Examen FC9 - Janvier 2011

Première partie

(1°) En projetant la RFD sur $\vec{B}$, on obtient

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot v_{//} \vec{e_z} = \left(q \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{e_z} = 0 \text{ car } \vec{B} = B\vec{e_z}$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\gamma}{dt} m\vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \vec{v_{//}} = 0 \quad \boxed{A}$$

Le facteur de Lorentz est dans ce cas un invariant car en projetant sur $\vec{v}$, on a

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d\gamma}{dt} m v^2 + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = q\left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$
$$= 0$$

Sachant que $\displaystyle \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}}}\right) = \frac{\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \gamma^3 \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

on peut écrire que $\displaystyle \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d\gamma}{dt} m v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} m \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}\left(\cancel{mv^2} + \frac{(c^2 - v^2)}{m}\right)$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\gamma = \text{cste}}$$

En reprenant $\boxed{A}$, on a alors $\displaystyle \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v_{//}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \gamma v_{//}^2\right) = 0$

$\rightarrow$ $\underline{v_{//} = \text{cste}}$ ce qui avec $\underline{\gamma = \text{cste}}$ implique $\underline{v_\perp = \text{cste}}$

En projetant la RFD sur $\vec{v_\perp}$, on a alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v_\perp} = q\left(\frac{\vec{v_\perp}}{c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v_\perp} = 0 \quad \boxed{B}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v_\perp}}{dt} \cdot \vec{v_\perp} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{v_\perp}}{dt} \perp \vec{v_\perp}$$

Le mouvement dans le plan perpendiculaire est un mvt circulaire car

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} \perp \vec{v}_\perp .$$

On a un mvt circulaire dans le plan perpendiculaire + mvt uniforme $\parallel$ à $\vec{B}$ $\rightarrow$ <u>Mvt hélicoïdal</u>

Dans le plan perpendiculaire, l'accélération centrifuge est

$$\frac{dv_\perp}{dt} = a_\perp = |q|\frac{v_\perp}{c}\frac{B}{m\gamma} = \frac{v_\perp^2}{R_L}$$

$$\rightarrow \boxed{R_L = \frac{\gamma m c v_\perp}{|q| B} = \frac{p_\perp c}{|q| B}}$$

$$\text{et } \boxed{\omega_L = \cancel{2\pi}\frac{v_\perp}{\cancel{2\pi} R_L} = \frac{|q| B}{\gamma m c}}$$

(2°) Le champ magnétique vérifie $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Au voisinage de l'axe, on a B_r non nul mais avec $B_r(r=0)=0$

Si on fait un $dl_\perp$ en r, on a

$$B_r(r) \simeq \left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right) r \quad \text{, ce qui donne}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \simeq 2\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right) \simeq -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\rightarrow 2\frac{B_r}{r} \simeq -\frac{\partial B_z}{\partial z} \rightarrow \boxed{B_r \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

Si λ est la longueur de variation de B_z, alors

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \sim \frac{B_z}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow B_r \simeq -\frac{r}{2\lambda} B_z \quad \text{avec } r = R_L \text{ pour une particule}$$

$$\rightarrow |B_r| \simeq + \frac{R_L}{2\lambda}|B_z| \ll +|B_z|$$

Le champ radial est donc négligeable → trajectoire hélicoïdale

(3°) Pour montrer que L_z est un invariant quand il est couplé au pot. vecteur, on pose que

$$L_z = (\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e_z} = \left\{ (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) \wedge (\gamma m(\vec{v_\perp} + \vec{v_\parallel})) \right\} \cdot \vec{e_z}$$

$$\rightarrow \quad L_z = \left(\gamma m \left\{ r v_\perp \vec{e_z} - r v_\parallel \vec{e_\theta} - z v_\perp \vec{e_r} \right\} \right) \cdot \vec{e_z}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{L_z = \gamma m r v_\perp}$$

