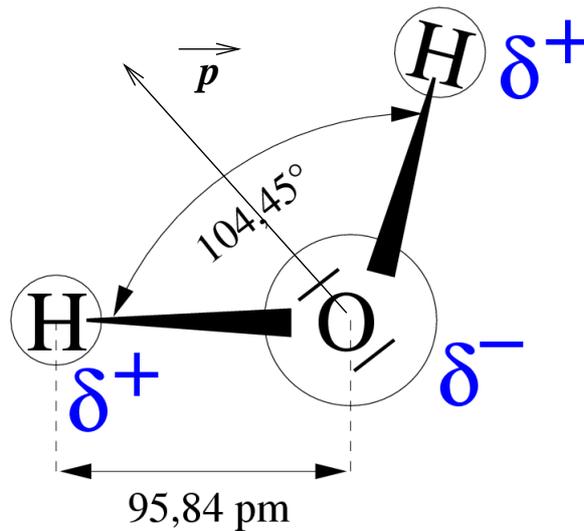


FIG. 4.3 – Moment dipolaire \vec{p} de la molécule d'eau provenant de l'asymétrie entre les positions des atomes d'hydrogène.

Si en revanche $Q = 0$, c'est à dire pour une distribution globalement neutre, alors le terme dominant est le terme dipolaire qui admet la même expression qu'à la section (4.1.1). La définition donnée pour le moment dipolaire est la généralisation à un ensemble de charge.

En conclusion, pour un ensemble de charges, on retrouve les expressions du potentiel et du champ déterminées avant. La seule chose qui change est la valeur de \vec{p} .

4.1.4 Remarques

- Les molécules sont à l'état naturel essentiellement neutres. Elles interagissent pourtant les unes avec les autres à distance. La notion de champ dipolaire est très importante pour expliquer ces interactions.
- Certaines molécules comme le dioxyde de carbone CO_2 sont neutres et ne possèdent pas de moment dipolaire : les deux atomes d'oxygène, de charge $-q$ sont alignés au carbone (charge $+2q$) et situés de part et d'autre à égale distance. Si on choisit comme origine O la position du carbone, on voit que \vec{p} est nul. Ce type de molécule va quand même créer un champ mais qui sera issu du développement limité de V à un ordre supérieur. On parle alors de potentiel quadripolaire.
- Dans le système international, le moment dipolaire a son unité, le Debye (D). On peut exprimer cette unité comme $1D = \frac{1}{3}10^{-29} Cm$. A titre indicatif, le moment dipolaire de l'eau est 1,86 Debye.

4.2 Polarisation de la matière

4.2.1 Moment dipolaire induit

Expérience : Prenez une règle en plastique et frottez la énergiquement avec de la laine. Puis approchez la règle d'une feuille de film transparent utilisé en cuisine. Que se passe t-il ? La feuille est attirée par la règle. Pourquoi ?

Lorsqu'on place un isolant tel que du plexiglas ou du verre entre les deux armatures d'un condensateur, on constate expérimentalement que la capacité augmente. Pourquoi ?

Le film transparent est attiré par la règle en plastique dont nous savons qu'elle est chargée négativement. S'il y a attirance, cela signifie que des charges positives sont apparues sur le film. D'où viennent donc ces charges puisque le film n'est pas conducteur et qu'il est globalement neutre ?

Il ne possède pas d'électrons libres de se déplacer dans toute la structure. Cependant, les électrons liés aux atomes du film vont subir une force de répulsion électrique à l'approche de la règle. Imaginons un de ses atomes d'un peu plus près. En l'absence de champ électrique, nous savons que l'atome a une symétrie sphérique et qu'il est composé d'un noyau chargé positivement entouré par un nuage d'électrons, de charge négative. En présence du champ créé par la règle, que se passe-t-il ? Le noyau sera attiré dans un sens et les électrons dans un autre ; **le barycentre des charges négatives ne coïncidera donc plus avec le barycentre des charges positives** ; on notera δ la distance séparant les barycentres. Le champ électrique a donc induit l'existence d'un dipôle. Chaque atome du film transparent possède en présence du champ électrique *un moment dipolaire induit* que l'on notera \vec{p} . On peut donc voir le film comme un empilement de dipôles. Si on regarde le film dans son ensemble, on s'aperçoit qu'en présence d'un champ uniforme, cette séparation infinitésimale entre les électrons et les noyaux induit l'apparition d'une charge superficielle non nulle, positive sur la face du film en regard avec la règle et négative sur la face inverse. On qualifie habituellement ces charges de *charges liées* ou encore de *charges de polarisation* pour les différencier de charges qu'on aurait éventuellement apportées par frottement du film. Les charges positives induites à la surface sont responsables de l'attraction du film sur la règle.

4.2.2 Vecteur Polarisation

Le terme *diélectrique* est habituellement employé comme synonyme d'isolant. Nous allons formaliser le phénomène de polarisation de la matière en reprenant l'exemple du condensateur plan dans lequel on introduit un diélectrique. Le condensateur plan chargé créé entre ses armatures un champ électrique uniforme (chapitre 3). Compte tenu de ce que nous venons de voir, nous savons que la plaque de diélectrique peut être considérée comme un empilement de dipôles. On introduit le champ vectoriel de polarisation $\vec{P}(x, y, z, t)$ qui représente la densité volumique de moment dipolaire. Ainsi par exemple, s'il existe n atomes par unité de volume qui possèdent chacun un moment dipolaire \vec{p} , un volume V de matière possèdera un moment dipolaire macroscopique $nV\vec{p}$ et le vecteur polarisation s'écrit : $\vec{P} = n\vec{p}$.

Dans le cas du condensateur, en reprenant la figure (4.4), on voit que les charges + et - se compensent exactement dans tout le volume de la plaque, de telle sorte que la charge volumique y est nulle. Il reste en revanche sur les faces de la plaque deux couches surfaciques de charges de polarisation. La charge présente dans un élément de volume $dxdy \times \delta$ situé au niveau de la surface est $dq = n(\pm e)dxdy\delta$. La charge surfacique de polarisation est donc

$$\sigma_{pol} = \frac{dq}{dxdy} = ne\delta = \pm \vec{P} \cdot \vec{u}_z$$

Ce résultat est plus général ; on peut montrer simplement (voir par exemple électromagnétisme 2 de Gié et Sarmant) que pour un diélectrique quelconque :

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (4.8)$$

Avec \vec{n} le vecteur sortant normal à la surface.

Remarque : (facultatif) De la même manière, si la répartition des dipôles dans le volume n'est pas uniforme, une charge volumique de polarisation apparaît et on peut montrer que :

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (4.9)$$

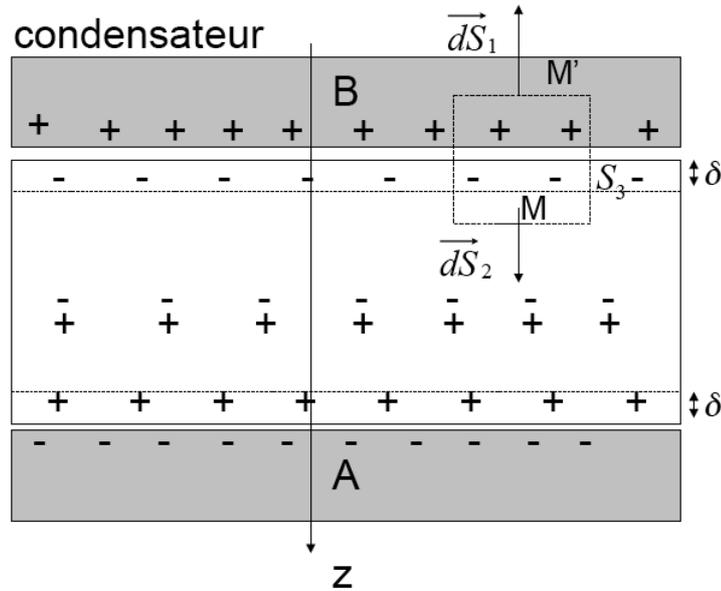


FIG. 4.4 – Insertion d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur

4.2.3 Application au condensateur

On considère le condensateur chargé de la Fig.(4.4). On note σ la densité surfacique de charge portée par l'armature positive du condensateur. Appliquons le théorème de Gauss à la surface de Gauss représentée en pointillés. Elle passe par l'armature métallique (dans laquelle le champ est nul puisque l'armature est assimilée à un conducteur parfait en équilibre). La démonstration est la même que pour le théorème de Coulomb. On considère les armatures comme des plans infinis. D'après les symétries du système, nous savons que le champ sera porté par \vec{u}_z et ne dépend que de z .

