

Chapitre 4

Application de la réallocation au problème de la détection d’ondes gravitationnelles

On s’intéresse dans ce chapitre au problème de la détection de chirps. On reprend ici le travail effectué dans [27, 25] qui montre comment les distributions réallouées grâce à leur bonne propriété de localisation, présentent un grand intérêt à ce sujet. Il apparaît ici clairement qu’elles peuvent s’intégrer à une chaîne de traitement du signal, à des fins autres que celles de l’analyse. L’application à la détection d’ondes gravitationnelles qui conclue ce chapitre nous a contraint à employer des notations spécifiques à ce domaine, en particulier l’abandon de la pulsation au profit de la fréquence. Certaines quantités seront définies une deuxième fois en respect de ces nouvelles conventions.

4.1 Introduction

Généralement, on fait correspondre au terme “chirp signal” (ou simplement “chirp”) un signal dont l’expression peut s’écrire en fonction du temps comme

$$x(t) = a(t) e^{i\varphi(t)}, \quad (4.1)$$

l’amplitude $a(t)$ étant une fonction positive dont l’évolution est lente comparée aux oscillations de la phase $\varphi(t)$. Définis ainsi, les chirps sont destinés à servir de modèle pour les signaux mono-composantes modulés à la fois en amplitude et en fréquence. Leur fréquence “instantanée” est alors supposée être reliée aux oscillations “locales” de la phase.

Les chirps sont omniprésents dans la Nature. Ils peuvent être observés dans les communications animales (oiseaux, grenouilles, baleines, . . .) et les sonars animaux (chauve-souris), en géophysique (sifflements atmosphériques), en astrophysique (ondes gravitationnelles produites par la coalescence d’étoiles binaires), acoustique (propagation d’impulsion dans des milieux dispersifs) ou en biologie (activité nerveuse dans les données EEG lors de crise d’épilepsie, contractions utérines dans les données EMG, . . .). Ils sont aussi amplement utilisés dans les systèmes artificiels comme les radars et sonars, ou dans le contrôle non-destructif de matériaux et l’exploration sismique.

Intuitivement, un chirp $x(t)$ appelle à une description temps-fréquence qui, si elle est faite à l’aide d’une représentation conjointe $\rho_x(t, f)$ correctement définie, devrait exister essentiellement — dans le plan temps-fréquence — dans un voisinage étroit autour d’une ligne caractéristique \mathcal{L} . Cette ligne

peut alors être, aussi bien interprétée comme une “fréquence instantanée” (fréquence en fonction du temps) ou — dans une perspective duale — comme un “retard de groupe” (temps en fonction de la fréquence). En supposant que cela soit vérifié, il devient naturel de proposer un schéma heuristique pour la détection d’un chirp, basé sur la recherche d’une telle ligne dans la distribution temps-fréquence de l’observation $r(t)$, e.g., en utilisant la stratégie de détection suivante

$$\Lambda(r) = \int_{\mathcal{L}} \rho_r(t, f) dl \quad (4.2)$$

et en la comparant à un seuil choisi à partir d’hypothèses faites sur le bruit.

Qui est plus, dans le cas où la courbe \mathcal{L} dépend d’un vecteur de paramètres inconnus θ , en introduisant la quantité paramétrée

$$\Lambda(r; \theta) = \int_{\mathcal{L}(\theta)} \rho_r(t, f) dl \quad (4.3)$$

et en regardant son maximum selon θ , on effectue non seulement la détection de $x(t)$, mais également l’estimation de θ . Une telle stratégie évoque clairement celle des transformations de Radon ou de Hough généralisées.

Au delà de ces considérations heuristiques, le raisonnement qui aboutit à l’utilisation de la stratégie proposée ci-dessus doit néanmoins être discuté et justifié. Dans ce sens, et pour un chirp à détecter donné, trois questions principales doivent être traitées :

1. quelle représentation temps-fréquence utiliser pour donner un sens à l’idée de localisation ?
2. comment une démarche heuristique basée sur l’intégration le long de chemin dans le plan temps-fréquence peut être rendue optimale selon des critères statistiques précis ?
3. qu’a-t-on gagné d’une formulation temps-fréquence de la détection optimale de chirp ?

Les deux premières questions sont traitées avec précaution dans ce chapitre. La troisième ne sera pas considérée en détail. Les résultats rapportés ici fourniront néanmoins les indications nécessaires pour justifier l’utilité d’une reformulation temps-fréquence du problème de la détection de chirps en termes de robustesse et de flexibilité (d’emploi). Une attention spéciale sera portée au cas spécifique des chirps en “loi de puissance”, à cause de leur importance dans le contexte de la détection des ondes gravitationnelles. Mais avant de nous intéresser à cela, nous introduirons quelques définitions (Sect. 4.2) et commencerons la discussion avec le cas plus simple des chirps *linéaires*, pour lesquels les résultats sont connus et établis depuis longtemps (Sect. 4.4). Ceci nous offrira les lignes directrices pour effectuer la généralisation à des situation non linéaires comme celle des chirps en loi de puissance (Sect. 4.5). Pour finir, l’exemple spécifique de la détection d’ondes gravitationnelles émises par une binaire coalescente sera finalement discuté et illustré (Sect. 4.6).

Insistons sur le fait que l’idée d’utiliser une stratégie temps-fréquence pour détecter les chirps est une longue histoire. De nombreux exemples d’application de cette approche peuvent être répertoriés dans la littérature, e.g., [8, 9, 37, 38, 42, 64, 81] ou plus récemment [55, 56]. Plusieurs résultats nécessaires au traitement du problème temps-fréquence ont été obtenus dans les contextes de la théorie de la détection ou de l’analyse temps-fréquence (voir par exemple, [15, 28, 36]). La plupart d’entre eux seront néanmoins rappelés (ou même démontrés à nouveau). L’objectif principal de ce chapitre est de rassembler différents ingrédients et de les combiner de façon cohérente. On y verra en particulier comment les distributions réallouées sont amenées à jouer un rôle naturel dans le contexte de décision considéré.

4.2 Chirps

À cause de leur grande importance, les chirps méritent une définition plus précise et rigoureuse que celle donnée ci-dessus. Un traitement mathématique sophistiqué peut être trouvé dans [58], tandis qu'une discussion sur les possibilités d'interprétation des définitions comme celle en éq. (4.1) en termes d'amplitude et de fréquence instantanée est donnée dans [83]. Nous n'entrerons cependant pas dans les subtilités de chacune de ces deux approches et nous nous restreindrons à l'utilisation de la définition suivante :

Definition 1. Un signal $x(t)$ est un **chirp** si il admet la représentation proposée en éq. (4.1), avec $a(t)$ and $\varphi(t)$ telles que

$$\left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t) \dot{\varphi}(t)} \right| \ll 1 \quad (4.4)$$

et

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} \right| \ll 1, \quad (4.5)$$

où “ $\dot{}$ ” et “ $\ddot{}$ ” sont les dérivées première et seconde respectivement.

Les deux conditions ci-dessus ont pour but de formaliser l'idée d'oscillations rapides sous une enveloppe aux variations lentes. La première condition garantit que, sur une pseudo-période (locale) $T(t) = 2\pi/\dot{\varphi}(t)$, l'amplitude $a(t)$ ne subisse aucune variation relative, tandis que la seconde condition impose que $T(t)$ soit elle-même une fonction lentement variable, donnant ainsi un sens à la notion de pseudo-période.

Definition 2. Un chirp $x(t)$ est dit **analytique** si il est tel que $\text{Re}\{x(t)\}$ et $\text{Im}\{x(t)\}$ forment une paire de Hilbert.

Une caractérisation équivalente des chirps analytiques est de dire que leur spectre est non nul pour les fréquences positives seulement.

Definition 3. Étant donné un chirp analytique $x(t)$, l'**amplitude instantanée** et la **fréquence instantanée** $f_x(t)$ de $\text{Re}\{x(t)\}$ sont données respectivement par $a_x(t) = |x(t)|$ and $f_x(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)$.

Definition 4. Étant donné un chirp analytique $x(t)$, l'**enveloppe spectrale** $B_X(f)$ et le **retard de groupe** $t_X(f)$ de $\text{Re}\{x(t)\}$ sont donnés respectivement par $B_X(f) = |X(f)|$ et $t_X(f) = -\frac{1}{2\pi}\dot{\Psi}(f)$, avec $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ et $\Psi(f)$ la phase de $X(f)$.

De plus, nous considérerons les chirps *strictement monotones*, i.e., les chirps dont la fréquence instantanée $f_x(t)$ et le retard de groupe $t_X(f)$ sont des fonctions inversibles.

Différents types de chirps peuvent être considérés, selon la forme de $a(t)$ et/ou $\varphi(t)$. Nous adopterons les conventions suivantes :

Definition 5. Un chirp est un **chirp linéaire** si il admet une représentation comme en éq. (4.1) où $\varphi(t)$ est un polynôme quadratique en t :

$$\varphi(t) = 2\pi \left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma \right), \quad (4.6)$$

où α , β et γ sont réels, et $\alpha \neq 0$.

Remarquons que, par construction, un chirp linéaire $x(t)$ défini de cette manière n'a aucune raison d'être analytique. La conséquence en est que la quantité $\frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t) = \alpha t + \beta$ ne s'identifie pas en général à la vraie fréquence instantanée du signal à valeur réelle $\text{Re}\{x(t)\}$. Les conditions selon lesquelles un chirp linéaire est presque analytique peuvent être précisées dans quelques cas quand une forme explicite est donnée à l'amplitude $a(t)$. En particulier, dans le cas important d'une amplitude gaussienne, il devient simple de prouver qu'un chirp linéaire d'amplitude gaussienne $e^{-\pi\delta t^2}$ devient presque analytique (i.e., s'annule presque pour les fréquences négatives) dans la limite bande étroite où $(\alpha^2 + \delta^2)/\delta\beta^2 \rightarrow 0$. Ceci provient d'un calcul direct selon lequel

$$|X(f)| = C e^{-\pi \frac{\delta}{\alpha^2 + \delta^2} (f - \beta)^2}. \quad (4.7)$$

Nous obtenons le résultat que la fréquence centrale d'un chirp linéaire d'amplitude gaussienne est β , tandis que sa largeur de bande est proportionnelle à $(\delta + \alpha^2/\delta)^{1/2}$, sous la condition de bande étroite.

La situation de quasi-analyticité des chirps linéaires contraste avec celle des chirps en *loi de puissance*, qui, eux, sont analytiques par construction. Ils correspondent à la définition suivante :

Définition 6. *Un chirp est un **chirp en loi de puissance** (d'indice $r \in \mathbb{R}$ et $k \leq 0$) si son spectre est non nul aux fréquences positives seulement et si il admet comme représentation fréquentielle*

$$X_{r,k}(f) = C f^{-(r+1)} e^{i\Psi_k(f)} U(f), \quad (4.8)$$

avec $\Psi_k(f) = -2\pi (cf^k + t_0 f + \gamma)$ si $k < 0$, $\Psi_0(f) = -2\pi (c \log f + t_0 f + \gamma)$, $C, c, t_0, \gamma \in \mathbb{R}$ et où $U(\cdot)$ désigne l'échelon de Heaviside.

Un chirp en loi de puissance est donc caractérisé par sa loi de retard de groupe $t_X(f) = t_0 + ck f^{k-1}$. Bien que cette définition puisse s'étendre pour des valeurs positives du paramètre k , nous nous restreindrons dans la suite au cas $k \leq 0$, pour lequel le retard de groupe correspond à des hyperboles généralisées dans le plan temps-fréquence.

4.3 Détection

4.3.1 Détection optimale

La détection d'un signal est généralement formulée en un problème de test binaire d'hypothèses (voir, e.g., [97])

$$H_0 : r(t) = n(t) \quad (4.9)$$

$$H_1 : r(t) = n(t) + s(t), \quad (4.10)$$

avec $-T/2 \leq t \leq T/2$, et où $s(t)$ est le signal de référence à détecter (supposé connu et d'énergie finie sur $[-T/2, T/2]$), $n(t)$ est un bruit additif et $r(t)$ est l'observation disponible avec laquelle la décision doit être prise.

Dans ce cadre, l'obtention d'un détecteur "optimal" dépend non seulement de connaissances *a priori* que l'on pourrait avoir sur le signal et le bruit, mais aussi du choix d'un critère d'optimalité.

Un concept pertinent pour un tel critère est celui de “test du rapport de vraisemblance” (TRV), qui consiste essentiellement à évaluer la stratégie suivante

$$\lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)}, \quad (4.11)$$

où $p_0(r)$ et $p_1(r)$ désignent les densités de probabilité conditionnelles de l’observation sous H_0 et H_1 , respectivement. Dès que le TRV est calculé, la détection est alors effective quand le seuil est dépassé.