Le théorème du m^t cinétique s'écrit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ donc pour la composante selon z, on aura

$$\frac{dL_z}{dt} = \left\{ (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) \wedge \left(\frac{q}{c} (\vec{v_\parallel} + \vec{v_\perp} + v_r\vec{e_r}) \wedge (\underbrace{B_r\vec{e_r}}_{=0 \text{ car mvt hélicoïdal}} + B_z\vec{e_z}) \right) \right\} \cdot \vec{e_z}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = \left\{ \frac{q}{c} r v_\parallel \vec{e_z} B_r - \frac{q}{c} r \overset{=0}{v_\perp} \vec{e_z} B_z \right\} \cdot \vec{e_z}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = \frac{q}{c} r \left(-v_\parallel \frac{\partial A}{\partial z} - v_r \frac{\partial A r}{r \partial r} \right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = -\frac{q}{c} \underbrace{\left(\frac{\partial rA}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial rAr}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right)}_{= \frac{d}{dt}(rA)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(L_z + \frac{q}{c} rA \right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\gamma m r v_\perp + \frac{q}{c} rA \right) = 0$$

$$\boxed{\gamma m r v_\perp + \frac{q}{c} rA \text{ est un invariant du mouvement}}$$

$$A \parallel v_\perp \rightarrow \gamma m r \vec{v_\perp} + \frac{q}{c} r\vec{A} = \vec{cste}$$

4° L'élément de longueur de l'hélice est tel que $r = R_L \rightarrow dr = 0$

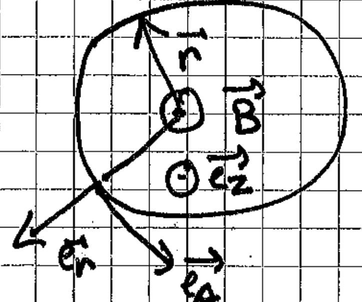
$$\rightarrow \vec{dl} = R_L d\theta \, \vec{e_\theta} + dz \, \vec{e_z}$$

Si on intègre sur une rotation de la particule, on a

$$\oint \vec{J} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} \gamma m R_L^2 v_\perp \, d\theta + \oint \frac{q}{c} R_L \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

Signe de $v_\perp$ en fonction du signe de q

$\vec{B} = B \vec{e_z}$ avec $B > 0$



$q > 0$: Pour avoir une accélération $a_\perp$ selon $-\vec{e_r}$

$$\rightarrow v_\perp < 0$$

$q < 0$: ______ $-\vec{e_r}$

$$v_\perp > 0$$

$$v_\perp = |v_\perp| \frac{-q}{|q|}$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \gamma m R_L^2 v_\perp \, d\theta = \gamma m R_L^2 \times \frac{+q}{|q|} R_L \omega_L 2\pi = +\frac{q}{|q|} 2\pi R_L^2 |q| B$$

$$= 2\pi R_L^2 \times \frac{q}{c} R_L B_z = 2 \frac{q}{c} R_L \Phi_B$$

$\rightarrow$ L'intégration se passe dans le sens de $v_\perp$!

Cette intégrale est donc positive

$$\rightarrow \oint \frac{q}{c} R_L A \, d\theta = -\frac{q}{c} R_L \Phi_B \quad \text{car } \vec{A} \text{ orienté selon } -\vec{v_\perp}.$$

$$\boxed{\rightarrow \oint \vec{J} \cdot \vec{dl} = 2 \frac{q}{c} R_L \Phi_B - \frac{q}{c} R_L \Phi_B = \frac{q}{c} R_L \Phi_B}$$

Si Φ_B est invariant $\rightarrow$ $R_L^2 B_z$ est invariant donc

$$\frac{p_\perp^2 c^2}{q^2 B^2} \times B = \frac{p_\perp^2}{B} \frac{c^2}{q^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{p_\perp^2}{B} \text{ invariant}} \; !$$

<u>Seconde partie</u> 5° $P_{syn} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B = -\frac{d\gamma}{dt} m c^2$

Avec $E \sim 10^{14}$ eV, on a $\gamma >> 1$ et $\beta \simeq 1$

$$\rightarrow \quad P_{syn} \simeq \frac{4}{3}\sigma_T c\, \gamma^2 U_B = -\frac{d\gamma}{dt} mc^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\gamma}{\gamma^2} = -\frac{4\sigma_T U_B}{3mc} dt$$

$$\rightarrow \quad \int_{\gamma_{ini}}^{\frac{\gamma_{ini}}{2}} \frac{d\gamma}{\gamma^2} = \underbrace{\left[-\frac{1}{\gamma}\right]_{\gamma_{ini}}^{\frac{\gamma_{ini}}{2}}}_{= -\frac{1}{\gamma_{ini}}} = -\frac{4}{3}\frac{\sigma_T U_B}{mc}\overbrace{t_{cool}}^{= t_{syn}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{t_{syn} = \frac{3\, mc}{4\sigma_T \gamma_{ini} U_B}}$$