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{dS_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &+ \iint_{dS_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{dS_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(M)dS = \frac{\sigma - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} dS \end{aligned}$$

Dans ce calcul, deux des intégrales sont nulles pour les mêmes raisons que dans le cas du théorème de Coulomb. On note par ailleurs σ la charge surfacique positive portée par l'armature et $-\sigma_{pol}$ la charge surfacique négative de polarisation.

Nous voyons donc que le champ électrique s'écrit, puisque $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{u}_z = P$.

$$\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma - \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (4.10)$$

Pour comprendre pourquoi la capacité augmente, il faut s'intéresser de plus près à la valeur de \vec{P} . La polarisation est induite par le champ électrique présent dans le milieu. Pour des champs électriques peu intenses, on constate expérimentalement que dans certains milieux, le vecteur polarisation est proportionnel au champ électrique et on introduit une constante de proportionnalité χ telle que :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (4.11)$$

χ est appelée la susceptibilité électrique du diélectrique. C'est une constante positive puisqu'on voit sur la figure que \vec{P} et \vec{E} sont orientés dans le même sens. La proportionnalité entre la cause : le champ et l'effet la polarisation est une approximation fréquente en physique tant que la cause est de faible amplitude. Par exemple, pour un ressort, quand on tire le ressort en exerçant une force (la cause), l'élongation du ressort qui en résulte, l'effet, est proportionnelle à la force : ($F = kx$).

Dans le cas du condensateur, on en déduit que :

$$\vec{E} = \frac{\sigma - \varepsilon_0 \chi \vec{E}}{\varepsilon_0} \quad (4.12)$$

Donc,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} \vec{u}_z \quad (4.13)$$

On en déduit que le champ entre les deux armatures est plus faible en présence d'un diélectrique que sans. Nous pouvons en voir l'origine sur la figure. Les charges liées aux surfaces du diélectrique créent elles même un champ électrique induit qui tend à s'opposer au champ initial. Le champ résultant, qui est la somme des deux champs est donc plus faible que le champ initial. On voit ici la grande différence qui existe entre un conducteur et un diélectrique. Dans le cas du conducteur, on va observer un déplacement d'électrons tels qu'à l'équilibre électrostatique, le champ induit va s'opposer parfaitement au champ initial, ce qui fait que le champ résultant dans le conducteur est nul. Dans le cas du diélectrique, le champ se trouve affaibli mais pas nul.

Calculons maintenant la capacité et déterminons pour cela la relation entre la charge portée par les armatures et la tension.

$$U = V_+ - V_- = \int_A^B dV = \int_A^B \nabla \vec{V} \cdot \overrightarrow{dOM} = \int_A^B (-E_z)(-dz) = \frac{e\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi}$$

Si on note S la surface des armatures et $Q = \sigma S$ la charge portée par l'armature positive

$$U = \frac{e\sigma S}{S\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} = \frac{Qe}{S\varepsilon_0(1 + \chi)} \quad (4.14)$$

Ainsi la capacité vaut :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S(1 + \chi)}{e} \quad (4.15)$$

On voit donc que la capacité initiale $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ quand le vide séparait les deux armatures, est multipliée désormais par un facteur $1 + \chi = \varepsilon_r$. La grandeur ε_r est appelée la permittivité diélectrique du matériau. C'est une propriété du matériau qui traduit la réponse du matériau à une excitation électromagnétique (ici le champ électrique). Cette notion est fondamentale tout autant en électrostatique qu'en électromagnétisme.

4.2.4 Equations de Maxwell dans les diélectriques en électrostatique

Cette section explique comment se réécrivent les équations de Maxwell pour l'électrostatique en présence de matériaux diélectriques. ELLE EST FACULTATIVE. Nous n'exploiterons pas ces équations dans ce cours. IL n'y a donc pas à les savoir. Elles sont données à titre indicatif. Considérons donc une distribution de charges caractérisée par une densité volumique de charges libres ρ_{libre} et de charges liées ρ_{pol} (par exemple l'ensemble des deux plaques du condensateur qui portent des

charges libres et du diélectrique qui porte les charges liés). Si on note \vec{E} le champ électrique total, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{total}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \vec{0}\end{aligned}$$

En remarquant que $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_{\text{pol}}$, nous avons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right] &= \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \vec{0}\end{aligned}$$

On introduit par soucis de commodité un nouveau vecteur, appelé vecteur déplacement \vec{D} , qui est défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.16)$$

On a donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (4.17)$$

L'équation de Maxwell se réécrit ainsi simplement du fait du vecteur \vec{D} .

Remarque : Dans les milieux pour lesquels l'approximation de linéarité qui consiste à dire que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ est valable, \vec{D} s'écrit simplement en fonction de \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4.18)$$

Les milieux pour lesquels cette approximation est valable sont qualifiés de milieux linéaires, homogènes et isotropes (l.h.i.).

4.3 Application aux forces de cohésion dans la matière

NOUS allons maintenant appliquer ce que nous venons de voir à l'étude d'un certain nombre d'interactions moléculaires qui interviennent dans les solutions biologiques. Les liaisons de Van der Waals interviennent entre les molécules à l'état gazeux. Ce sont des liaisons qui apparaissent du fait que chaque molécule est un dipôle, induit ou non. Pour caractériser la liaison, nous allons utiliser le concept d'énergie d'interaction, ou encore énergie de liaison.

4.3.1 Energie d'interaction d'un dipôle dans un champ électrique

Commençons par exprimer l'énergie d'interaction d'un dipôle dans un champ électrique quelconque. Soient A et B les positions respectives des barycentres des charges négatives et positives du dipôle. Nous avons vu section (2.1.2) que l'énergie d'interaction d'une charge ponctuelle dans un champ électrique créé par une autre charge est le travail qu'il a fallu fournir pour amener cette charge depuis l'infini. Ainsi, l'énergie d'interaction des deux charges ponctuelles q , $-q$ du dipôle, séparées d'une distance $d = AB$ est donc :

$$U_{AB} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{AB} \quad (4.19)$$

En présence d'un champ électrique extérieur, l'énergie d'interaction du dipôle avec le champ électrique va être de même le travail qu'il a fallu fournir pour amener les deux charges à la distance AB l'une de l'autre en présence de ce champ. Dans ce terme d'interaction, on ne considère pas l'énergie d'interaction U_{AB} des deux charges entre elles dont nous avons parlé juste au dessus. Ce dernier terme est en effet une énergie d'interaction interne au dipôle, ce qui ne nous intéresse pas ici. L'énergie d'interaction des deux charges avec le champ s'écrit quant à lui :

$$W = W_{\infty \rightarrow A}^{charge - q} + W_{\infty \rightarrow B}^{charge + q} = - \int_{\infty}^A (-q) \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) - \int_{\infty}^B (q) \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M)$$

Or, si on note V le potentiel électrique dérivé du champ \vec{E} ,

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^A \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) &= - \int_{\infty}^A \vec{\nabla} V(M) \cdot d\vec{l}(M) \\ &= - \int_{\infty}^A dV = V(\infty) - V(A) \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\infty}^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) = V(\infty) - V(B) \quad (4.20)$$

Donc, en choisissant comme origine des potentiels l'infini, $V(\infty) = 0$

$$W = q[V(B) - V(A)] \quad (4.21)$$

Dans le cas du dipôle, les points A et B sont très rapprochés par rapport aux autres distances caractéristiques du système si bien qu'on peut faire l'approximation suivante :

$$V(B) - V(A) \simeq \vec{\nabla} V \cdot \vec{AB} = -\vec{E} \cdot \vec{AB} \quad (4.22)$$

Donc l'énergie d'interaction du dipôle dans le champ s'écrit :

$$U = W = -q\vec{E} \cdot \vec{AB} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (4.23)$$

On remarque que cette énergie est négative et minimale si le dipôle est parallèle et de même sens que le champ.