Nous serons intéressés ici au cas où le signal suit l’expression

$$s(t) = x(t; \boldsymbol{\theta}) e^{i\gamma}, \quad (4.12)$$

où $\boldsymbol{\theta}$ est un vecteur de paramètres inconnus que l’on aimerait estimer, et γ une phase aléatoire, uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$, dont on aimerait se débarrasser. Dans cette situation, la notion de TRV doit être étendue à celle du TRV généralisé (TRVG), défini par

$$\tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^{2\pi} p_1(r|\gamma) d\gamma}{p_0(r)}. \quad (4.13)$$

À partir de cette stratégie modifiée, la détection reste encore basée sur la comparaison avec un seuil. L’estimation (au sens du maximum de vraisemblance) des paramètres peut alors être conduite simultanément selon

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta}). \quad (4.14)$$

Dans le but d’obtenir une forme explicite pour le TRVG, des hypothèses supplémentaires sur la statistique du bruit additif sont nécessaires. Pour simplifier, nous supposons $n(t)$ de moyenne nulle, gaussien, et blanc, i.e., tel que

$$\mathbf{E} [n(t) \overline{n(s)}] = N_0 \delta(t - s) \quad (4.15)$$

pour t et s quelconques dans \mathbb{R} , avec $\mathbf{E}[\cdot]$ l’opérateur de l’espérance mathématique. Ces hypothèses permettent des simplifications dans l’écriture du TRVG, puisque nous avons [97]

$$\frac{p_1(r|\gamma)}{p_0(r)} = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} (|r(t) - x(t; \boldsymbol{\theta}) e^{i\gamma}|^2 - |r(t)|^2) dt \right\}. \quad (4.16)$$

Il s’en suit après quelques manipulations que

$$\tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{E_x(\boldsymbol{\theta})}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \left(F(\boldsymbol{\theta}) e^{-i\gamma} + \overline{F(\boldsymbol{\theta})} e^{i\gamma} \right) \right\} d\gamma, \quad (4.17)$$

avec $E_x(\boldsymbol{\theta})$ l’énergie du signal et

$$F(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-T/2}^{T/2} r(t) \overline{x(t; \boldsymbol{\theta})} dt. \quad (4.18)$$

En exprimant la quantité précédente dans sa forme polaire $F(\boldsymbol{\theta}) = |F(\boldsymbol{\theta})| e^{i\varphi_F(\boldsymbol{\theta})}$ et en réorganisant les termes, nous sommes conduits à

$$\tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{E_x(\boldsymbol{\theta})}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2|F(\boldsymbol{\theta})|}{N_0} \cos(\varphi_F(\boldsymbol{\theta}) - \gamma) \right\} d\gamma, \quad (4.19)$$

un résultat qui peut être réécrit comme

$$\tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{E_x(\boldsymbol{\theta})}{2N_0}} I_0 \left(\frac{2|F(\boldsymbol{\theta})|}{N_0} \right), \quad (4.20)$$

où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce [1].

Le point remarquable est que, $I_0(\cdot)$ étant une fonction monotone croissante, la stratégie de détection se réduit à la comparaison de $|F(\boldsymbol{\theta})|$ (ou tout autre fonction monotone croissante de $|F(\boldsymbol{\theta})|$) avec un seuil. Il s'en suit donc que l'ingrédient de base pour la détection TRVG considérée se résume à

$$\Lambda(r; \boldsymbol{\theta}) = \left| \int_{-T/2}^{T/2} r(t) \overline{x(t; \boldsymbol{\theta})} dt \right|^2. \quad (4.21)$$

Concernant l'estimation, quelques précautions doivent cependant être prises puisque la maximisation selon $\boldsymbol{\theta}$ de la stratégie simplifiée $\Lambda(r; \boldsymbol{\theta})$ à la place de la forme exacte $\tilde{\lambda}(r; \boldsymbol{\theta})$ suppose implicitement que l'énergie du signal $E_x(\boldsymbol{\theta})$ ne dépende pas de $\boldsymbol{\theta}$.

La stratégie de détection proposée ici est donc excessivement simple, puisqu'elle consiste seulement en la corrélation des observations avec une réplique du signal recherché. Mais, on ne doit pas oublier qu'il en est ainsi à cause des nombreuses hypothèses qui ont été faites, et particulièrement celle de gaussiannité. On peut remarquer que le détecteur TRVG admet une interprétation en termes de "filtre adapté," un concept basé sur l'idée d'un filtrage des observations qui maximiserait le rapport signal sur bruit (i.e., le contraste entre les deux hypothèses en compétition) en sortie du filtre. En raison du terme de phase aléatoire, le détecteur TRVG optimal se trouve coïncider avec un filtre adapté suivi par le calcul de son enveloppe : une structure que l'on appelle "filtrage adapté avec détection d'enveloppe." [97].

Jusqu'à maintenant, le bruit additif a été supposé blanc. Dans la situation plus réaliste où le bruit, toujours stationnaire et centré, est coloré, la même stratégie de détection s'applique encore *mutatis mutandis*, sous l'hypothèse de gaussiannité à condition de blanchir les observations dans un premier temps. Plus précisément, étant admis que le support en temps du signal à détecter est entièrement contenu dans l'intervalle d'observation $[-T/2, T/2]$, la relation de Parseval garantit alors que

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} r(t) \overline{x(t; \boldsymbol{\theta})} dt \right|^2 = \left| \int_0^{+\infty} R(f) \overline{X(f; \boldsymbol{\theta})} df \right|^2 \quad (4.22)$$

pour les signaux analytiques. En conséquence, si nous introduisons une opération de blanchiment

$$x(t) \mapsto x^w(t) = \int_0^{+\infty} \frac{X(f)}{\sqrt{\Gamma_n(f)}} e^{i2\pi ft} df \quad (4.23)$$

et si nous l'appliquons aux observations, le problème de la détection d'un signal donné dans un bruit coloré est (au moins formellement) transformé dans le problème nouveau de la détection du signal original pré-filtré dans un bruit blanc, conduisant alors à la stratégie suivante :

$$\Lambda^w(r; \boldsymbol{\theta}) = \left| \int_0^{+\infty} \frac{R(f) \overline{X(f; \boldsymbol{\theta})}}{\Gamma_n(f)} df \right|^2. \quad (4.24)$$

C'est à cette quantité que nous nous proposons de donner une formulation temps-fréquence équivalente.

4.3.2 Détection temps-fréquence

Ainsi que le met en évidence la structure du TRVG, la détection optimale repose sur une mesure de corrélation — comprise comme un module carré d'un produit scalaire — entre les observations et une référence. Cette corrélation peut être exprimée de manière équivalente en temps ou en fréquence. Ceci suggère naturellement qu'une troisième approche équivalente soit possible: celle selon laquelle le produit scalaire pourrait être écrit conjointement en temps et en fréquence par l'utilisation d'une distribution temps-fréquence convenable, que l'on peut penser comme une "signature" bien-adaptée aux signaux non stationnaires.

L'idée est donc d'introduire une distribution temps-fréquence $\rho_x(t, f)$ (qui doit être au moins quadratique en x) telle que nous ayons, pour tous signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, une relation du type

$$|\langle x_1, x_2 \rangle_t|^2 = |\langle X_1, X_2 \rangle_f|^2 = \langle \rho_{x_1}, \rho_{x_2} \rangle_{tf}, \quad (4.25)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ et $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{tf}$ désignent des produits scalaires convenablement choisis opérant en temps, en fréquence et à la fois en temps et en fréquence, respectivement (les définitions explicites de ces produits scalaires seront détaillées dans la suite pour donner un sens précis aux égalités précédentes).

Une telle équivalence n'a, bien sur, aucune raison d'être vérifiée par toutes les distributions temps-fréquence quadratiques. Cela n'est, par exemple, pas le cas pour la plus simple des distributions à laquelle on peut penser, nommément le *spectrogramme* (module carré de la FCT) et le *scalogramme* (module carré de la transformée en ondelettes). Ceci peut être contrôlé directement, mais cette affirmation (et, avec elle, le moyen de trouver une distribution convenable qui dépasse les limitations des spectrogrammes et scalogrammes) peut être justifiée d'une façon plus intéressante en considérant des classes générales de distributions auxquelles les spectrogrammes et scalogrammes appartiennent. Nous pouvons par exemple introduire la définition suivante [28, 36] :

Definition 7. *La classe de toutes les distributions quadratiques temps-fréquence qui sont covariantes aux translations en temps et en fréquence est appelée **classe de Cohen** et se définit par*

$$C_x^{(\varphi)}(t, f) = \iint \varphi(\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) e^{-i2\pi(\xi t + \tau f)} d\xi d\tau, \quad (4.26)$$

avec

$$A_x(\xi, \tau) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i2\pi\xi t} dt \quad (4.27)$$

et où $\varphi(\xi, \tau)$ est une fonction de paramétrisation arbitraire telle que $\varphi(0, 0) = 1$.

Avec cette définition, il est facile d'établir le résultat suivant [59]:

Proposition 1. *Une distribution temps-fréquence appartenant à la classe de Cohen est **unitaire**, i.e., satisfait*

$$\left| \int x_1(t) \overline{x_2(t)} dt \right|^2 = \iint C_{x_1}^{(\varphi)}(t, f) \overline{C_{x_2}^{(\varphi)}(t, f)} dt df, \quad (4.28)$$

si et seulement si la fonction de paramétrisation $\varphi(\xi, \tau)$ est de module unité.

La conséquence de ce résultat est que le spectrogramme de fenêtre h ne peut pas être unitaire puisqu'il est bien connu [28, 36] qu'il appartient à la classe de Cohen avec $\varphi(\xi, \tau) = \overline{A_h(\xi, \tau)}$, une quantité qui ne peut pas être de module unité sur le plan (ξ, τ) en entier. Un résultat similaire peut

être établi pour le scalogramme, que l'on sait être un membre de la *classe affine* [36]. Il apparaît donc que ces distributions (spectrogrammes et scalogrammes) ne peuvent *a priori* servir de base à un détecteur temps-fréquence optimal, bien qu'ils puissent être mis en avant à ce sujet et que leur utilité ait été prouvée pour l'obtention de détecteurs sous-optimaux [3, 55, 56]. Des distributions optimales au sens de la détection peuvent être néanmoins trouvées. Nous nous focaliserons sur le cas spécifique de la détection de chirp. Nous renvoyons le lecteur intéressé par une discussion plus générale sur la détection temps-fréquence optimale à [38] ou à [89].

4.4 Détecter les chirps linéaires

La détection temps-fréquence optimale des chirps linéaires a été considérée, la première fois, dans [64]. Dans une perspective temps-fréquence, il apparaît que les chirps linéaires sont intimement associés à un membre spécifique de la classe de Cohen, la distribution de Wigner-Ville définie par [28, 36]

Definition 8. La *distribution de Wigner-Ville* du signal $x(t)$ est le membre de la classe de Cohen attaché à la paramétrisation $\varphi(\xi, \tau) = 1$ et son expression (à valeurs réelles) s'écrit explicitement

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i2\pi f \tau} d\tau. \quad (4.29)$$

La raison pour laquelle les chirps linéaires et la distribution de Wigner-Ville sont fortement reliés est donnée dans la propriété suivante

Proposition 2. Quand elle est appliquée au chirp linéaire de la Définition 5, avec $a(t) = 1$, la distribution de Wigner-Ville (4.29) est parfaitement localisée et s'écrit

$$W_x(t, f) = \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)\right). \quad (4.30)$$

Puisque la fonction de paramétrisation de la distribution de Wigner-Ville est $\varphi(\xi, \tau) = 1$, elle est bien évidemment de module unité, ce qui garantit son unitarité. Il s'en suit donc que nous avons

$$\left| \int x_1(t) \overline{x_2(t)} dt \right|^2 = \iint W_{x_1}(t, f) W_{x_2}(t, f) dt df \quad (4.31)$$

pour tous signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Dans le cas où $x_1(t) = r(t) \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t)$ (avec $\mathbf{1}_I(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle I) et $x_2(t)$ est un chirp linéaire $x_2(t) = a(t) e^{i(\varphi(t) - 2\pi\gamma)}$, nous obtenons (grâce à la propriété de conservation de support de la distribution de Wigner-Ville et à sa compatibilité avec les modulations [28, 36])

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} r(t) a(t) e^{i(\varphi(t) - 2\pi\gamma)} dt \right|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \int W_{r,a}(t, f) \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)\right) dt df \quad (4.32)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\int W_a\left(t, \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t) - \xi\right) W_r(t, \xi) d\xi \right) dt. \quad (4.33)$$

On en déduit que la détection optimale au sens du TRVG (dans un bruit blanc gaussien centré) d'un chirp linéaire de paramètres inconnus $\theta = (\alpha, \beta)$ peut être accomplie en utilisant comme stratégie la quantité suivante, basée sur une écriture temps-fréquence :

$$\Lambda(r; \alpha, \beta) = \int_{-T/2}^{T/2} \rho_r(t, \alpha t + \beta) dt, \quad (4.34)$$

avec

$$\rho_r(t, f) = \int W_a(t, f - \xi) W_r(t, \xi) d\xi. \quad (4.35)$$

Étant donné le modèle du chirp linéaire (5), l'énergie du signal à détecter ne dépend pas des paramètres inconnus α et β , ce qui autorise leur estimation au sens du maximum de vraisemblance par $\arg\max_{\alpha, \beta} \Lambda(r; \alpha, \beta)$.

4.5 Détecter les chirps en loi de puissance

Dans le cas des chirps en loi de puissance, la distribution de Wigner-Ville n'est plus un bon candidat puisque, bien qu'unitaire, il lui manque la propriété de localisation qui permet d'obtenir une solution sous forme d'intégrale de chemin. Dans le cas particulier des chirps hyperboliques (i.e., $k = 0$), une solution bien adaptée a été proposée dans [81] sur la base d'une variante de la distribution de Wigner-Ville (que l'on appelle la distribution de Altes-Marinovic), que l'on obtient par une anamorphose ("warping operation"). Nous ne suivrons pas cette approche ici à cause de deux limitations : d'abord le fait que la stratégie qui en résulte n'est pas invariante par les translations en temps (ce qui est un problème si l'origine temporelle du chirp est inconnue et doit être estimée) et ensuite cette technique développée pour le cas $k = 0$ ne peut être directement étendue à des valeurs de k quelconques.