Dans le cas d'un proton : $\gamma_{ini} \simeq \frac{10^{14}\,eV}{1\,GeV} \simeq 10^5$

$$U_B = \frac{(10^{-4}G)^2}{8\pi} \simeq 4 \times 10^{-10}\ erg.cm^{-3}$$

$$\rightarrow \quad t_{syn,p} = \frac{3 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{4 \times 4 \times 10^{-28} \times 10^5 \times 4 \times 10^{-10}} \simeq \boxed{\frac{1}{8} \times 10^{21}\ sec.}$$

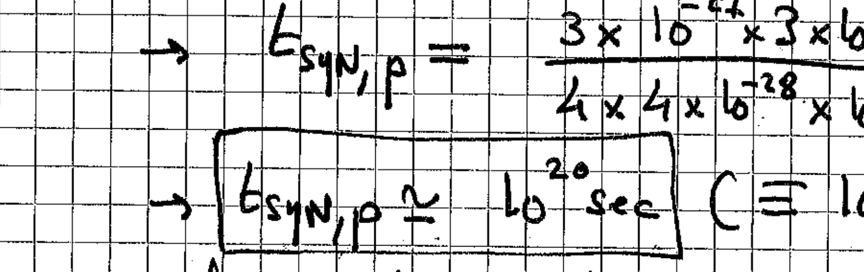
$$\rightarrow \quad \boxed{t_{syn,p} \simeq 10^{20}\ sec} \quad (\equiv 10^{13}\ \text{années !})$$

Dans le cas d'un électron, on a $\gamma_{ini} = \frac{10^{14}\,eV}{0{,}5\,MeV} \simeq 2 \times 10^8$

$$\rightarrow t_{syn,e} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3 t_{syn,p} \rightarrow \boxed{t_{syn,e} \simeq 10^3\ \text{ans}}$$

→ les électrons se refroidissent bcp plus vite que les protons.

60



Conservation du flux :

$B_z \times \pi r^2 = cte$

Le proton, au cours de sa propagation, vérifie

$$\frac{p_\perp^2}{B_z} = \text{cste} \rightarrow \frac{v_\perp^2}{B_z} = \text{cste} \quad (\text{car } \gamma = \text{cste})$$

En $z=0$, on a $\quad \text{cste} = \dfrac{v_{\perp,0}^2}{B_{z,0}} = \dfrac{v_\perp^2}{B_z}$

Au point où B_z devient maximal, $B_z \rightarrow B_{z,M}$ et la particule sera confinée si $v_{/\!/} \rightarrow 0$ en ce point.

Particule confinée si qd $B_z \rightarrow B_{z,M}$ $\quad v_{\perp M}^2 > v_{/\!/,0}^2 + v_{\perp,0}^2$

$$\rightarrow \quad v_{\perp,M}^2 = \frac{B_{z,M}}{B_{z,0}} v_{\perp,0}^2 > v_{/\!/,0}^2 + v_{\perp,0}^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{B_{z,M}}{B_{z,0}} > \frac{v_{/\!/,0}^2}{v_{\perp,0}^2} + 1$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{v_{/\!/,0}^2}{v_{\perp,0}^2} < \frac{B_{z,M}}{B_{z,0}} - 1}$$

Particules synchrotron ont $v_\perp \rightarrow c$ et donc $v_{/\!/} \ll v_\perp$

$\rightarrow$ Condition facilement vérifiée.

7° La variation de B_z est associée à une composante B_r

$$\rightarrow \quad B_r \simeq \frac{r}{2\lambda} B_z$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{e}_z = q \frac{v_\perp}{c} \frac{R_L}{2\lambda} B_z$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_{/\!/}}{dt} = \frac{|q| B_z}{\gamma m c} \frac{R_L}{2\lambda} v_\perp = \frac{v_\perp^2}{2\lambda}$$

On a $\dfrac{dv_\perp}{dt} = \dfrac{v_\perp^2}{R_L} \rightarrow \dfrac{\dfrac{dv_{/\!/}}{dt}}{\dfrac{dv_\perp}{dt}} = \dfrac{R_L}{\lambda} \ll 1$