On peut se poser la question de savoir quelle force exerce le champ sur le dipôle. Une façon de le savoir est de calculer directement la somme des deux forces exercées par le champ sur les deux charges. Remarquons cependant que si on note \vec{R} cette force, nous savons que la force exercée par l'opérateur pour positionner le dipôle dans le champ est précisément $-\vec{R}$. Donc on peut écrire que :

$$U = - \int_{\infty}^{\text{position finale}} \vec{R} \cdot d\vec{l} \Rightarrow dU = -\vec{R} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{\nabla} U$$

On en déduit une autre méthode de détermination de la force par le lien existant entre la force d'interaction et l'énergie d'interaction :

$$\vec{R} = -\vec{\nabla} U \quad (4.24)$$

Application : Supposons qu'un ion de charge q (par exemple H_3O^+) soit en présence d'un dipôle de moment dipolaire \vec{p} fixe (son orientation et sa valeur ne change pas) (par exemple une molécule d'eau). Le champ créé par l'ion situé à l'origine du repère s'écrit au point M où est situé le dipôle :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (4.25)$$

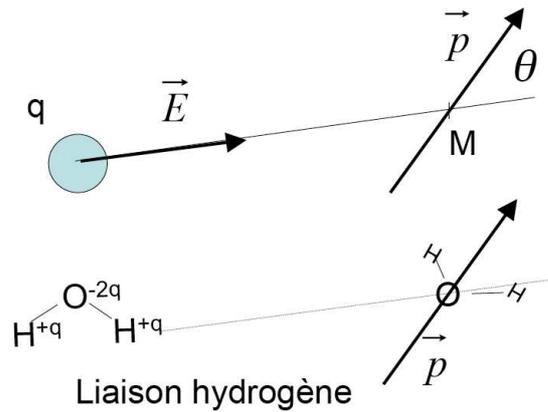


FIG. 4.5 – Interaction entre une charge et un dipôle. Application à la liaison hydrogène

Soit θ l'angle entre \vec{E} et \vec{p} . L'énergie d'interaction va donc être :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{pq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.26)$$

Remarques

1. Nous avons supposé dans ces expressions que l'ensemble dipôle + charge était dans le vide. En pratique, ils sont la plupart du temps dans un milieu aqueux qui est polarisable. On caractérise cette propriété du milieu par sa permittivité diélectrique ϵ_r introduite précédemment. On considère de plus que le milieu est linéaire homogène et isotrope, c'est à dire que nous aurons simplement $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$. À partir du moment où l'on raisonne avec des milieux polarisables, on raisonne avec le vecteur \vec{D} et non avec le vecteur \vec{E} . On peut par exemple appliquer le théorème de Gauss à partir de l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho^{\text{libre}}$ pour montrer que le champ \vec{D} créé par l'ion s'écrit simplement :

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad (4.27)$$

et donc \vec{E} va vérifier :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{u}_r \quad (4.28)$$

De même que pour le condensateur, le champ électrique créé par la charge est diminué par le facteur ϵ_r . Dans le cas de l'eau $\epsilon_r = 80$. L'énergie d'interaction entre le dipôle et l'ion sera donc :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{pq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (4.29)$$

2. Si le dipôle est mobile, il peut s'orienter dans le champ créé par la charge pour minimiser cette énergie à sa valeur la plus faible (pour $\theta = 0$). L'agitation thermique s'oppose cependant à cette orientation. Un développement statistique réalisé par Debye qui utilise la distribution de Boltzmann peut être utilisé pour déterminer dans ce cas l'énergie (voir Feynman électromagnétisme 1, page 183) on trouve alors :

$$U = -\frac{p^2 E^2}{3kT} \quad (4.30)$$

Dans cette expression, kT représente l'énergie d'agitation thermique. Plus celle-ci est grande, et plus le dipôle va s'orienter dans une direction aléatoire, et ainsi contrer l'influence de l'ion qui tend à aligner le dipôle avec le champ. En conséquence, on remarque que plus la température est grande et plus l'énergie d'interaction entre l'ion et le dipôle est faible.

3. Ce type d'interaction ion/dipôle explique la formation de la liaison hydrogène, encore la solvation des ions (le fait qu'un ion est entouré de molécules d'eau) ou encore la solubilisation des protéines.

4.3.2 Forces de Van der Waals

Ce sont des forces qui s'exercent entre molécules non porteuses de charge nette mais qui possède chacune un dipôle qu'il soit induit ou pas.

On distingue trois types de forces de Van der Waals :

1. Les interactions entre deux molécules possédant des moments permanents.
2. Les interactions entre une molécule possédant un moment permanent et une molécule polarisable. Son moment dipolaire induit est alors proportionnel au champ créé par l'autre dipôle : $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. (pour la même raison que le vecteur polarisation \vec{P} est proportionnel à E). α est appelée la **polarisabilité** de la molécule.
3. Les interactions entre deux moments dipolaires induits.

Chapitre 5

Magnétostatique

Sommaire

5.1	Equation de conservation de la charge	67
5.2	Equations de la magnétostatique	69
5.2.1	Equations de Maxwell	69
5.2.2	Potentiel vecteur	70
5.2.3	Loi de Biot et Savart	71
5.2.4	Propriétés de symétrie et d'invariance du champ magnétique	72
5.2.5	Distribution surfacique et linéique de courant	74
5.3	Théorème d'Ampère	76
5.3.1	Formulation	76
5.3.2	Application au champ créé par un fil	77
5.4	Force de Laplace	78
5.4.1	Définition	78
5.4.2	Effet Hall	79
5.4.3	Définition de l'Ampère	81

LA MAGNÉTOSTATIQUE étudie l'apparition d'un champ magnétique en présence de *courants permanents*. Ces courants permanents caractérisent des déplacements de charges constants et qui ne dépendent pas du temps.

5.1 Equation de conservation de la charge

Nous avons vu au premier chapitre, au paragraphe (1.3.2) l'expression du courant électrique comme une intégrale sur une surface d'un vecteur densité de courant, cf équation 1.37.

$$i_S(t) = \iint_S \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}(P) \quad (5.1)$$

L'intensité i_S est le flux du vecteur \vec{J} à travers la surface S . Nous avons vu au chapitre 1 paragraphe (1.3.1) que dans un système fermé la charge électrique totale du système reste constante. Cette propriété de conservation de la charge sous-entend que la charge d'un volume donné V ne peut évoluer dans le temps que si des charges élémentaires entrent ou quittent ce volume. En langage courant, nous dirions alors qu'il existe un flux de particules chargées qui rentre ou sort du volume. Exprimons cette idée sous forme d'équation en reprenant notre étude du paragraphe

(1.3.2). Considérons un volume V d'extension finie quelconque délimité par la surface notée S . La surface S est une surface fermée puisque V est fini. Nous avons vu que :

$$i_S(t) = \oint_S \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}(P) \quad (5.2)$$

Cette définition a été cependant introduite pour une surface S ouverte ; dans le cas où elle est fermée, la convention d'orientation du vecteur $d\vec{S}$ est que chaque élément $d\vec{S}$ est dirigé vers l'extérieur de la surface fermée.

Soit ρ la charge volumique contenue dans V . La charge totale q s'exprime alors comme :

$$q(t) = \iiint_V \rho d\tau \quad (5.3)$$

Nous avons vu section (1.3.2) que le courant est relié à la variation de la charge par $i_S(t) = \frac{dq}{dt}$. Cette formule est cependant à reprendre avec notre convention d'orientation de surface fermée ; si \vec{J} sort effectivement (c'est à dire $i_S > 0$ d'après notre convention d'orientation de S) $q(t)$ diminue au cours du temps, c'est à dire, $\frac{dq}{dt} < 0$ tandis que si \vec{J} entre dans le volume ($i_S < 0$), $q(t)$ augmente $\frac{dq}{dt} > 0$. Donc $i_S(t) = -\frac{dq}{dt}$. Nous avons donc, re-écrit autrement :

$$-\frac{dq}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.4)$$

Cette équation traduit l'idée de conservation de la charge.