Le cadre que nous proposons d'utiliser plutôt est celui des *distributions temps-fréquence affines*, comme l'ont développé J. et P. Bertrand [14]. Ces distributions forment une classe entière de distributions temps-fréquence. Mais, en comparaison à la précédente classe de Cohen, son introduction exige la covariance des distributions qu'elle contient, par rapport à chacune des extensions à 3 paramètres du groupe affine. Cela résulte en la construction d'une famille de distributions paramétrisées pour laquelle nous adopterons la définition suivante [14]:

Définition 9. La *distribution de Bertrand* (d'indice $k \in \mathbb{R}$) d'un signal analytique $X(f)$ est donnée par

$$P_X^{(k)}(t, f) = f^{2(r+1)-q} \int \mu_k(u) X(f \lambda_k(u)) \overline{X(f \lambda_k(-u))} e^{i2\pi t f \zeta_k(u)} du, \quad (4.36)$$

avec

$$\zeta_k(u) = \lambda_k(u) - \lambda_k(-u). \quad (4.37)$$

Dans cette définition r et q sont des paramètres réels quelconques, et $\mu_k(u)$ une fonction arbitraire, tandis que la forme explicite de la fonction de paramétrisation $\lambda_k(u)$ est fixée par

$$\lambda_k(u) = \left(k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (4.38)$$

si $k \neq 0, 1$, les deux cas spéciaux associés à $k = 0$ et $k = 1$ étant définis par continuité par

$$\lambda_0(u) = \frac{u}{1 - e^{-u}} \quad (4.39)$$

et

$$\lambda_1(u) = \exp \left(1 + \frac{u e^{-u}}{e^{-u} - 1} \right). \quad (4.40)$$

On peut remarquer qu'une distribution de Bertrand est à valeur réelle sous la condition de symétrie hermitienne $\mu_k(u) = \overline{\mu_k(-u)}$, une condition que nous supposons satisfaite dans la suite.

Pour obtenir la formulation temps-fréquence pour le détecteur de chirp en loi de puissance, nous aurons besoin de quelques résultats sur les distributions de Bertrand. Nous les résumerons dans les Propositions 3 à 6 suivantes, dont les preuves peuvent être trouvées dans [14] et [13].

Localisation — Étant entendu que la distribution de Wigner-Ville est naturellement adaptée aux chirps linéaires, l'adéquation entre distributions de Bertrand et chirps en loi de puissance peut être prouvée par la proposition suivante [14] :

Proposition 3. *Quand elle est appliquée à un chirp en loi de puissance (4.8), la distribution de Bertrand d'indice k (4.36) est **parfaitement localisée** sur la courbe de retard de groupe $t_X(f) = t_0 + ck f^{k-1}$ et s'écrit*

$$P_{X_{r,k}}^{(k)}(t, f) = C^2 f^{-(q+1)} \delta(t - t_X(f)), \quad (4.41)$$

si et seulement si la fonction de pondération arbitraire $\mu_k(u)$ est donnée par

$$\mu_k(u) = \dot{\zeta}_k(u) (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1}. \quad (4.42)$$

Ceci prouve que, en termes de localisation temps-fréquence, la structure des distributions de Bertrand est adaptée à celle des chirps en loi de puissance, ce qui constitue le premier ingrédient pour la détection temps-fréquence *via* une intégration de chemin.

Filtrage — Quand on sort de la classe des chirps en loi de puissance, la distribution de Bertrand n'est plus parfaitement localisée. Par exemple, quand un signal est filtré, la proposition suivante montre que sa distribution de Bertrand est filtrée en conséquence. Plus précisément, [13] :

Proposition 4. *Quand elle est appliquée au produit $X(f) = M(f) Y(f)$, la distribution de Bertrand $P_X^{(k)}(t, f)$ s'écrit*

$$P_X^{(k)}(t, f) = f^{q+1} \int P_{M_r}^{(k)}(t - \theta, f) P_Y^{(k)}(\theta, f) d\theta, \quad (4.43)$$

où

$$M_r(f) = f^{-(r+1)} M(f). \quad (4.44)$$

Unitarité — Le troisième ingrédient dont nous aurons besoin est l'unitarité, pour lequel — en introduisant des produits scalaires convenables sur la demi-droite des fréquences positives et sur le demi-plan temps-fréquence associé — nous avons le résultat suivant [14]:

Proposition 5. Une distribution de Bertrand est *unitaire*, i.e., satisfait

$$\left| \int_0^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} P_X^{(k)}(t, f) P_Y^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad (4.45)$$

pour tous signaux $X(f)$ et $Y(f)$, si et seulement si la fonction de pondération arbitraire $\mu_k(u)$ est donnée par

$$\mu_k(u) = \zeta_k^{1/2}(u) (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1}. \quad (4.46)$$

Unitarité étendue — En corollaire aux Propositions 3 and 5, les propriétés requises de localisation et d’unitarité peuvent être simultanément remplies si et seulement si $\zeta_k(u) = 1$, équation dont la seule solution en k est $k = 0$ (cela peut être clairement établi en notant que nous avons la relation $\lambda_k(u) = e^u \lambda_k(-u)$, quelque soit k [14]). À moins que nous ne voulions considérer seulement le cas des chirps hyperboliques, il semble que les deux propriétés de localisation et d’unitarité ne puissent pas être combinées directement, de manière à imiter ce qui a été préalablement fait dans le cas des chirps linéaires. Une échappatoire est cependant possible, qui repose sur la proposition suivante [14] :

Proposition 6. Étant donnée une distribution de Bertrand localisée $P_X^{(k)}(t, f)$ avec $k < 0$, il existe une distribution auxiliaire $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ caractérisée par

$$\tilde{\mu}_k(u) = (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1} \quad (4.47)$$

et telle que

$$\left| \int_0^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} \tilde{P}_X^{(k)}(t, f) P_Y^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad (4.48)$$

pour tous signaux $X(f)$ et $Y(f)$.

Cela nous offre un degré de liberté supplémentaire dans la manipulation des distributions de Bertrand, en assouplissant la contrainte stricte d’unitarité associée à une distribution donnée *via* l’introduction d’une paire de distributions et une relation de dualité qui les lie. Dans le cas spécifique $k = -1$, cette dualité est identique à celle évoquée par A. Unterberger (voir [95]), qui a inventé les termes d’ “active” et de “passive” pour distinguer les distributions correspondantes. Pour généraliser, nous adopterons donc la définition suivante :

Définition 10. La distribution auxiliaire $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ est appelée la distribution *passive* associée à $P_X^{(k)}(t, f)$, cette dernière étant qualifiée d’*active*.

Alors que, par construction, il manque à la forme passive d’une distribution, la propriété de localisation que possède la forme active qui lui est associée, la première peut être explicitement reliée à la dernière, ce qui est mis en évidence par la proposition suivante :

Proposition 7. La forme passive $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ d’une distribution de Bertrand localisée est reliée à la forme active correspondante $P_X^{(k)}(t, f)$ par

$$\tilde{P}_X^{(k)}(t, f) = f \int G_k(f(t - \theta)) P_X^{(k)}(\theta, f) d\theta, \quad (4.49)$$

où

$$G_k(s) = \int e^{i2\pi s \zeta_k(u)} du. \quad (4.50)$$

Preuve. En prenant comme point de départ la définition de la distribution passive, basée sur la fonction de pondération $\tilde{\mu}_k(u)$, nous pouvons écrire

$$\tilde{P}_X^{(k)}(t, f) = f^{2(r+1)-q} \int \tilde{\mu}_k(u) X(f\lambda_k(u)) \overline{X(f\lambda_k(-u))} e^{i2\pi t f \zeta_k(u)} du \quad (4.51)$$

$$= f^{2(r+1)-q} \int \frac{\tilde{\mu}_k(u)}{\mu_k(u)} \left[\mu_k(u) X(f\lambda_k(u)) \overline{X(f\lambda_k(-u))} \right] e^{i2\pi t f \zeta_k(u)} du \quad (4.52)$$

$$= \int \frac{f^{2(r+1)-q}}{\zeta_k(u)} \left[\mu_k(u) X(f\lambda_k(u)) \overline{X(f\lambda_k(-u))} \right] e^{i2\pi t f \zeta_k(u)} du, \quad (4.53)$$

de telle sorte que cela fasse apparaître la fonction de pondération $\mu_k(u)$ de la distribution active associée. En utilisant alors le fait que, pour $k \leq 0$, la fonction $\zeta_k(u) = \lambda_k(u) - \lambda_k(-u)$ est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , on peut faire le changement de variable $u = \zeta_k^{-1}(v)$ pour exprimer $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ comme une transformée de Fourier ordinaire. Nous obtenons alors

$$\tilde{P}_X^{(k)}(t, f) = \int \frac{f^{2(r+1)-q}}{\dot{\zeta}_k(\zeta_k^{-1}(v))} \left[\frac{\mu_k(\zeta_k^{-1}(v))}{\dot{\zeta}_k(\zeta_k^{-1}(v))} X(f\lambda_k(\zeta_k^{-1}(v))) \overline{X(f\lambda_k(-\zeta_k^{-1}(v)))} \right] e^{i2\pi t f v} dv \quad (4.54)$$

$$= \int G_k(s) P_X^{(k)}\left(t - \frac{s}{f}, f\right) ds \quad (4.55)$$

$$= f \int G_k(f(t - \theta)) P_X^{(k)}(\theta, f) d\theta, \quad (4.56)$$

avec

$$G_k(s) = \int \frac{1}{\dot{\zeta}_k(\zeta_k^{-1}(v))} e^{i2\pi s v} dv \quad (4.57)$$

$$= \int \frac{d}{dv} (\zeta_k^{-1}(v)) e^{i2\pi s v} dv \quad (4.58)$$

$$= \int e^{i2\pi s \zeta_k(u)} du, \quad (4.59)$$

d'où le résultat.

Étant donné une distribution active, sa contrepartie passive apparaît alors comme une version filtrée de celle-ci, la réponse impulsionnelle G_k du filtre étant dépendant de la fréquence (la "largeur" en temps équivalente de G_k varie comme l'inverse de la fréquence). Dans le cas général (k quelconque), aucune expression analytique n'existe pour G_k . Remarquons néanmoins que dans le cas où $k = -1$ ($\lambda_{-1}(u) = e^{u/2}$, distribution de Unterberger [14]), nous avons explicitement

$$G_{-1}(s) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{4}}} e^{i2\pi s v} dv \quad (4.60)$$

$$= 4 K_0(4\pi|s|), \quad (4.61)$$

où $K_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce [1], ce qui est en accord avec les résultats donnés dans [95].

Tous les résultats obtenus jusqu'ici peuvent maintenant être combinés et ce qui mène au résultat central :

Proposition 8. *Étant donné le problème de détection où le signal $x(t; \theta_0)$ à détecter est un chirp en loi de puissance (4.8) de loi de retard de groupe $t_X(f) = t_0 + c_0 k f^{k-1}$ avec les paramètres inconnus $\theta_0 = (t_0, c_0)$, et où le bruit additif $n(t)$ est gaussien, centré, stationnaire et de densité spectrale de puissance $\Gamma_n(f)$, la stratégie optimale admet la formulation temps-fréquence suivante :*

$$\Lambda^w(r; t, c) = \int_0^{+\infty} \rho_R(t + c k f^{k-1}, f) df, \quad (4.62)$$

avec

$$\rho_R(t, f) = C^2 f^{2q} \int \tilde{P}_A^{(k)}(t - s, f) P_R^{(k)}(s, f) ds \quad (4.63)$$

et

$$A(f) = \frac{f^{-(3r+2)}}{\Gamma_n(f)} U(f). \quad (4.64)$$

Preuve. Supposons d'abord que $\theta_0 = (t_0, c_0)$ est connu. Dans ce cas, à partir des résultats de la Proposition 3 (localisation) et 6 (unitarité étendue), nous obtenons [14] clairement, pour tout signal $Z(f)$,

$$\left| \int_0^{+\infty} Z(f) \overline{X_{r,k}(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} \tilde{P}_Z^{(k)}(t, f) P_{X_{r,k}}^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad (4.65)$$

$$= C^2 \int_0^{+\infty} \tilde{P}_Z^{(k)}(t_X(f), f) f^{q-1} df. \quad (4.66)$$

Il s'en suit que le membre de gauche de l'équation ci-dessus s'identifie exactement avec la stratégie (4.24) si $Z(f) = R(f) f^{-(2r+1)} / \Gamma_n(f)$ et $X(f; \theta_0) = X_{r,k}(f)$. En conséquence, le membre de droite de la même équation nous donne une formulation temps-fréquence alternative pour le problème de détection de chirps en loi de puissance et, en utilisant les résultats établis en proposition 4 (filtrage), cela nous conduit finalement au résultat énoncé, avec $\theta = \theta_0$, i.e., $t = t_0$ et $c = c_0$. Dans le cas réel où le vecteur de paramètres θ_0 est inconnu, la même stratégie doit être utilisée en remplaçant θ_0 par un ensemble de valeurs tests $\theta = (t, c)$. La détection est alors effective quand

$$\max_{(t,c)} \Lambda^w(r; t, c) > \eta, \quad (4.67)$$

où η est un seuil prescrit, tandis que l'estimation de θ_0 peut être conduite avec

$$\hat{\theta}_0 = (\hat{t}_0, \hat{c}_0) = \arg \max_{(t,c)} \Lambda^w(r; t, c). \quad (4.68)$$

Selon ce résultat, les chirps en loi de puissance noyés dans un bruit gaussien peuvent être détectés de manière optimale *via* une stratégie d'intégration de chemin dans le plan temps-fréquence. Leur paramètre peuvent être estimés par une transformée de Radon ou Hough généralisée, appliquée à une distribution bien définie. Une application potentielle de ce résultat va maintenant être discutée.