L'équation de conservation de la charge admet une forme dite *locale* c'est à dire valable à l'échelle du volume élémentaire du système (dont la taille est infiniment petite par rapport aux dimensions macroscopiques du système mais suffisamment grande pour ne pas prendre en compte la séparation spatiale entre chaque charge). Par application du théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient :

$$-\frac{dq}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Cette dernière équation traduit l'équation de conservation locale de la charge. En magnétostatique, aucune grandeur ne dépend du temps : nous aurons donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

Application

Une conséquence de la loi de conservation de la charge est la loi des noeuds en électricité ! Considérons le régime permanent : nous avons vu au premier chapitre que cela signifie que les grandeurs ne dépendent pas du temps. Donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, quelque soit la surface S fermée :

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.5)$$

Prenons donc un fil électrique parcouru par un courant d'électrons qui se déplacent parallèlement au fil. Choisissons comme surface une portion du fil délimitée par deux sections S_1 et S_2 et l'enveloppe cylindrique S_3 . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &+ \iint_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

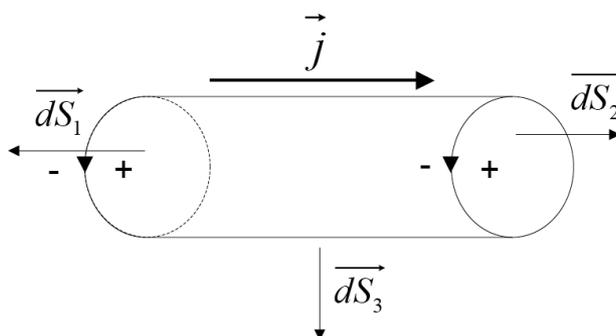


FIG. 5.1 – Loi des noeuds

Or comme \vec{J} est parallèle au fil et que \vec{dS}_3 est normal à la surface, la troisième intégrale est nulle. D'où :

$$\iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{dS} = - \iint_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (5.6)$$

On se rappelle que l'intensité à travers une surface ouverte s'écrit :

$$i_S = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (5.7)$$

Pour définir l'intensité à travers S_1 et S_2 , on doit choisir une orientation du contour pour chaque surface. On prend évidemment la même orientation tout au long du fil. Du coup, avec les conventions de la figure, dS_1 est orientée dans le sens inverse à celui donné par l'orientation du contour donc

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{dS} &= -I_1 \\ \iint_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{dS} &= I_2 \end{aligned}$$

On obtient donc que $I_2 = I_1$: l'intensité tout le long du fil est le même. Nous pourrions répéter ce raisonnement dans le cas d'un noeud en choisissant une surface fermée contenant ce noeud. Nous montrerions que $\sum_k I_k = 0$ avec les conventions de signe adoptées sur la figure pour le sens des I_k (et donc indirectement des contours de surface).

5.2 Equations de la magnétostatique

5.2.1 Equations de Maxwell

RAPPELONS les équations de Maxwell régissant la magnétostatique, c'est à dire l'équation du flux magnétique et l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

Quelles conséquences pouvons nous en tirer de ces relations de la magnétostatique

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ce qui d'après le théorème de Green-Ostrogradsky implique que le flux du champ magnétique \vec{B} au travers d'une surface fermée quelconque est nul.

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}$. A l'inverse du champ électrique, nous ne pouvons pas dire qu'il existe une fonction scalaire dont \vec{B} serait le gradient.
- En revanche, on s'aperçoit que le théorème de superposition s'applique également au champ magnétique. Considérons en effet deux sources de courant distinctes représentées par leur densité de courant \vec{J}_1 et \vec{J}_2 . Ces deux sources créent les champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 tels que :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{J}_1 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_2 &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_2 &= \mu_0 \vec{J}_2\end{aligned}$$

On s'aperçoit que le champ \vec{B} défini par $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ vérifie les équations :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_2 = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge [\vec{B}_1 + \vec{B}_2] = \\ &= \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{J}_1 + \mu_0 \vec{J}_2 = \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

Le champ \vec{B} est donc bien solution des équations de Maxwell en prenant en compte la superposition des densités de courant $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Le théorème de superposition s'applique donc également au champ magnétique.

Les équations de Maxwell régissant la magnétostatique diffèrent suffisamment de celles de l'électrostatique pour que les outils introduits en électrostatique ne nous servent pas à ce niveau là du cours. Nous allons donc devoir en introduire de nouveaux, que l'on admettra et nous verrons que des analogies fortes existent cependant entre les deux champs.

5.2.2 Potentiel vecteur

Définition et choix de jauge

Le potentiel vecteur est défini à partir de la conservation du flux magnétique. En effet cette conservation se traduit par l'utilisation de l'opérateur divergence, ce qui permet en vertu de la relation indiquant que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ une fonction vectorielle } \vec{A} \text{ telle que } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (5.8)$$

On peut s'assurer par le calcul que la divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle quelconque est effectivement nulle.

On appelle \vec{A} le *potentiel vecteur*. L'interprétation physique de \vec{A} n'a rien d'évident et c'est pour cela qu'il est introduit ici sans essayer d'en donner une signification physique. Nous allons voir qu'il constitue un intermédiaire de calcul très puissant, tout comme le potentiel en électrostatique. Il joue en revanche un rôle physique très important quand on aborde la mécanique quantique.

Nous avons donc que :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge A) = \mu_0 \vec{J} \quad (5.9)$$

Cette composition d'opérateurs rotationnel peut s'écrire sous la forme des autres opérateurs vectoriels comme

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (5.10)$$

Avec $\Delta \vec{A}$ le laplacien vectoriel de \vec{A} . C'est le même opérateur laplacien rencontré en électrostatique dans le premier chapitre. La seule différence provient du fait que l'on applique maintenant le laplacien à un champ vectoriel et non scalaire. Cela revient à appliquer le laplacien aux trois coordonnées du champ vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{cases} \quad (5.11)$$

On remarque que si $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, on retrouve dans l'équation (5.10) une équation analogue à l'équation de Poisson vue section (2.2.1) en électrostatique. Ne pourrait on pas justement choisir des potentiels \vec{A} tels que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$?

Le potentiel vecteur \vec{A} est pour l'instant défini par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ une fonction vectorielle } A \text{ telle que } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (5.12)$$

Mais cette fonction est elle unique ? Non car nous pouvons voir immédiatement que la fonction \vec{A}_0 , telle que $\vec{A}_0 = \vec{A} + \vec{\nabla} \Phi$ avec Φ un champ scalaire quelconque, vérifie aussi $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_0$. Nous disposons donc d'une certaine liberté pour choisir le potentiel vecteur \vec{A} .

On profite de cette liberté pour imposer au potentiel vecteur une condition supplémentaire dite *condition de jauge* qui est choisie en fonction de la simplification qu'elle apporte dans les calculs ultérieurs. Le choix de jauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ est appelé jauge de Coulomb.

Il faut cependant s'assurer que cette condition n'est pas trop forte et qu'on peut toujours trouver un potentiel vecteur tel que

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ce choix de jauge est particulièrement fructueux en magnétostatique (Il ne l'est en revanche plus dès que le temps intervient!).

En résumé, en adoptant le choix de jauge de Coulomb, on peut voir que les courants électriques sont solutions d'une équation de Poisson de la magnétostatique.

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (5.13)$$

5.2.3 Loi de Biot et Savart

L'établissement de la loi de Poisson en magnétostatique est très utile car elle permet de généraliser sa solution électrostatique en magnétostatique. En effet, nous avons vu que l'expression du potentiel électrostatique V est telle que

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM} \quad (5.14)$$

Il est donc possible de généraliser cette solution au potentiel vecteur \vec{A} vérifiant cette même équation.