4.6 L'exemple des ondes gravitationnelles

Alors que l'existence des ondes gravitationnelles a été prédite par la théorie de la relativité générale depuis longtemps, aucune preuve expérimentale n'a été obtenue jusqu'ici. À vrai dire, détecter les ondes gravitationnelles sur terre relève du défi à cause des minuscules effets qu'elles induisent sur les systèmes physiques. Cela n'est seulement que depuis un passé très récent que des projets aux limites des technologies actuelles, ont été lancés. Pour les projets VIRGO et LIGO — les deux plus importants projets, qui sont toujours en construction —, le détecteur prend la forme d'un interféromètre géant, destiné à convertir le passage d'une onde gravitationnelle en un mouvement détectable de franges d'interférences. Parce que les ondes gravitationnelles sont si faibles, bien que chaque bras des interféromètres mesurent plus de 3 km de long, leur détection est soumise à l'obtention d'une sensibilité de l'ordre de 10^{-22} . Étant données les limitations dues au bruit, ceci devrait être pourtant possible dans une “fenêtre” fréquentielle comprise entre quelques dizaines et quelques centaines de Hertz.

En ce qui concerne la détection (du point de vue du traitement du signal), la question clé est de d'obtenir des informations *a priori* sur les structures possibles des formes d'ondes attendues. En fait, une grande variété de situations peut être considérée [90], chacune correspondant à un type de signal, plus ou moins bien caractérisé. Il est néanmoins à peu près universellement accepté que la source la plus prometteuse en termes de détection d'ondes gravitationnelles est celle produite par la coalescence d'un système binaire massif, la seule situation que nous considérerons ici.

4.6.1 Un modèle pour la coalescence de binaires

Une “binaire coalescente” est un système de deux objets astrophysiques très massifs (e.g., des étoiles à neutrons, ou des trous noirs), en rotation l'un autour de l'autre. Au cours de ce processus de rotation, de l'énergie est rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles. La conséquence en est que les deux objets deviennent de plus en plus proches, ce qui accélère leur rotation, jusqu'à la coalescence. Ceci montre intuitivement que les binaires coalescentes devrait donner naissance à des ondes gravitationnelles qui se comportent comme des chirps.

En première approximation (newtonienne), une forme explicite peut être donnée à la forme d'onde espérée. À un terme de phase près, elle peut être exprimée comme la partie réelle du signal à valeurs complexes [93, 88]

$$x(t; t_0, d) = A (t_0 - t)^{-\alpha} e^{-i2\pi d(t_0 - t)^\beta} U(t_0 - t), \quad (4.69)$$

où $\alpha = 1/4$ et $\beta = 5/8$. Dans cette expression, t_0 est le temps de coalescence, et d et A sont des constantes qui dépendent principalement des masses individuelles des objets et, bien sur, d'autres quantités géométriques comme la distance de la binaire à la terre ou bien l'orientation relative des fronts d'ondes et du détecteur. Plus précisément, étant donnés deux objets de masse individuelles m_1 et m_2 , on peut introduire la “masse totale” $M = m_1 + m_2$ et la “masse réduite” μ telle que $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$. En utilisant ces deux quantités, on peut définir [93] la “chirp mass” $\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$ et selon [88], on obtient

$$d = 160 \times 3^{3/8} \mathcal{M}_\odot^{-5/8} \approx 241 \mathcal{M}_\odot^{-5/8}, \quad (4.70)$$

avec $\mathcal{M}_\odot = \mathcal{M}/M_\odot$ et où M_\odot désigne la masse solaire. Pour une orientation relative optimale entre le détecteur et la binaire, nous avons qui plus est [78]

$$A = \left(\frac{4}{3^{3/4}} \right) 1.92 \times 10^{-21} \frac{\mathcal{M}_\odot^{5/4}}{r} \approx 3.37 \times 10^{-21} \frac{\mathcal{M}_\odot^{5/4}}{r}, \quad (4.71)$$

où r est la distance terre-binaire, exprimée en Mpc.

Selon la Définition 1, la forme d'onde (4.69) peut alors être interprétée comme un chirp, si l'amplitude $a(t) = (t_0 - t)^{-\alpha}$ et la phase $\varphi(t) = 2\pi d(t_0 - t)^\beta$ sont telles que

$$\left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)\dot{\varphi}(t)} \right| = \frac{\alpha}{2\pi d\beta} (t_0 - t)^{-\beta} \ll 1 \quad (4.72)$$

et

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} \right| = \frac{|\beta - 1|}{2\pi d\beta} (t_0 - t)^{-\beta} \ll 1. \quad (4.73)$$

Comme précisé dans [36], ces deux conditions mènent en fait à une seule condition selon laquelle le modèle (4.69) peut être interprété en tant que chirp sur un intervalle de temps caractérisé par

$$t_0 - t \gg t_c = \left(\frac{\max\{\alpha, |\beta - 1|\}}{2\pi d\beta} \right)^{1/\beta}. \quad (4.74)$$

Dans le cas spécifique des ondes gravitationnelles, cela conduit, à partir des valeurs des différentes constantes dont nous disposons, à

$$t_c = 3 \times (1600 \pi)^{-8/5} \mathcal{M}_\odot \approx 3.6 \times 10^{-6} \mathcal{M}_\odot. \quad (4.75)$$

En supposant que l'interprétation en tant que chirp est valide, la forme d'onde (4.69) a (approximativement) pour fréquence instantanée

$$f_x(t) = \frac{5d}{8} (t_0 - t)^{-3/8} \quad (4.76)$$

et la condition (4.74) définit alors un intervalle de fréquence caractérisé par

$$f \ll f_c = f_x(t_c) = 100 \times (1600 \pi)^{3/5} \mathcal{M}_\odot^{-1} \approx 1.66 \times 10^4 \mathcal{M}_\odot^{-1}. \quad (4.77)$$

La Figure 4.1 illustre la validité de cette condition quand m_1 varie entre $1M_\odot$ et $20M_\odot$, et quand $m_2 = k m_1$, avec $1 \leq k \leq 10$. On déduit de ce diagramme que, dans le cas où la fréquence de coupure haute du détecteur est approximativement de 500Hz, l'interprétation en tant que chirp peut être considérée comme valide pour une grande plage de scénarii qu'il est vraisemblable d'observer.

En considérant (4.69) comme un chirp, son spectre peut être obtenu par une approximation de phase stationnaire, qui conduit au résultat suivant :

Proposition 9. *Dans le domaine où elle peut être considérée comme un chirp, la forme d'onde (4.69) correspond approximativement à un **chirp en loi de puissance** au sens de la Définition 6, avec une enveloppe d'indice $r = (\alpha - \beta/2)/(\beta - 1)$, une phase d'indice $k = \beta/(\beta - 1)$, un décalage de phase $\gamma = \pi/4$, un taux de modulation*

$$c = -\frac{\beta - 1}{\beta} (d\beta)^{-1/(\beta-1)} \quad (4.78)$$

et une amplitude

$$C = \frac{A}{\sqrt{|\beta - 1|}} (d\beta)^{(\alpha-1/2)/(\beta-1)}. \quad (4.79)$$

L'erreur relative de cette approximation dépend de la fréquence et est bornée par

$$Q(f) = \frac{5}{4} \left(\frac{\alpha^2}{\beta - 1} + \alpha + \frac{(\beta - 2)(\beta - 1/2)}{6} \right) (d\beta)^{1/(\beta-1)} f^{-\beta/(\beta-1)}. \quad (4.80)$$

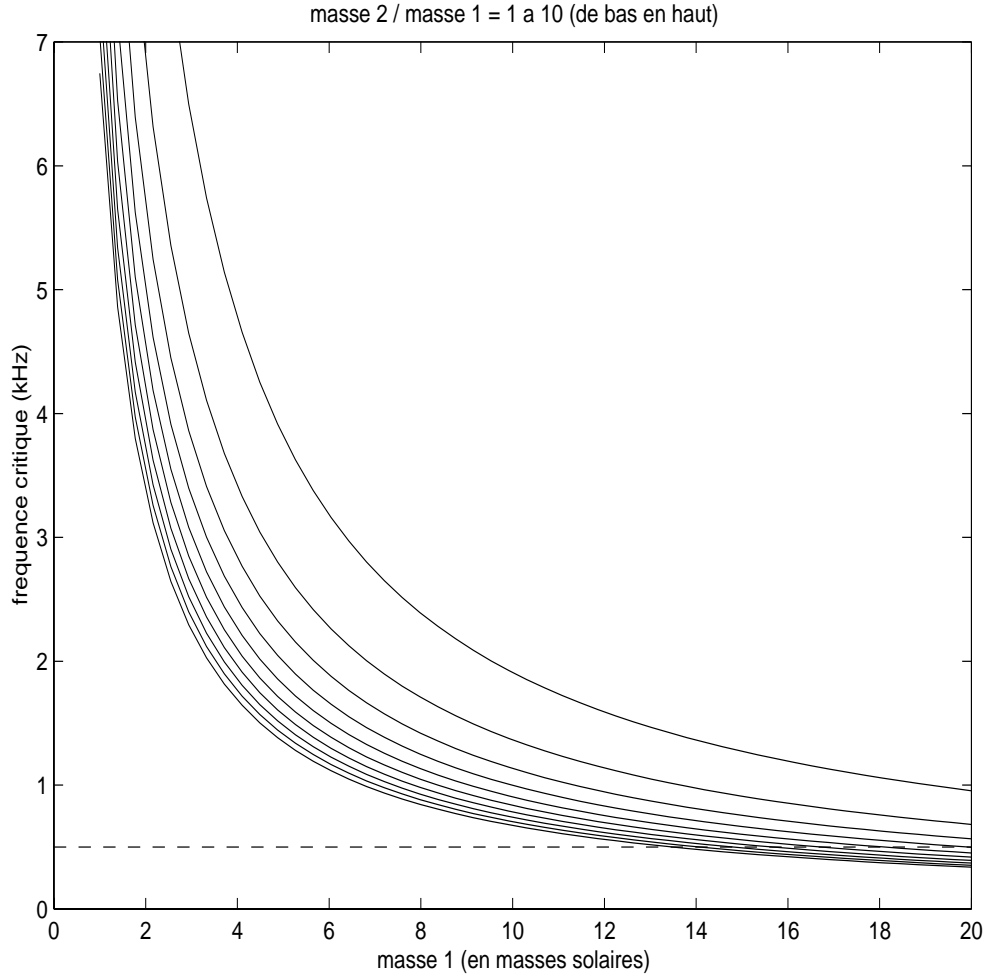


FIG. 4.1 – **Mesure quantitative de la validité de l'interprétation en tant que chirp des ondes gravitationnelles.** Les ondes gravitationnelles émises par une binaire coalescente peuvent être considérées comme des chirps tant que leur fréquence maximale est plus petite que la fréquence critique qui dépend des masses m_1 et m_2 de la binaire. Ce diagramme montre (en lignes continues) la fréquence critique quand m_1 varie entre $1M_\odot$ et $10M_\odot$, et quand $m_2 = k m_1$, avec $1 \leq k \leq 10$. La ligne pointillée (placée arbitrairement à 500Hz) désigne la fréquence de coupure haute du détecteur, ce qui permet d'avoir une borne approchée pour la validité de l'approximation.

Preuve. Le calcul du spectre de Fourier de (4.69) revient à évaluer l'intégrale

$$X(f; t_0, d) = e^{-i2\pi f t_0} \int_0^{+\infty} a(t) e^{i\psi(t)} dt, \quad (4.81)$$

avec $a(t) = A t^{-\alpha}$ et $\psi(t) = -2\pi(dt^\beta - ft)$.

Il est clair que $\psi(t)$ n'a pas de point stationnaire quand $f < 0$ et avec le résultat donné en Annexe D, on peut d'abord conclure que (4.69) est presque analytique, tant que la condition (4.74) est satisfaite.

Pour les fréquences positives, $\psi(t)$ a un et un seul point stationnaire non dégénéré, nommé

$$t_s = \left(\frac{f}{d}\right)^{1/(\beta-1)}, \quad (4.82)$$

avec la condition $\ddot{\psi}(t_s) > 0$.

Quand on applique spécifiquement le résultat général (D.6) au modèle (4.69), il vient que (4.81) coïncide exactement avec un chirp en loi de puissance dans le sens de la Définition 6, avec les constantes données en (4.78) et (4.79). Pour chaque fréquence, l'évaluation de phase stationnaire du spectre revient à considérer la contribution du signal au point $t = t_s$, et donc le reste (D.8) en ce point. Après avoir retiré minutieusement chaque indétermination lors du calcul de $Q(t_s)$, on obtient finalement le résultat donné en (4.80), qui permet de borner le domaine en fréquence sur lequel l'approximation de phase stationnaire peut être considérée comme valide, étant donnée une erreur relative maximale.

Deux remarques peuvent être faites à ce point. Premièrement, alors que les “conditions de chirp” de la Définition 1 sont couramment présentées comme validant l'approximation de phase stationnaire (voir, e.g., [36, 88] ou [33]), la validité de l'approximation de phase stationnaire est en fait contrôlée par (D.8), ce qui est finalement plus compliqué. Deuxièmement, si on applique le précédent résultat (4.80) au cas des ondes gravitationnelles, on obtient que, pour une erreur relative d'approximation au plus égale à x pourcents, la fréquence doit être bornée par

$$f \leq 7.18 \times 10^4 x^{3/5} \mathcal{M}_{\odot}^{-1}, \quad (4.83)$$

ce qui est en accord avec les conditions (de chirp) qualitatives en (4.77). Les critères exact et heuristique sont donc de même nature, mais les résultats de la Proposition 9 autorisent un contrôle quantitatif de l'approximation.

La Fig. 4.2, qui présente un exemple typique d'une forme d'onde, illustre l'efficacité de l'approximation de phase stationnaire.

4.6.2 Un détecteur temps-fréquence simplifié

À strictement parler, le détecteur temps-fréquence optimal (4.62) nécessite le calcul d'une version filtrée (en temps) de la distribution de Bertrand de l'observation. Ceci implique malheureusement un gros coût de calcul. Pour aboutir à une solution pratiquement exploitable, il est obligatoire de considérer une description temps-fréquence plus simple, mais toujours précise à la place de la fonction exacte $\rho_R(t, f)$ donnée en (4.63). Alors qu'une simplification ne semble pas possible dans le cas général, il apparaît qu'elle peut être effectuée dans le cas spécifique des ondes gravitationnelles, grâce aux valeurs des paramètres physiques qui sont impliqués.

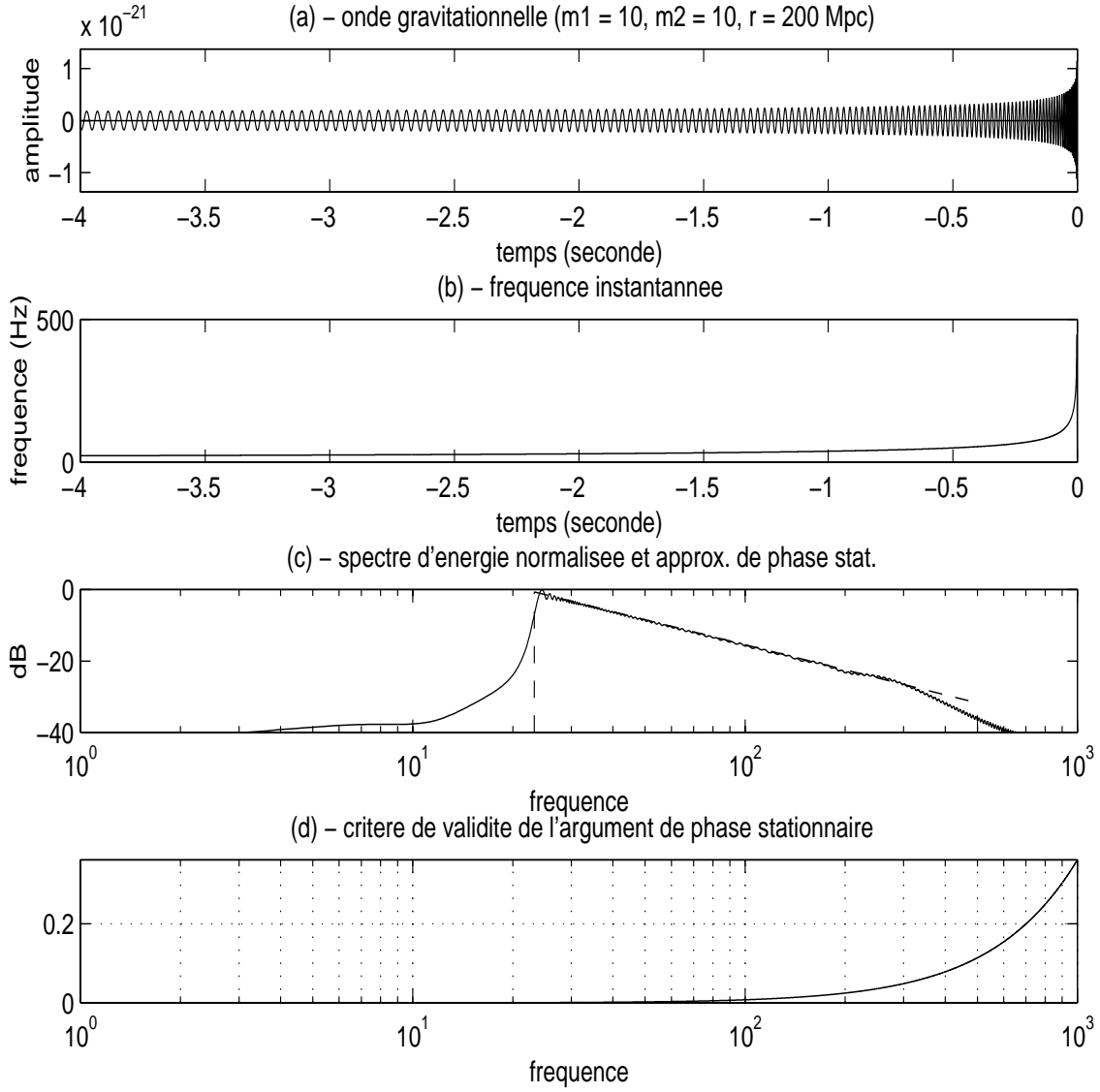


FIG. 4.2 – **Approximation de phase stationnaire du spectre d'une onde gravitationnelle.** Le signal que l'on espère être émis par une binaire coalescente composée de deux objets de $1 M_\odot$ et $10 M_\odot$ à une distance de 200 Mpc, est montré en (a), avec la fréquence instantanée correspondante en (b). La densité spectrale d'énergie est donnée en (c) (ligne pleine), accompagnée de son approximation de phase stationnaire (ligne pointillée). La validité de cette approximation est contrôlée par l'erreur relative (qui dépend de la fréquence) en (d).

En effet, si nous revenons à (4.63), nous pouvons écrire d'une façon équivalente,

$$\int \rho_R(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt = C^2 f^{2r+1-q} h(u) \int P_R^{(k)}(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt \quad (4.84)$$

avec

$$h(u) = \frac{(\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{r+1}}{\dot{\zeta}_k(u)} A(f\lambda_k(u)) A(f\lambda_k(-u)) \quad (4.85)$$

et

$$u = \zeta_k^{-1} \left(\frac{\xi}{f} \right). \quad (4.86)$$

À cause des limitations aux basses fréquences (bruit sismique) et aux hautes fréquences (bruit de photons), la largeur effective d'observation est nécessairement restreinte à un intervalle en fréquence passe-bande $f_- \leq f \leq f_+$ (avec comme valeurs typiques, que l'on pourrait raisonnablement choisir, $f_- \approx 50\text{Hz}$ et $f_+ \approx 500\text{Hz}$). Ceci a pour conséquence que le spectre de Fourier

$$\int P_R^{(k)}(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt = f^{2r+1-q} (\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{r+1} R(f\lambda_k(u)) \overline{R(f\lambda_k(-u))} \quad (4.87)$$

est non nul seulement dans la bande

$$|u| \leq u_+ = \log \frac{f_+}{f_-}, \quad (4.88)$$

ce qui montre que le facteur $h(u)$ de la transformée de Fourier de $P_R^{(k)}(t, f)$ peut être simplement ignoré dans (4.84) dans la mesure où il est presque égal à 1 pour $|u| \leq u_+$.

À l'intérieur de la bande de fréquence définie ci-dessus, on peut considérer (voir, e.g., [55, 56]) que la densité spectrale de puissance $\Gamma_n(f)$ du bruit d'observation $n(t)$ varie, en moyenne, continuellement et se comporte¹ en $\Gamma_n(f) = \sigma^2 f^{-\epsilon}$, avec $\epsilon \approx 1$. En supposant donc que

$$A(f) = \sigma^{-2} f^{\epsilon-(3r+2)} \quad (4.89)$$

pour $f_- \leq f \leq f_+$, nous obtenons de (4.85) que

$$h(u) = \sigma^{-4} \frac{(\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{\epsilon-(2r+1)}}{\dot{\zeta}_k(u)} \quad (4.90)$$

pour $|u| \leq u_+$. Dans le cas des binaires coalescentes ($k = -5/3$, $r = 1/6$) et d'un bruit en "1/f" ($\epsilon = 1$), cela se réduit alors à

$$\sigma^4 h(u) = \frac{(\lambda_{-5/3}(u)\lambda_{-5/3}(-u))^{-1/3}}{\dot{\zeta}_{-5/3}(u)}, \quad (4.91)$$

une quantité qui, dans l'espace considéré des fonctions définies sur un intervalle limité en u , peut être considérée comme l'élément neutre de la convolution, comme illustré en Fig. 4.3.

1. Notons que ceci n'est qu'une première approximation et que, dans le cas des détecteurs réels, des raffinements doivent être faits sur la base de modèles plus réalistes.

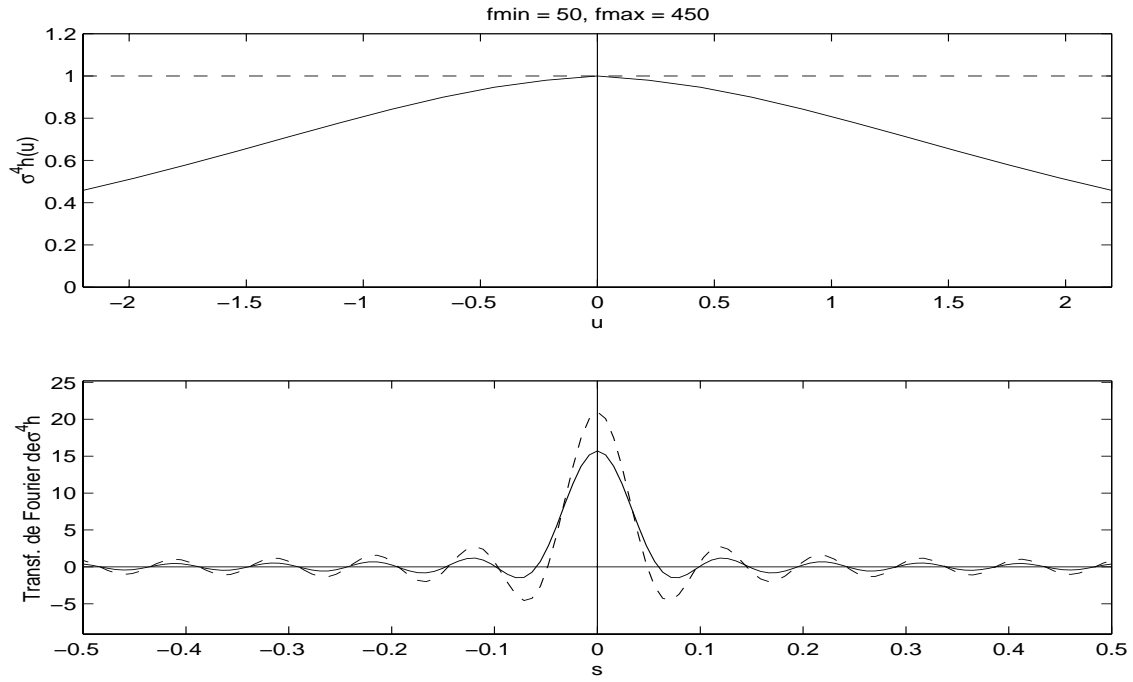


FIG. 4.3 – Quand la bande passante du détecteur est limitée, la fonction temps-fréquence à utiliser, peut être bien approchée par une distribution de Bertrand à condition que la fonction $\sigma^4 h(u)$, définie en (4.91), agisse comme l'élément neutre de la convolution dans l'espace de fonction à support borné en u . La validité de cette approximation est illustrée ici en montrant dans le diagramme du haut $\sigma^4 h(u)$ (ligne pleine) et la fonction indicatrice de l'intervalle en u associée à la bande de fréquence 50Hz – 450Hz (ligne pointillée), et en comparant dans le diagramme du bas leur transformées de Fourier.

Quand l'approximation ci-dessus est valide, cela conduit alors à un détecteur semblable à (4.62), mais avec la simplification

$$\rho_R(t, f) \approx \frac{C^2}{\sigma^4} f^{q+2\epsilon-(4r+3)} P_R^{(k)}(t, f). \quad (4.92)$$

En partant de cette structure simplifiée, le problème final est de trouver une approximation précise et facile à mettre en œuvre de la distribution de Bertrand $P_R^{(k)}(t, f)$. Puisque la caractéristique-clé de cette distribution est sa localisation parfaite (4.41) sur les chirps “adaptés”, la solution que nous proposons est de la remplacer par un *spectrogramme réalloué* [5, 9] $\check{S}_x^h(t, f)$ qui, lorsqu'il est appliqué au même chirp en loi de puissance, se comporte approximativement en

$$\check{S}_{x_{r,k}}^h(t, f) \approx C^2 f^{-2(r+1)} \delta(t - t_X(f)). \quad (4.93)$$

L'efficacité de cette approximation est illustrée en Fig. 4.4.