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\vec{J}(P)d\tau(P)}{PM} \quad (5.15)$$

De même que pour V , cette expression de \vec{A} n'est valable que pour une distribution de courants d'extension spatiale finie. On en déduit immédiatement que :

$$\vec{B}(M) = \vec{\nabla}_M \wedge \vec{A}(M) = \vec{\nabla}_M \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)d\tau(P)}{PM} \right] \quad (5.16)$$

De même qu'à la section (2.2.2), on indice le rotationnel par M , ($\vec{\text{rot}}_M$) pour signifier que l'on dérive par rapport aux coordonnées de M . Ces dernières n'interviennent que dans le terme $1/PM$ donc :

$$\vec{\nabla}_M \wedge \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M \wedge \left[\frac{\vec{J}(P)}{PM} \right] d\tau(P) \quad (5.17)$$

On montre (et on fera le calcul pour s'en convaincre) que pour un vecteur \vec{u} constant (ne dépendant pas des coordonnées de M), et un point P quelconque,

$$\vec{\nabla}_M \wedge \left[\frac{\vec{u}}{PM} \right] = \vec{\nabla}_M \left[\frac{1}{PM} \right] \wedge \vec{u} \quad (5.18)$$

Par ailleurs le gradient de $1/PM$ peut aussi s'écrire comme

$$\vec{\nabla}_M \left[\frac{1}{PM} \right] = -\frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (5.19)$$

On en déduit alors la **loi de Biot et Savart** :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{J}(P) \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau(P)} \quad (5.20)$$

A titre comparatif, on avait trouvé cette expression pour le champ électrique d'une distribution de charges :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM^2} \vec{u}_{PM} \quad (5.21)$$

On remarque que le champ magnétique varie également en $1/PM^2$.

Remarques :

- L'unité du champ magnétique est le Tesla : T. Quelques ordres de grandeur de champ magnétique : le champ magnétique terrestre est d'environ $0,2 \cdot 10^{-4} T$. On emploie une autre unité pour des valeurs aussi faibles du champ : le Gauss : $1G = 10^{-4} T$. Un aimant ordinaire possède un champ de quelques centièmes de tesla. Il faut utiliser des électroaimants (on en reparlera plus tard) pour atteindre le tesla et des supraconducteurs pour atteindre la dizaine de teslas.
- Comme pour le champ électrique, nous n'effectuerons le calcul du champ magnétique que sur des systèmes simples qui se comportent comme des distributions volumique ou linéique de courant. Nous allons les introduire maintenant.

5.2.4 Propriétés de symétrie et d'invariance du champ magnétique

Nous avons vu dans un chapitre précédent que le champ électrique avait un comportement symétrique dans une transformation par rapport à un plan de symétrie. Cette propriété nous est utile dans les problèmes où la distribution de charge présentait de multiples plan de symétrie. Dans le cas du champ magnétique, nous allons faire le même raisonnement mais appliqué à la loi de Biot et Savart. Considérons une distribution de courant comme présentée dans la figure Fig.(5.2) où un plan de symétrie est présent dans le plan (xOz) . L'axe y repère la direction perpendiculaire

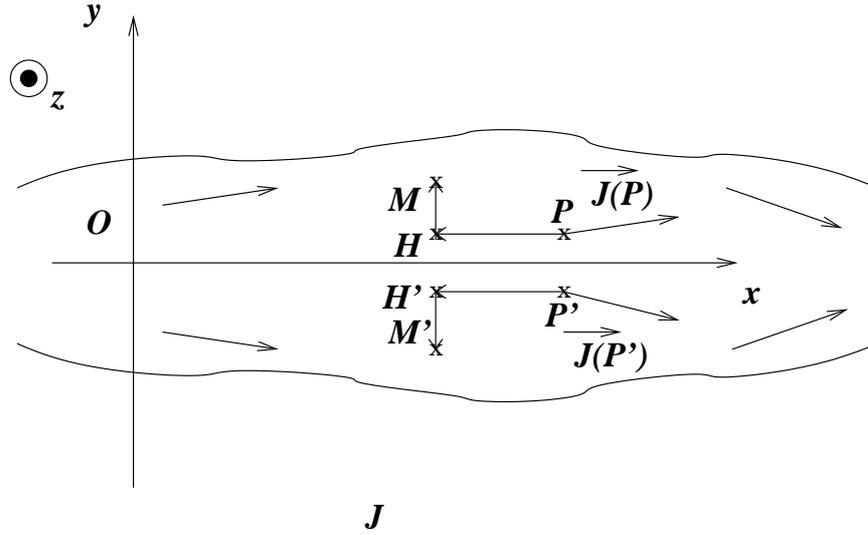


FIG. 5.2 – Influence d'une distribution de courant \vec{J} possédant un plan de symétrie en (xOz) : le champ magnétique est anti-symétrique par rapport à ce plan.

au plan de symétrie (voir Fig.(5.2)). Si on souhaite calculer la valeur du champ magnétique en un point M quelconque, on peut appliquer la relation de Biot et Savart que nous avons déjà vu

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)d\tau(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5.22)$$

où P est un point de la distribution. Si on décompose le vecteur \overrightarrow{PM} en une composante parallèle au plan de symétrie \overrightarrow{PH} et une composante perpendiculaire \overrightarrow{HM} , on obtient l'expression du champ magnétique suivante

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)d\tau(P)}{PM^3} \wedge (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{B}(M)_\perp + \vec{B}(M)_\parallel \quad (5.23)$$

Les composantes parallèle et perpendiculaire sont inversées par rapport au cas du champ électrique à cause de la présence du produit vectoriel. Le produit vectoriel de \overrightarrow{PH} avec tout autre vecteur donnera un vecteur, par définition du produit vectoriel, perpendiculaire à \overrightarrow{PH} . Considérons maintenant le champ magnétique pris au point M' symétrique de M . On peut écrire le champ magnétique en utilisant un point P' symétrique de P car lors de l'intégration, si P parcourt toute la distribution, alors P' aussi par symétrie. On a alors

$$\vec{B}(M') = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P')d\tau(P')}{P'M'^3} \wedge (\overrightarrow{P'H'} + \overrightarrow{H'M'}) \quad (5.24)$$

En utilisant les propriétés de la symétrie, on montre facilement que $PM = P'M'$, $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{P'H'}$ et $\overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{H'M'}$. On a alors que

$$\vec{B}(M') = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P')d\tau(P')}{P'M'^3} \wedge (\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{HM}) = \vec{B}(M)_\perp - \vec{B}(M)_\parallel \quad (5.25)$$

Cette dernière relation prouve donc que si par symétrie $\vec{J}(P) = \vec{J}(P')$ alors on obtient que le champ magnétique produit par cette distribution *est anti-symétrique*.

Que se passe-t-il si le point M appartient au plan de symétrie ? Alors le point $M' = M$ et on voit immédiatement que $\vec{B}(M)_{\parallel} = -\vec{B}(M)_{\parallel} = \vec{0}$, c'est à dire que le champ magnétique est perpendiculaire au plan de symétrie. Par corollaire, si plusieurs plans de symétrie passent par le point M considéré alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à tous ces plans. Nous avons considéré dans ce calcul une distribution volumique de charge mais la démonstration précédente peut facilement être généralisée à tous les types de distributions. De même, on peut très facilement reprendre la démonstration précédente dans le cas où la distribution de courant présente un plan d'anti-symétrie. On trouve alors que le champ magnétique est symétrique par rapport à ce plan et que si plusieurs plans d'anti-symétrie se coupent au point M , lors \vec{B} appartiendra à l'intersection de ces plans.

L'invariance d'une distribution de courant a les mêmes effets sur le champ magnétique que l'invariance d'une distribution de charge sur le champ électrique. En effet, si \vec{J} et \vec{PM} ne dépendent pas d'une ou plusieurs coordonnées alors le champ magnétique n'en dépendra pas non plus car au vue de la loi de Biot et Savart, le champ magnétique, \vec{J} et \vec{PM} ont les mêmes dépendances fonctionnelles.

5.2.5 Distribution surfacique et linéique de courant

Définitions

Nous avons vu dans la section (1.4.2) qu'on pouvait représenter la distribution de charges dans un conducteur par une distribution surfacique. Le chapitre 3 nous a appris qu'à l'équilibre électrostatique, le charge volumique dans un conducteur parfait est nulle. Plus généralement, la densité volumique de charge décroît exponentiellement depuis la surface du conducteur, ce qui légitimise l'approximation.

En magnétostatique, on considérera que le courant électrique ne peuvent se propager qu'au niveau de la surface du conducteur sur une faible épaisseur a du conducteur.