En comparant (4.41) et (4.93), nous sommes conduits à choisir $q = 2r + 1$, ce qui donne la forme finale du détecteur optimal approché :

$$\Lambda^w(r; t, c) \approx \frac{C^2}{\sigma^4} \int_0^{+\infty} \check{S}_r^h(t + ck f^{k-1}, f) f^{2(\epsilon-(r+1))} df. \quad (4.94)$$

Dans le cas spécifique des binaires coalescentes, nous préférons paramétrer le signal à détecter à l'aide de son temps de coalescence t et de sa “chirp mass” réduite \mathcal{M}_\odot . Avec les constantes correctes, nous obtenons finalement (à un facteur d'amplitude près)

$$\Lambda^w(r; t, \mathcal{M}_\odot) \propto \int_{\mathcal{L}(t, \mathcal{M}_\odot)} \check{S}_r^h(\tau, f) f^{-2/3}, \quad (4.95)$$

avec

$$\mathcal{L}(t, \mathcal{M}_\odot) = \left\{ (\tau, f) \mid t - \tau = 3 \times 100^{8/3} \mathcal{M}_\odot^{-5/3} f^{-8/3} \right\}. \quad (4.96)$$

4.6.3 Une illustration

Pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée, nous présentons en Fig. 4.5 deux exemples différents basés sur une des situations typiques discutées dans [55, 56]. Dans ces deux exemples, on suppose que la binaire est constituée de deux objets de $1M_\odot$ et $10M_\odot$ (temps de coalescence fixé à $t = 0$). Dans le premier exemple, la binaire est localisée à une distance de 200 Mpc de la terre, et 1 Gpc dans le deuxième exemple. La simulation a été faite en altérant les données par un bruit additif gaussien, avec $\epsilon = 1$ et $\sigma^2 = 0.7 \times 10^{-42} / \text{Hz}$ sur une plage de fréquence de 50 Hz – 500 Hz. La stratégie proposée, basée sur le spectrogramme réalloué, n'atteint pas la performance idéale prédite par la théorie du filtre adapté, à cause de la précision limitée des différentes approximations impliquées pour son obtention (en particulier, la nature à bande limitée du signal implique que la distribution de Bertrand ne peut être localisée le long de la ligne de retard de groupe). Cependant, cette figure met en évidence que cette stratégie permet clairement la détection du chirp et qu'elle présente des performances qui dépassent celles d'une simple intégration de chemin faite sur le spectrogramme standard.

Dans l'exemple de la Fig. 4.5, la chirp mass \mathcal{M}_\odot a été implicitement supposée connue, ce qui n'est en aucun cas vrai en pratique. Si l'on suppose que \mathcal{M}_\odot est inconnue, une stratégie plus sophistiquée consiste alors à appliquer la précédente en parallèle en évaluant autant d'intégrales de chemin que nécessaire pour échantillonner convenablement les valeurs de \mathcal{M}_\odot sur un intervalle raisonnable de

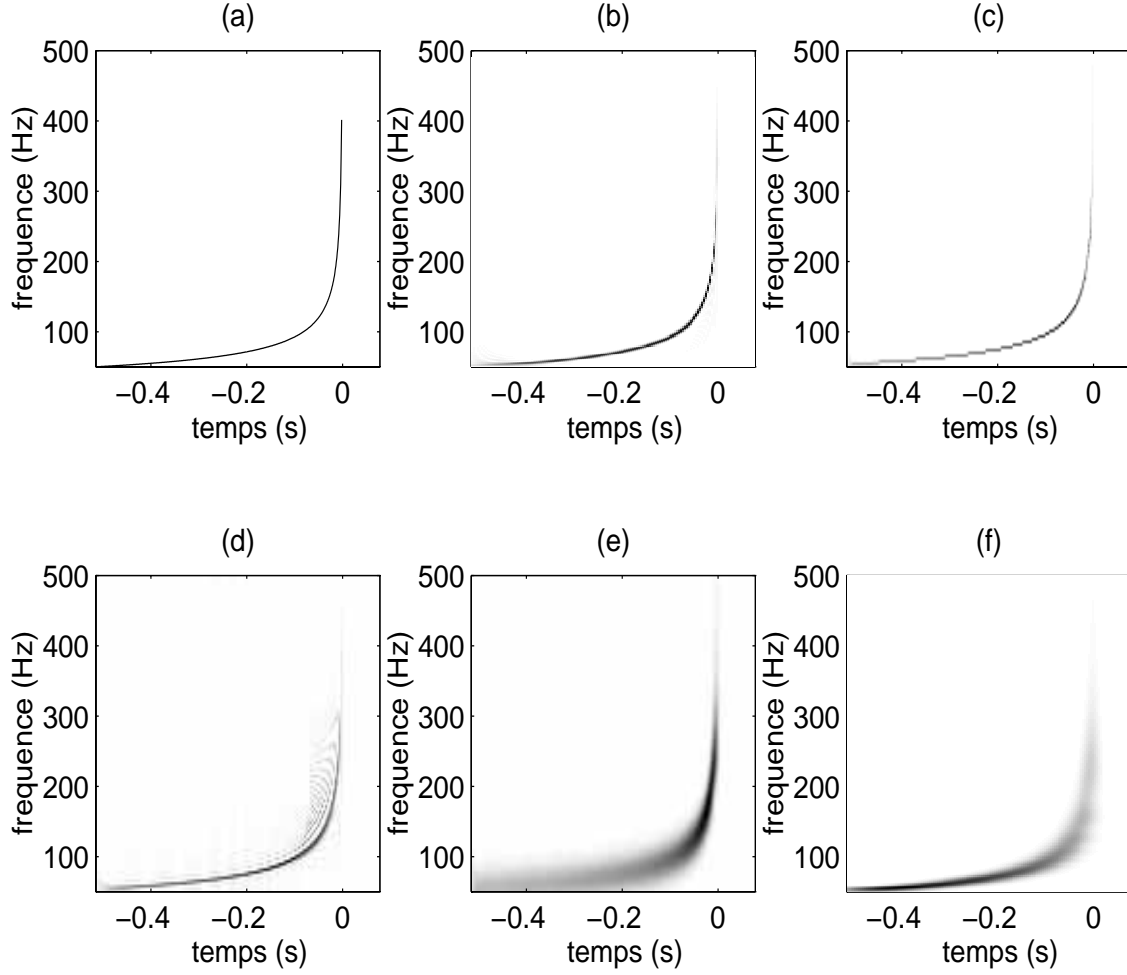


FIG. 4.4 – **Distributions temps-fréquence pour les ondes gravitationnelles.** Étant donnée une onde gravitationnelle émise par une binaire coalescente (temps de coalescence fixé à $t_0 = 0$), on attend d’une distribution temps-fréquence “adaptée” qu’elle soit aussi localisée que possible sur la ligne de fréquence instantanée. Cette figure compare la représentation “idéale” (a) avec certaines distributions candidates. Du point de vue théorique, il est connu que la distribution que l’on désire, est obtenue en utilisant la distribution de Bertrand adaptée ($k = -5/3$): ceci est illustrée en (b), où l’algorithme décrit dans [48] a été utilisé. Une bonne approximation, simple à mettre en œuvre, est donnée par le spectrogramme réalloué (c). Ces deux situations contrastent avec celles obtenues par la distribution de Wigner-Ville (d), le spectrogramme (e) et le scalogramme (f).

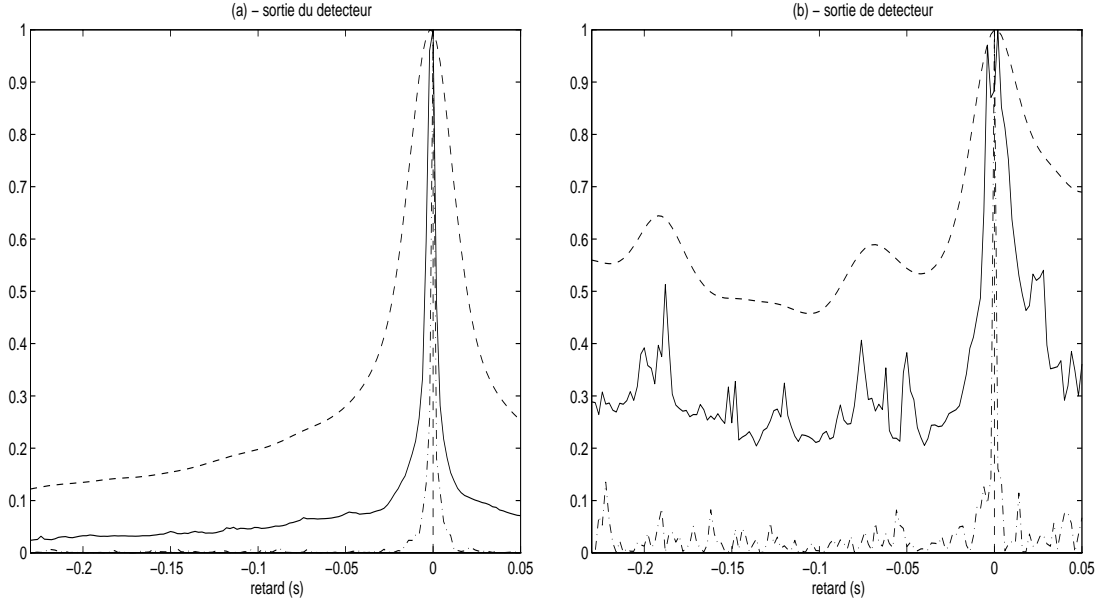


FIG. 4.5 – **Détection d'une onde gravitationnelle.** Cette figure illustre l'efficacité d'une détection temps-fréquence optimale d'une onde gravitationnelle issue d'une binaire (temps de coalescence $t = 0$) composée de deux objets de $1M_{\odot}$ et $10M_{\odot}$ à une distance de 200 Mpc dans le cas (a) et 1 Gpc dans le cas (b). Puisque la distance entre la binaire et la terre change simplement l'amplitude du signal, le rapport signal sur bruit est le seul paramètre qui est modifié entre ces deux exemples. Chaque graphique compare le module carré de l'enveloppe du signal en sortie du filtre adapté (trait mixte) avec une stratégie temps-fréquence basée sur une intégration de chemin sur le spectrogramme classique (trait pointillé) et sa version réallouée (trait plein). Pour faire apparaître clairement ce qui est gagné en terme de contraste, le maximum de chacune de ces courbes a été arbitrairement normalisé à l'unité.

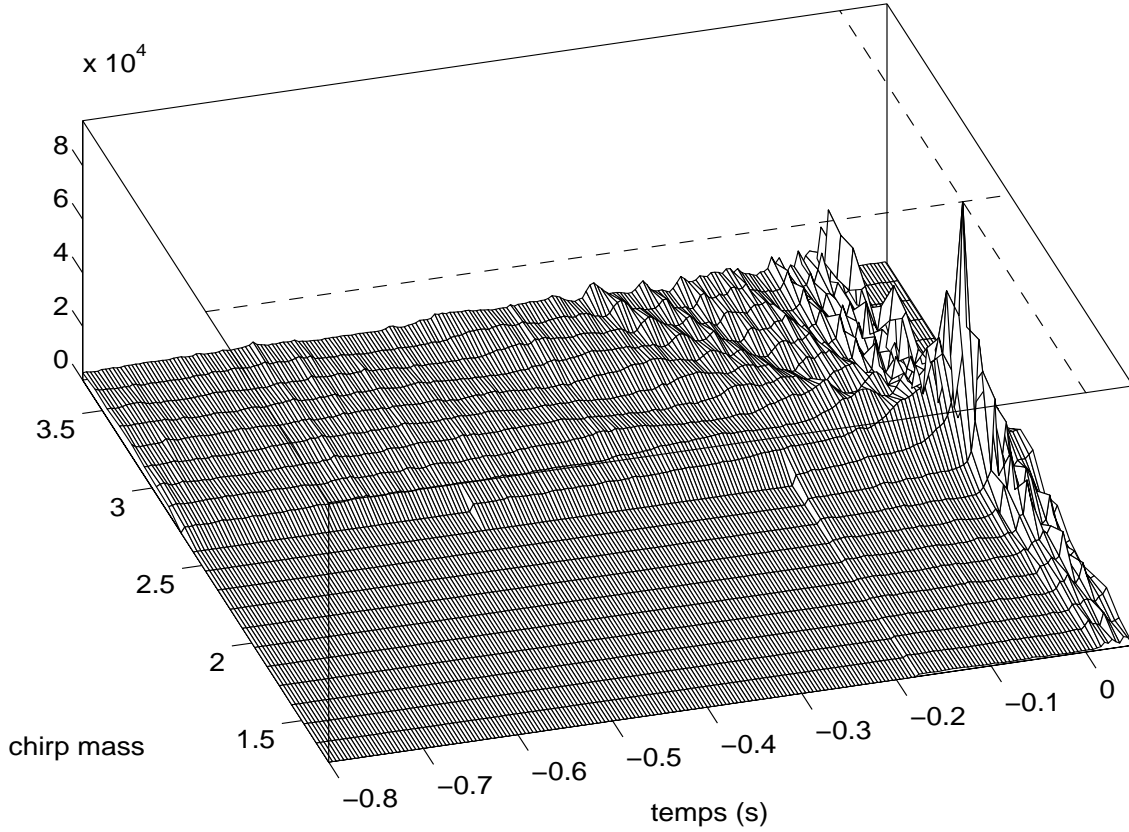


FIG. 4.6 – **Détection-estimation conjointe d'une onde gravitationnelle à partir du spectrogramme réalloué.** Dans le cas où le paramètre de chirp mass \mathcal{M}_\odot est inconnu, différentes intégrations de chemin (similaires à celle faites en Fig. 4.5, mais sur un certain nombre de courbes temps-fréquence) doivent être évaluées, ici sur le spectrogramme réalloué. Ceci résulte en une surface dont le maximum permet la détection de l'onde gravitationnelle (quand il dépasse un seuil prescrit) et l'estimation à la fois du temps de coalescence et de la chirp mass (les valeurs réelles sont indiquées par des lignes pointillées).

valeurs. Les Figs. 4.6 et 4.7 montrent l'application de cette stratégie pour le spectrogramme réalloué et le spectrogramme standard, respectivement. Ce problème de détection-estimation conjointe permet donc également une estimation de \mathcal{M}_\odot . Il doit être noté que, lorsque l'on parcourt les valeurs test de \mathcal{M}_\odot , l'énergie du signal de référence est modifiée. La sortie de chaque détecteur doit donc être divisée par un facteur proportionnel au module carré de l'amplitude du signal de référence (qui varie en $\mathcal{M}_\odot^{5/3}$) pour pouvoir comparer des résultats cohérents.

4.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de combiner des éléments empruntés à la théorie de la détection optimale et à l'analyse temps-fréquence pour traiter le problème de la détection temps-fréquence optimale de chirps. Nous en avons extrait un cadre cohérent dans lequel nous montrons que les stratégies intuitives de détection de chirps par des intégrations le long de chemin dans le plan temps-fréquence revêtent la propriété d'optimalité sous plusieurs conditions, la plus importante d'entre elles étant l'uti-

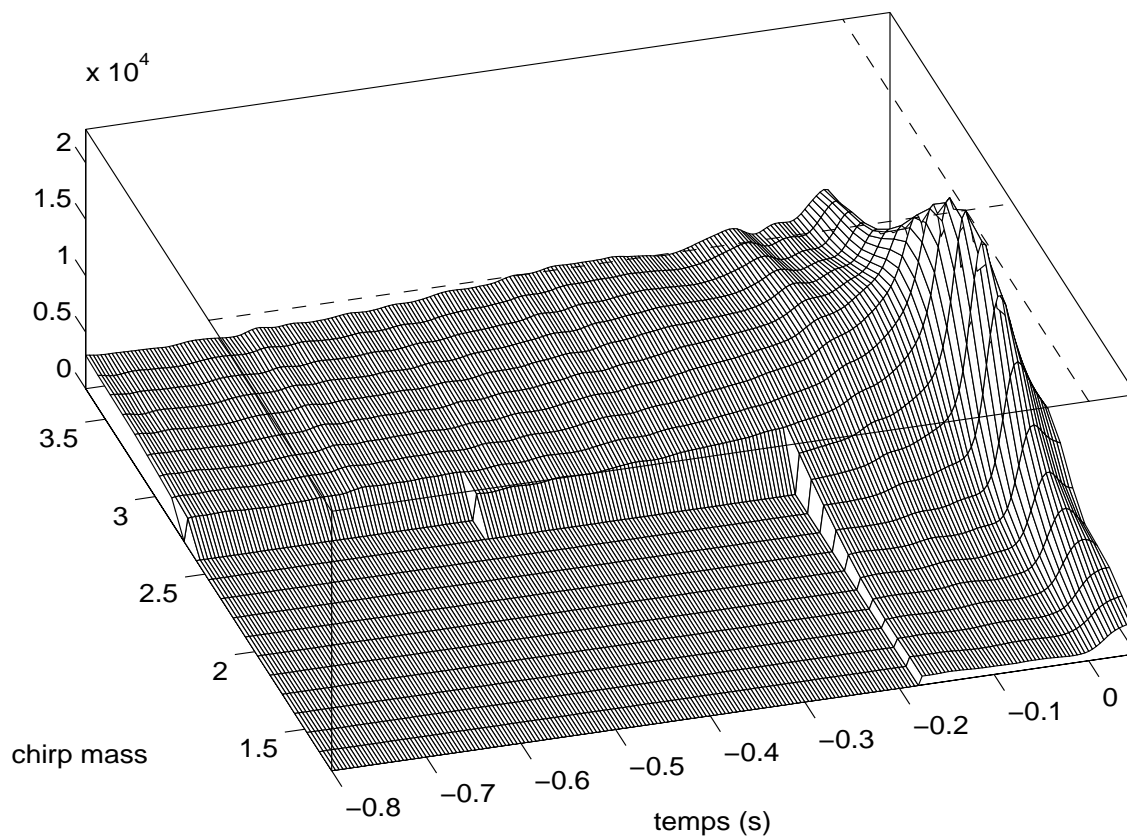


FIG. 4.7 – *Détection-estimation conjointe d'une onde gravitationnelle à partir du spectrogramme.* La surface montrée ici est la réponse du détecteur(-estimateur) basé des intégrations de chemin sur le spectrogramme standard. Celle-ci doit être comparée avec celle de la Fig. 4.6. Le manque d'acuité du pic de détection et le mauvais contraste entre son maximum et le niveau du bruit font que la procédure de détection est plus difficile à réaliser. Les lignes pointillées indiquent les valeurs vraies du temps de coalescence et de la chirp mass.

lisation d'une distribution temps-fréquence *unitaire* et à la *localisation parfaite* sur la loi de fréquence instantanée (ou de retard de groupe) du signal à détecter. Cette distribution est généralement difficile à calculer numériquement. Nous suggérons la remplacer par une *approximation* à l'aide d'une distribution réallouée simple à mettre en œuvre (comme le spectrogramme ou le scalogramme). On dispose alors d'un moyen systématique et simple pour obtenir des stratégies de détection *quasi-optimale* de chirp. À ce titre, l'exemple des ondes gravitationnelles (que l'on pense émises par les binaires coalescentes) est un cas d'importance particulière, et la possibilité de leur détection temps-fréquence a été discutée avec une certaine attention. Les conditions pour qu'une stratégie quasi-optimale de détection ont été établies. Cela met donc une nouvelle fois en évidence, dans un exemple précis, que la méthode de réallocation peut prendre part à une chaîne de traitement du signal dans un but différent de celui de l'analyse. La question est maintenant de discuter plus avant ce qui peut être réellement gagné par une telle approche en termes de flexibilité et de robustesse.

Conclusion

Pour conclure, nous ferons un bilan de ce qu’offre la méthode de réallocation comme potentialités pour l’analyse du signal et pour sa manipulation. Nous axerons ce bilan en deux points :

- *Analyse temps-fréquence du signal et distributions réallouées*

La méthode de réallocation permet d’obtenir une description temps-fréquence pouvant raisonnablement être comprise par des personnes ne disposant pas de connaissances profondes du contexte de l’analyse temps-fréquence. Les situations typiques pour lesquelles les distributions réallouées donnent de bons résultats en terme de lisibilité de la représentation, sont celles où le rapport signal sur bruit (RSB) est favorable et où le signal est une modulation en fréquence i.e., dont la densité d’énergie temps-fréquence est essentiellement concentrée autour d’une courbe dans le plan temps-fréquence. La description donnée est alors fortement contrastée. Son interprétation n’est pas compliquée par les termes interférentiels qui apparaissent classiquement dans les représentations de la classe de Cohen ou de la classe affine.

La présence de bruit atténue le contraste de la description offerte par les distributions réallouées. Pour remédier à ce problème, nous avons proposé une supervision de la réallocation, dont l’objectif principal est de donner simultanément une bonne représentation du signal et du bruit. La supervision présente un intérêt jusqu’à des RSB de 0 dB environ, ordre de grandeur que nous avons pu évaluer sur quelques exemples.

Les distributions réallouées sont également utiles pour des problèmes de détection. Nous avons montré que, pour le problème spécifique de la détection temps-fréquence de chirp, elles pouvaient être à la base de schéma de détection temps-fréquence quasi-optimaux. La mise en œuvre de ces stratégies de détection est plus simple et rapide que celle des stratégies optimales. En effet, la plupart des distributions réallouées peuvent être évaluées à l’aide d’algorithmes efficaces (nous les avons présentés dans le cas du spectrogramme et du scalogramme), avec des temps de calcul acceptables sur des ordinateurs aux performances standards (d’aujourd’hui). On ne peut cependant pas parler d’algorithmes rapides. Il ne serait pas raisonnable d’intégrer les distributions réallouées dans un traitement où le coût de calcul est un aspect crucial, comme c’est le cas, par exemple, pour la détection “en ligne” des ondes gravitationnelles.

- *Caractérisation du signal et carte temps-fréquence*

Nous avons montré que la méthode de réallocation peut conduire à des formes de description du signal différentes de celle donnée par une distribution d’énergie temps-fréquence. Plus précisément, en utilisant de l’information déduite du champ des vecteurs de réallocation, on peut dessiner une carte qui découpe le plan temps-fréquence en régions, chacune associée à une composante du signal. Autrement dit, cela revient à décomposer le signal en composantes modulées en fréquence et/ou amplitude. La carte temps-fréquence peut alors servir de point de départ à de nombreuses applications comme la classification, le débruitage, . . . Nous en avons donné quelques illustrations.

Il est important de signaler deux limitations de cette approche :

- la partition du plan temps-fréquence est sensible au bruit. Nous avons proposé plusieurs algorithmes de fusion de partition pour diminuer cette sensibilité, mais il faudrait en faire une évaluation plus complète.
- la réallocation différentielle, et les post-traitements (classification ascendante hiérarchique, en particulier) nécessaires à l’obtention de la carte temps-fréquence, sont des algorithmes lourds en temps de calcul ce qui limite fortement la taille des signaux acceptables.

● *Perspectives*

Ce travail ouvre des voies de recherches à explorer et laisse quelques questions sans réponse. Parmi elles, en voici quatre que nous estimons importantes :

- les calculs faits au chapitre 2 concernant les densités de probabilités des opérateurs de réallocation n’ont de réelle utilité que s’ils sont exploités pour permettre, par exemple, l’obtention de traitements optimaux au sens d’un certain critère statistique.
- En ce qui concerne la supervision, plusieurs questions restent en suspens, en particulier quel est le bon choix à faire pour la famille de fenêtre à utiliser, et pour le moyen de combiner l’information provenant de spectrogrammes et de champs de vecteurs de réallocation basés sur des fenêtres différentes.
- nous avons déjà mentionné plus haut que les algorithmes de fusion méritent une évaluation plus approfondie. Ajoutons encore qu’il serait intéressant de concrétiser l’idée de la régularisation du champ de vecteurs de réallocation pour la stabilisation de la partition temps-fréquence.
- L’avantage principal de la formulation temps-fréquence du problème de détection de chirp est qu’elle permet à partir du détecteur quasi-optimal, d’ajuster, très intuitivement et de manière très flexible, le compromis entre efficacité (nombre de fausses alarmes, largeur du pic de détection) et robustesse (au bruit ou à l’égard d’un écart du signal au modèle de référence) de la détection. Il reste à montrer que cela peut effectivement se mettre en pratique dans des cas concrets (celui de la détection des ondes gravitationnelles par exemple).

Annexes

A Simplifications des opérateurs de réallocation du spectrogramme

Cette annexe réunit tous les calculs nécessaires pour la simplification des définitions (1.5) et (1.6) des opérateurs de réallocation du spectrogramme en temps et en fréquence respectivement que nous rappelons maintenant :

$$\hat{I}_x^h(t, \omega) = \frac{1}{S_x^h(t, \omega)} \iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \frac{1}{S_x^h(t, \omega)} \iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (\text{A.2})$$

Ces simplifications sont utilisées en Sect. 1.2 pour diverses interprétations.