Pour un plan conducteur perpendiculaire à un axe (z/z), on définit la densité superficielle de courant, équivalent de la charge surfacique par :

$$\vec{i} = \int_0^a \vec{J}(x, y, z) dz \quad (5.26)$$

La densité surfacique de courant \vec{i} s'exprime donc en $A.m^{-1}$ puisque \vec{J} s'exprime en $A.m^{-2}$. Nous avons vu que \vec{J} est la charge qui passe par unité de surface et par unité de temps. \vec{i} sera donc la charge qui passe par unité de longueur et unité de temps. Dans l'expression de la Loi de Biot et Savart, on peut donc remplacer l'intégrale volumique de $\vec{J}d\tau$ par l'intégrale surfacique de $i\vec{dS}$, l'intégrale sur la troisième coordonnée (l'épaisseur z) étant prise en compte dans l'expression de \vec{i} . Que se passe-t-il dans le cas d'une distribution linéique de courant ? Considérons l'exemple d'un fil de section \vec{dS} , de longueur dl parcourue par l'intensité I . Nous avons :

$$\vec{J}d\tau = \vec{J}dSdl \quad (5.27)$$

Dans ce volume de fil élémentaire, \vec{dS} et \vec{J} ont la même direction et le même sens. On introduit le vecteur \vec{u} tel que $\vec{J} = J\vec{u}$. On note par ailleurs $\vec{dl} = dl\vec{u}$ un tronçon élémentaire du fil : ce vecteur renseigne à la fois sur la longueur du fil et sur l'orientation du courant. Nous avons donc :

$$\vec{J}d\tau = \vec{J}dSdl = (\vec{J} \cdot \vec{dS})\vec{dl} = I\vec{dl} \quad (5.28)$$

Car I est par définition le produit de \vec{J} par la section du tube. Ainsi dans le calcul du champ magnétique, on remplacera $\vec{J}d\tau$ par $I\vec{dl}$.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I\vec{dl}(P) \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Dans la dernière intégrale, le circuit électrique dans lequel le courant se propage est forcément fermé (s'il était ouvert, le courant serait nul). On l'indique par la notation \oint . Par ailleurs, en magnétostatique, de par la loi de conservation de la charge électrique, l'intensité I se conserve en restant constante en toute section du circuit. On pourra ainsi sortir ce terme de l'intégrale.

Remarque sur les intégrales le long d'un contour

L'intégrale sur le contour d'un champ vectoriel est appelée la *circulation* du champ le long du contour. Le déplacement élémentaire $\vec{dl}(P) = \vec{dP}$ représente le déplacement élémentaire le long de ce contour; il a pour norme la longueur élémentaire et pour direction la tangente en P au contour. En magnétostatique, on l'oriente TOUJOURS dans le sens du courant. Soit \vec{u}_P le vecteur tangent au contour au point P. Le déplacement élémentaire \vec{dl} vérifie $\vec{dl} = dl\vec{u}_P$ alors que l'intégrale $\int_O^P dl$ représente donc la distance $l(P)$ parcourue le long du contour entre un point de départ O et le point P . Les mathématiciens parlent parfois d'abscisse curviligne pour désigner $l(P)$.

Exemple : Dans le cas d'une spire circulaire de courant de rayon R , un déplacement élémentaire est représenté sur la Fig.(5.3). Nous obtenons, en utilisant les coordonnées cylindriques, $\vec{dl} = R d\theta \vec{u}_\theta$ et ainsi le périmètre de la spire

$$L = \oint dl = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} R \cdot d\theta \quad (5.29)$$

On retrouve bien le périmètre d'un cercle $L = 2\pi R$.

En revanche la circulation sur toute la spire du vecteur déplacement élémentaire est nulle car

$$\oint \vec{dl} = \oint R \cdot d\theta \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad (5.30)$$

En effet, on réalise par cette intégrale une somme de vecteurs dont la somme est nulle, ces vecteurs s'annulant quand on ajoute des vecteurs placés à l'opposé l'un de l'autre sur la spire.

Dans le cas du champ magnétique, on devra donc intégrer la fonction $\vec{dl}(P) \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$ sur le contour que suit le point P. Il suffira pour cela de bien paramétrer ce contour par un choix de coordonnées judicieux et l'intégrale se résumera à une intégrale classique. Nous allons immédiatement illustrer cette idée par un exemple.

Cas de la spire circulaire

Reprenons l'exemple de la spire en supposant qu'elle est parcourue par un courant I compté positivement comme selon la figure. Cherchons le champ magnétique en un point M de l'axe des z . Nous allons raisonner comme pour le calcul d'un champ ou d'un potentiel électrique.

1. Quel système de coordonnées choisir ? Les coordonnées cylindriques avec l'axe (Oz) comme axe de la spire et O le centre de la spire paraissent les plus appropriées.
2. La loi de Biot-Savart appliquée à cette spire S s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S I\vec{dl}(P) \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (5.31)$$

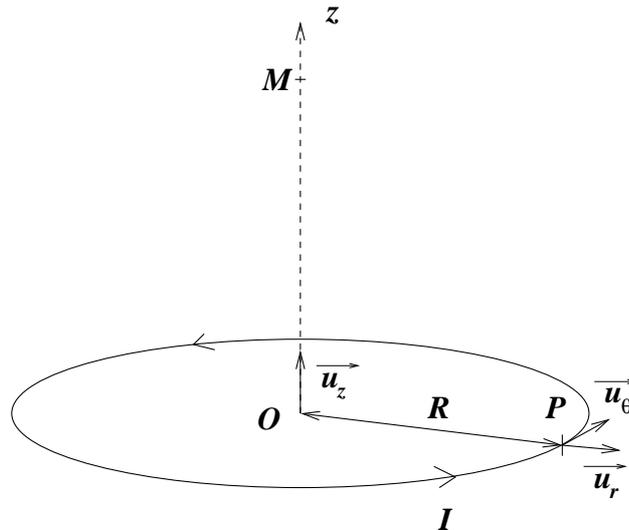


FIG. 5.3 – Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R parcouru par un courant d'intensité I .

Que vaut \vec{dl} ? Nous venons de voir que $\vec{dl} = R d\theta \vec{u}_\theta$

3. **Quelle est l'orientation de \vec{B} ?** Regardons la symétrie du problème : en tout point M de l'axe (Oz), des plan d'antisymétrie se coupent, tous contenant l'axe (Oz). En effet on s'aperçoit que par symétrie au travers de ces plans, on retrouve l'antisymétrie de la densité de courant \vec{J} . Ainsi sachant que $\vec{B}(M)$ appartient à tous les plans d'anti symétrie, on voit immédiatement que $\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$.
4. Le calcul du champ magnétique s'écrit, sachant que $\overrightarrow{PM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et que $PM^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \frac{(-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta \frac{(R\vec{u}_z + z\vec{u}_r)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.32)$$

Comme attendu, le deuxième terme de l'intégrale s'annule sur une intégration sur toute la spire, ce qui laisse uniquement l'expression

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \quad (5.33)$$

Ainsi le champ magnétique qui règne au centre de la spire en $z = 0$ est simplement $\mu_0 I / 2R$.

5.3 Théorème d'Ampère

NOUS poursuivons notre étude de la magnétoatitique en introduisant maintenant le théorème d'Ampère qui est en quelques sortes un analogue au théorème de Gauss en électrostatique. Pour cela nous allons exploiter l'équation de Maxwell-Ampère reliant le champ magnétique à la densité de courant correspondante.

5.3.1 Formulation

L'équation de Maxwell-Ampère dans un régime stationnaire s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.34)$$

Le théorème de Stokes vu dans le premier chapitre est primordial pour la démonstration du théorème d'Ampère. En effet, on se souvient que ce théorème de Stokes énonce qu'un champ vectoriel \vec{G} vérifie

$$\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{G}) \cdot d\vec{S} \quad (5.35)$$

où S est une surface dont le contour fermé est C . Les orientations des vecteurs $d\vec{S}$ et $d\vec{l}$ suivent les règles que nous avons déjà énoncées. On choisit une orientation pour le contour ce qui fixe le sens de $d\vec{l}$. La surface élémentaire $d\vec{S}$ est ensuite orientée par la règle introduite au cours de la section (1.3.2).

On rappelle que $d\vec{l}$ représente le déplacement élémentaire le long de ce contour ; il a pour norme la longueur élémentaire et pour direction la tangente en P au contour. De même $d\vec{S}$ a pour norme une surface élémentaire, est orienté par la règle ci dessus et a pour direction la normale à la surface. Appliquons la relation de Stokes au champ magnétique et nous obtenons

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.36)$$

Si on respecte les conventions d'orientation rappelées ci dessus, le courant traversant la section S est précisément donné par :

$$I_S = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.37)$$

Nous obtenons ainsi le théorème d'Ampère

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S} \quad (5.38)$$

La circulation du champ magnétique le long d'un contour C orienté est donc le produit du courant traversant la surface S s'appuyant sur le contour C par μ_0 .

Ce théorème va nous permettre de déterminer la valeur du champ magnétique dans le cas de distributions particulières de courants, comme celles présentant des propriétés de symétrie.

5.3.2 Application au champ créé par un fil

L'application du théorème d'Ampère suppose d'introduire un contour afin de calculer une circulation : c'est en choisissant astucieusement le contour qu'on peut remonter à partir du calcul de la circulation directement à l'expression du champ. Nous allons systématiquement choisir une surface qui prend en compte les symétries du système.

Considérons un fil rectiligne infini parcouru par un courant I qui a le sens donné par la Fig.(5.4). Soit Oz l'axe porté par le fil. Soit M un point quelconque qui n'appartient pas au fil.

1. Quel système de coordonnées choisir ? Le système a une symétrie cylindrique, on va donc naturellement choisir les coordonnées cylindriques. on note O le projeté de M sur l'axe. On aura $OM = r$ et le système de vecteurs unitaires orientés comme sur la Fig.(5.4).
2. Quelle est la direction de $\vec{B}(M)$? Le système considéré présente un plan de symétrie passant par le point M et contenant le fil. Le champ magnétique étant anti-symétrique, on a lors immédiatement que \vec{B} est perpendiculaire à ce plan donc orienté selon \vec{u}_θ . Du point de vue des invariances, on peut voir facilement que la distance OM ne dépend ni de z ni de θ . Il en va de même pour le courant I . On peut en déduire que le champ magnétique ne dépendra que de r . Par ces considérations de symétrie et d'invariance, on peut écrire que $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$.

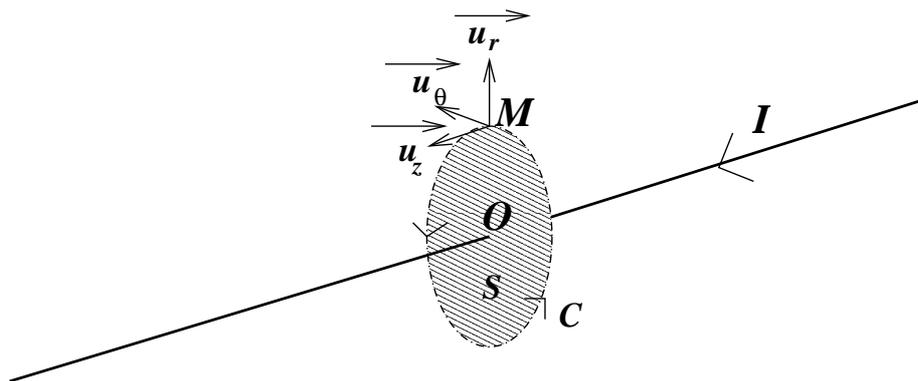


FIG. 5.4 – Application du théorème d'Ampère au calcul du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité I . Le contour d'Ampère est choisit comme étant un cercle perpendiculaire au fil et contenant le point M .

3. Nous pouvons désormais choisir un contour. On choisit un contour qui passe par M . Ce sera un cercle de centre O et de rayon OM . **Le choix de l'orientation du contour n'est pas le fruit du hasard.** En effet, le champ étant orienté suivant \vec{u}_θ , seule un contour d'intégration suivant cette direction permettra de simplifier le produit scalaire entre \vec{B} et \vec{dl} sous l'intégrale. De plus, sur ce contour, \vec{B} ne dépendant que de r , on pourra carrément sortir le champ magnétique de sous l'intégrale. La valeur positive ou négative de l'intensité I est donc donné par l'orientation de C (et donc de S). **Ce sens est donné par la règle de la main droite ou du tire bouchon.**

Avec la définition de ce sens, nous avons d'après la figure : $\vec{dl} = r d\theta \vec{u}_\theta$ et

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} B(r) r d\theta = 2\pi B(r) r = \mu_0 I \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (5.39)$$

C'est en utilisant le modèle du fil infini parcouru par un courant continu qu'on définit l'Ampère. Nous allons présenter la définition de l'Ampère mais auparavant, nous avons besoin d'introduire ce qu'est la force de Laplace.

5.4 Force de Laplace

5.4.1 Définition

PARMI les expériences que vous pouvez faire chez vous, vous constaterez que lorsque l'on approche un aimant d'un fil, il est alors parcouru par un courant électrique, ce dernier subissait une force. Cette force a pour origine la force de Lorentz : une charge Q se déplaçant à la vitesse \vec{v} en présence de deux champs électriques et magnétiques subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5.40)$$

Nous allons nous intéresser de manière plus générale à l'action mécanique exercée par un champ magnétique sur un conducteur. Considérons donc un conducteur possédant plusieurs types de charges de densité particulaire n_i , de charge q_i et de vitesse moyenne \vec{v}_i et soumis à un champ électrique \vec{E} et à un champ magnétique \vec{B} . La force exercée sur l'ensemble des particules présentes dans un volume $d\tau$ s'écrit :

$$d\vec{F} = \sum_i n_i d\tau q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \quad (5.41)$$

Or, d'après la section (1.3.2), on définit la densité de courant et de charges comme

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \\ \rho &= \sum_i n_i q_i \end{aligned}$$

On en déduit que la force volumique $\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}}{d\tau}$ qui s'exerce par unité de volume s'écrit :

$$\vec{f}_V = \rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$$

Considérons maintenant le cas de l'expérience rappelée au début de cette section. Prenons un tronçon du fil caractérisé par un vecteur déplacement élémentaire \vec{dl} dont le sens définit l'orientation positive choisie pour compter l'intensité I qui parcourt le fil. Nous savons l'équivalence entre $\vec{j}d\tau$ et $I\vec{dl}$ d'après la section 5.2.5. La force qui s'exerce donc sur le tronçon élémentaire soumis au champ \vec{B} est :

$$\boxed{d\vec{F} = \vec{J}d\tau \wedge \vec{B} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}} : \text{Force de Laplace} \quad (5.42)$$

Cette force est appelée force de Laplace. L'ensemble des porteurs d'un élément de circuit subissent une force perpendiculaire à la fois à \vec{dl} et au champ magnétique. Pour calculer la résultante de la force sur un fil de longueur L dont une extrémité est placée en $x = 0$ et l'autre en $x = L$ (le fil est orienté selon l'axe (Ox)), il suffit de faire l'intégrale

$$\vec{F}_{tot} = \int_0^L d\vec{F} = \int_0^L I\vec{dl} \wedge \vec{B} \quad (5.43)$$

Si pour cet exemple, on suppose que le champ magnétique est uniforme et orienté selon (Oy), on aura alors $\vec{dl} \wedge \vec{B} = Bdl\vec{u}_z$, ce qui donnera

$$\vec{F}_{tot} = \int_0^L BIdl\vec{u}_z = BIL\vec{u}_z \quad (5.44)$$

Il nous reste une dernière question à voir : pourquoi le fil bouge-t-il ? Nous allons répondre à cette question à la section suivante.

5.4.2 Effet Hall

Cet effet fût découvert par M. Hall en 1880. Nous allons répondre à la question abordée juste au dessus en utilisant une géométrie du circuit plus simple.

Soit la plaquette conductrice de longueur L , de largeur a et d'épaisseur b de la Fig.(5.5). On suppose que la plaque est traversée dans sa longueur par un courant continu d'intensité I se propageant selon \vec{u}_x . Initialement le courant se propage selon \vec{u}_x , ce qui signifie qu'une différence de potentiel existe selon cet axe uniquement. On note alors \vec{E}_x le champ électrique engendré par cette différence de potentiel selon l'axe (Ox).

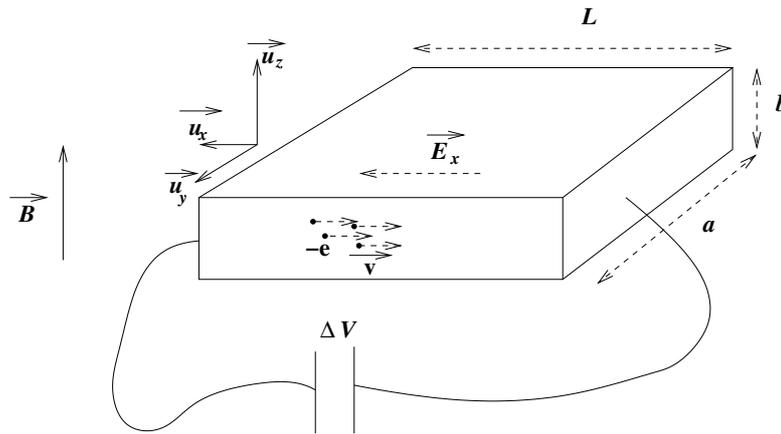


FIG. 5.5 – Dispositif permettant de mettre en évidence l'effet Hall. Cet effet permet de mesurer un champ magnétique en faisant passer un courant électrique dans un conducteur.

Que se passe-t-il dès qu'on applique un champ magnétique \vec{B} perpendiculairement à la plaque ? D'après la figure, nous avons : $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Les électrons sont alors soumis, en plus de la force électrique $-e\vec{E}_x$, à une force d'origine magnétique dont l'expression est $\vec{F}_B = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force est orientée selon $-\vec{u}_y$ puisque $\vec{v} = -|v|\vec{u}_x$. Pendant le régime transitoire suivant l'installation de ce champ magnétique, la trajectoire des électrons est alors déviée : des charges négatives s'accumulent sur l'un des bords en $y = 0$ tandis que des charges positives s'accumulent sur l'autre bord en $y = a$.

Cette accumulation de charges induit un champ électrique orienté " du + vers le -" c'est à dire selon $-\vec{u}_y$. Ce nouveau champ, appelé **champ de Hall**, noté \vec{E}_H , exerce donc une force $\vec{F}_H = -e\vec{E}_H$ sur les électrons qui tend à s'opposer à la force induite par le champ magnétique puisque cette force est selon $+\vec{u}_y$. Au bout d'un certain temps, le régime permanent s'établit et le champ de Hall atteint alors la valeur telle que $\vec{F}_H + \vec{F}_B = \vec{0}$.

Les électrons en régime permanent ne sont donc plus déviés ; leur vitesse \vec{v} est donc seulement due à la présence du champ \vec{E}_x . Nous avons donc une valeur du champ de Hall qui vaut :

$$\vec{F}_H = -e\vec{E}_H = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\|\vec{E}_H\| = |vB|$$

On peut mesurer la tension $\Delta V_H = |vB|a$ au voltmètre pour remonter ainsi à la valeur du champ, connaissant la valeur de la vitesse v . L'apparition de la tension de Hall porte le nom d'**effet Hall**. Un tel système est utilisé comme sonde pour mesurer la valeur du champ magnétique. On utilise alors plutôt des semi-conducteurs que des conducteurs car les tensions mesurées sont plus grandes.

Revenons maintenant au cas de la force de Laplace qui s'exerce sur les électrons du fil. Nous voyons que suite à l'apparition d'un champ magnétique, un champ de Hall apparaît et exerce une force sur les électrons qui se déplacent le long du fil. La force due à ce champ de Hall compense la force due au champ magnétique. Tout se passe donc comme si le fil exerçait sur les électrons une force \vec{F}_H qui s'oppose à la force induite par le champ magnétique $\vec{F}_B = -\vec{F}_H$. Cependant, si le fil exerce une force sur les électrons, d'après le principe d'action et de réaction, cela veut que les électrons exercent la force égale et opposée sur le fil soit donc $-\vec{F}_H$. Cette force est donc précisément la force induite par le champ magnétique. C'est pour cela qu'on dit en pratique que la force de Laplace est une force que le fil exerce sur lui-même.

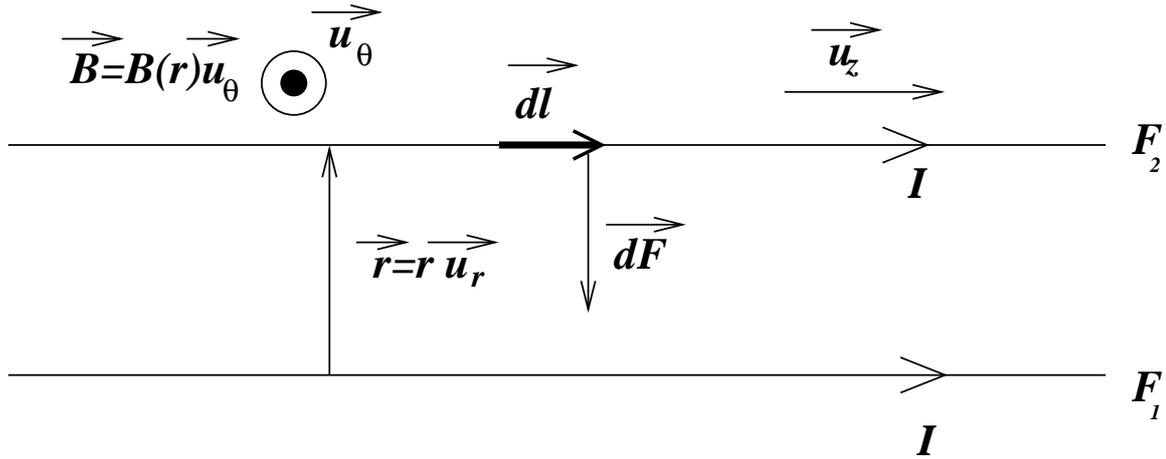


FIG. 5.6 – Dispositif expérimental permettant de définir l’Ampère : deux fils infinis traversés par le même courant I exerce chacun une force sur l’autre fil. Sur le schéma, nous avons représenté la force $d\vec{F}$ exercée par F_1 sur un élément du fil F_2 de longueur $d\vec{l}$. Quand la distance entre les fils est de un mètre, le courant I vaut un Ampère quand la force par unité de longueur dF/dl vaut 2×10^{-7} Newton par mètre.

5.4.3 Définition de l’Ampère

Grâce à l’étude précédente de l’effet Hall, nous allons pouvoir maintenant comprendre comment se définit l’Ampère. Avec le mètre, le kilogramme, la seconde, le kelvin, le candela et la mole, l’ampère est l’une des 7 unités de base du Système International (SI). Voici sa définition :

L’ampère est l’intensité d’un courant continu qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à un mètre l’un de l’autre dans le vide produit entre eux une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

Qu’est ce que cette définition signifie ? Considérons deux fils infinis parallèles, distants de $r = 1\text{m}$ et parcourus par des courants égaux I et de même sens. Quelle est la force qu’exerce l’un des fils, qu’on appellera F_1 sur l’autre, nommé F_2 (Ce sera bien entendu l’opposé de la force qu’exerce F_2 sur F_1) ?

Nous avons vu dans la section (5.3.2) que le champ créé par F_1 à une distance r est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (5.45)$$

Ce champ exerce donc une force de Laplace sur le fil F_2 qui s’écrit pour un tronçon $d\vec{l}$ de F_2 :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (5.46)$$

D’après la figure, comme $d\vec{l}$ est orienté selon le sens du courant, nous avons :

$$I d\vec{l} \wedge \vec{B} = +I dl \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = -I dl \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_r \quad (5.47)$$

La force est donc dirigée vers F_1 : elle est attractive. En considérant les grandeurs numériques de la définition :

$$\begin{aligned}I &= 1A \\dF/dl &= 2 \times 10^{-7} \text{N/m} \\r &= 1m \\ \Rightarrow dF/dl &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \\ \Rightarrow 2 \times 10^{-7} \text{N/m} &= \frac{\mu_0 \times 1^2}{2\pi \times 1}\end{aligned}$$

Nous voyons que cette définition de l'ampère fixe la valeur de la permittivité magnétique du vide μ_0 à :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{SI} \quad (5.48)$$