A.1 Opérateur de réallocation en temps

Il s'agit remplacer dans le numérateur de l'éq. (A.1)

$$I_x^h = \iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (\text{A.3})$$

la distribution de Wigner-Ville du signal et de la fenêtre par sa définition

$$W_x(t, \omega) = \int x(t + s/2) x^*(t - s/2) e^{-is\omega} ds. \quad (\text{A.4})$$

On obtient alors une intégrale quadruple

$$I_x^h = \iiint \int s x(s + u/2) x^*(s - u/2) e^{-iu\xi} h(s - t + v/2) h^*(s - t - v/2) e^{-iv(\xi - \omega)} du dv \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (\text{A.5})$$

que l'on va simplifier en intégrant selon chacune des variables dans un ordre déterminé. On effectue d'abord la somme selon ξ

$$\int e^{-i(u+v)\xi} \frac{d\xi}{2\pi} = \delta(u + v) \quad (\text{A.6})$$

de laquelle résulte une distribution de Dirac que l'on fait agir sur le reste de la fonction par une intégration en v qui donne :

$$\int h(s - t + v/2) h^*(s - t - v/2) e^{iv\omega} \delta(u + v) dv = h(s - t - u/2) h^*(s - t + u/2) e^{-iu\omega}. \quad (\text{A.7})$$

Après un changement de variables $\{s_1 = s + u/2, s_2 = s - u/2\}$ de jacobien égal à 1

$$I_x^h = \iint \frac{s_1 + s_2}{2} x(s_1) x^*(s_2) h(s_1 - t) h^*(s_2 - t) e^{-i(s_1 - s_2)\omega} ds_1 ds_2, \quad (\text{A.8})$$

on reconnaît la FCT du signal que l'on isole, ce qui mène au résultat final

$$\iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \text{Re} \left\{ F_x^{h*}(t, \omega) \int s x(s) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Opérateur de réallocation en fréquence

On procède de la même manière pour l'opérateur de réallocation en fréquence, éq. (A.2), dont on met à part le numérateur

$$J_x^h = \iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (\text{A.10})$$

dans lequel on insère les expressions des distributions de Wigner-Ville du signal et de la fenêtre

$$J_x^h = \iiint \xi x(s + u/2) x^*(s - u/2) e^{-iu\xi} h(s - t + v/2) h^*(s - t - v/2) e^{-iv(\xi - \omega)} du dv \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (\text{A.11})$$

On intègre d'abord en fréquence

$$\int \xi e^{-i(u+v)\xi} \frac{d\xi}{2\pi} = i\delta'(u + v), \quad (\text{A.12})$$

ce qui nous donne cette fois-ci la dérivée de la distribution de Dirac dont l'action sur le reste de la fonction à intégrer conduit à

$$\begin{aligned} \int h(s - t + v/2) h^*(s - t - v/2) e^{-iv\omega} i\delta'(u + v) dv = \\ (-i) \left(h'(s - t - u/2) h^*(s - t + u/2) e^{-iu\omega} + h(s - t - u/2) h'^*(s - t + u/2) e^{-iu\omega} + \right. \\ \left. i\omega h(s - t - u/2) h^*(s - t + u/2) e^{-iu\omega} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

On effectue le même changement de variable qu'en section précédente $\{s_1 = s + u/2, s_2 = s - u/2\}$:

$$J_x^h = \omega S_x^h(t, \omega) - \frac{i}{2} \iint x(s_1) x^*(s_2) (h'(s_2 - t) h^*(s_1 - t) - h(s_2 - t) h'^*(s_1 - t)) e^{-i(s_1 - s_2)\omega} ds_1 ds_2, \quad (\text{A.14})$$

d'où après réarrangement des termes, le résultat

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \omega S_x^h(t, \omega) - \text{Im} \left\{ F_x^{h*}(t, \omega) \int x(s) h'^*(s - t) e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2} \right\}. \quad (\text{A.15})$$

B Simplifications des opérateurs de réallocation du scalogramme

Cette annexe réunit tous les calculs nécessaires pour la simplification des définitions (1.70) et (1.72) des opérateurs de réallocation du spectrogramme en temps et en échelle respectivement que nous rappelons maintenant :

$$\hat{b}_x^\psi(a, b) = \frac{1}{S_x^\psi(a, b)} \iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{\omega}_x^\psi(a, b) = \frac{1}{S_x^\psi(a, b)} \iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{a}_x^\psi(a, b) = \omega_0 / \hat{\omega}_x^\psi(a, b). \quad (\text{B.3})$$

B.1 Opérateur de réallocation en temps

Il s'agit remplacer dans le numérateur de l'éq. (B.1)

$$I_x^\psi = \iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (\text{B.4})$$

la distribution de Wigner-Ville du signal et de la fenêtre par sa définition

$$W_x(t, \omega) = \int x(t + s/2) x^*(t - s/2) e^{-is\omega} ds. \quad (\text{B.5})$$

On obtient alors une intégrale quadruple

$$I_x^\psi = \iiint \int s x(s + u/2) x^*(s - u/2) e^{-iu\xi} \psi\left(\frac{s-b}{a} + v/2\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} - v/2\right) e^{-iva\xi} du dv \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (\text{B.6})$$

que l'on va simplifier en intégrant selon chacune des variables dans un ordre déterminé. On effectue d'abord la somme selon ξ

$$\int e^{-i(u+av)\xi} \frac{d\xi}{2\pi} = \delta(u + av) \quad (\text{B.7})$$

de laquelle résulte une distribution de Dirac que l'on fait agir sur le reste de la fonction par une intégration en v qui donne :

$$\int \psi\left(\frac{s-b}{a} + v/2\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} - v/2\right) \delta(u + av) dv = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{s-b}{a} - \frac{u}{2a}\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} + \frac{u}{2a}\right). \quad (\text{B.8})$$

Après un changement de variables $\{s_1 = s + u/2, s_2 = s - u/2\}$ de jacobien égal à 1

$$I_x^\psi = \iint \frac{s_1 + s_2}{2} x(s_1) x^*(s_2) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{s_2 - b}{a}\right) \psi^*\left(\frac{s_1 - b}{a}\right) ds_1 ds_2, \quad (\text{B.9})$$

on reconnaît la transformée en ondelettes du signal que l'on isole, ce qui mène au résultat final

$$\iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \text{Re} \left\{ T_x^{\psi*}(a, b) \int s x(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Opérateur de réallocation en échelle

On procède de la même manière pour l'opérateur de réallocation en fréquence, éq. (B.2), dont on met à part le numérateur

$$J_x^\psi = \iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (\text{B.11})$$

dans lequel on insère les expressions des distributions de Wigner-Ville du signal et de la fenêtre

$$J_x^\psi = \iiint \xi x(s+u/2) x^*(s-u/2) e^{-iu\xi} \psi\left(\frac{s-b}{a} + v/2\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} - v/2\right) e^{-iva\xi} du dv \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (\text{B.12})$$

On intègre d'abord en fréquence

$$\int \xi e^{-i(u+av)\xi} \frac{d\xi}{2\pi} = \frac{i}{a} \frac{d}{dv} (\delta(u+av)), \quad (\text{B.13})$$

ce qui nous donne cette fois-ci la dérivée de la distribution de Dirac dont l'action sur le reste de la fonction à intégrer conduit à

$$\begin{aligned} & \int \psi\left(\frac{s-b}{a} + v/2\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} - v/2\right) \frac{i}{a} \frac{d}{dv} (\delta(u+av)) dv = \\ & \frac{1}{2ia^2} \left(\psi'\left(\frac{s-b}{a} - \frac{u}{2a}\right) \psi^*\left(\frac{s-b}{a} + \frac{u}{2a}\right) - \psi\left(\frac{s-b}{a} - \frac{u}{2a}\right) \psi'^*\left(\frac{s-b}{a} + \frac{u}{2a}\right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

On effectue le même changement de variable qu'en section précédente $\{s_1 = s + u/2, s_2 = s - u/2\}$:

$$J_x^\psi = \iint x(s_1) x^*(s_2) \left(\frac{1}{2ia^2}\right) \left(\psi'\left(\frac{s_2-b}{a}\right) \psi^*\left(\frac{s_1-b}{a}\right) - \psi\left(\frac{s_2-b}{a}\right) \psi'^*\left(\frac{s_1-b}{a}\right) \right) ds_1 ds_2, \quad (\text{B.15})$$

d'où après réarrangement des termes, le résultat

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = -\frac{1}{a} \text{Im} \left\{ T_x^{\psi*}(a, b) \int x(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi'^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\}. \quad (\text{B.16})$$

C Densité de probabilité des vecteurs de réallocation du spectrogramme

C.1 Formule des interférences

La formule des interférences est un résultat classique des systèmes linéaires. Dans le contexte de la Sect. 2.3.1, elle mérite qu'on s'y attarde un peu, en particulier pour préciser la manière de la manipuler lorsqu'un bruit blanc gaussien complexe analytique $n(t)$ intervient.

Les parties réelle et imaginaire d'un tel signal sont deux bruits blancs réels

$$\mathbf{E}[\operatorname{Re}\{n(t)\}\operatorname{Re}\{n(s)\}] = \mathbf{E}[\operatorname{Im}\{n(t)\}\operatorname{Im}\{n(s)\}] = \mathbf{E}[b(t)b(s)] = \frac{\sigma^2}{2}\delta(t-s), \quad (\text{C.1})$$

liés par une corrélation imposée par la transformée de Hilbert

$$\mathbf{E}[\operatorname{Re}\{n(t)\}\operatorname{Im}\{n(s)\}] = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int \frac{\mathbf{E}[b(t)b(\tau)]}{s-\tau} d\tau = -\frac{\sigma^2}{2\pi(t-s)} \quad \text{si } t \neq s, 0 \text{ sinon.} \quad (\text{C.2})$$

La fonction d'autocorrélation $\gamma_n(t-s) = \mathbf{E}[n(t)n^*(s)]$ de $n(t)$ admet alors une expression composite entre les deux types de corrélation (C.1) et (C.2)

$$\gamma_n(t-s) = 2\mathbf{E}[\operatorname{Re}\{n(t)\}\operatorname{Re}\{n(s)\}] + i2\mathbf{E}[\operatorname{Re}\{n(t)\}\operatorname{Im}\{n(s)\}] \quad (\text{C.3})$$

$$= \sigma^2 \left(\delta(t-s) - \frac{i}{\pi(t-s)} \right), \quad (\text{C.4})$$

qui se traduit sur la densité spectrale $\Gamma_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n(\tau) d\tau$ par un échelon de Heaviside

$$\Gamma_n(\omega) = \sigma^2(1 + \operatorname{sgn}(\omega)). \quad (\text{C.5})$$

Soit $x_1 = n \star h_1$ et $x_2 = n \star h_2$, deux versions filtrées de $n(t)$, la corrélation entre ces deux processus à l'instant t

$$\mathbf{E}[x_1(t)x_2(t)^*] = \iint \mathbf{E}[n(\tau_1)n^*(\tau_2)]h_1^*(t-\tau_1)h_2(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{C.6})$$

donne, en utilisant Parseval,

$$\mathbf{E}[x_1(t)x_2(t)^*] = 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} H_1^*(\omega)H_2(\omega) d\omega / (2\pi). \quad (\text{C.7})$$

Dans le cas où les supports fréquentiels de h_1 et h_2 sont approximativement contenus dans le demi-plan des fréquences positives, on peut alors invoquer Parseval à nouveau pour obtenir le résultat qui nous sera utile

$$\mathbf{E}[x_1(t)x_2(t)^*] \approx 2\sigma^2 \int h_1^*(s)h_2(s) ds. \quad (\text{C.8})$$

C.2 Densité de probabilité des vecteurs de réallocation, fenêtre gaussienne, signal + bruit

Le calcul de la densité de probabilité du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans le cas "signal+bruit" suit la trame de celui déjà fait pour le cas "bruit seul". C'est ce que nous allons

maintenant préciser en partant de l'éq. (2.86), point d'embranchement où se différencie les deux cas, qui s'écrit

$$f(r) = \frac{\Delta t_h^2}{\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2} \iint |w|^2 \exp\{|w - S_1|^2/\sigma_1^2 + |-i\Delta t_h r w - S_2|^2/\sigma_2^2\} d\text{Re}\{w\} d\text{Im}\{w\}. \quad (\text{C.9})$$

On doit, cette fois, prendre soin de mettre sous forme canonique la forme quadratique dans l'exponentielle

$$\begin{aligned} \frac{|w - S_1|^2}{\sigma_1^2} + \frac{|-i\Delta t_h r w - S_2|^2}{\sigma_2^2} = \\ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{\Delta t_h^2 |r|^2}{\sigma_2^2} \right) |w|^2 - 2\text{Re} \left\{ w \left(\frac{S_1}{\sigma_1^2} - \frac{\Delta t_h r^* S_2}{\sigma_2^2} \right)^* \right\} + \frac{|S_1|^2}{\sigma_1^2} + \frac{|S_2|^2}{\sigma_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

En posant $a = 1/\sigma_1^2 + \Delta t_h^2 |r|^2/\sigma_2^2$, $b = S_1/\sigma_1^2 - \Delta t_h r^* S_2/\sigma_2^2$ et $c = |S_1|^2/\sigma_1^2 + |S_2|^2/\sigma_2^2$, on reconnaît une intégrale gaussienne

$$f(r) = \frac{\Delta t_h^2}{\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2} \left[\iint |w|^2 e^{-a|w-b/a|^2} d\text{Re}\{w\} d\text{Im}\{w\} \right] e^{|b|^2/a-c}, \quad (\text{C.11})$$

qu'il est possible d'évaluer par un changement en coordonnées polaires [22]

$$f(r) = \frac{\Delta t_h^2}{\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2 a^2} (1 + c + |b|^2/a - c) e^{|b|^2/a-c}. \quad (\text{C.12})$$

Il s'agit alors de remplacer dans (C.12), a , b et c par leur définition, en remarquant auparavant que

$$|b|^2/a - c = -\Delta t_h^2 |S_1|^2 \frac{|r - r_0|^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 \Delta t_h^2 |r|^2}, \quad (\text{C.13})$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} f(r) = \frac{\Delta t_h^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1/\sigma_1^2 + \Delta t_h^2 |r|^2/\sigma_2^2)^2} \\ \left(1 + \frac{|S_1|^2}{\sigma_1^2} + \frac{|S_2|^2}{\sigma_2^2} - \Delta t_h^2 |S_1|^2 \frac{|r - r_0|^2}{\sigma_2^2 + \Delta t_h^2 \sigma_1^2 |r|^2} \right) \exp \left[-\Delta t_h^2 |S_1|^2 \frac{|r - r_0|^2}{\sigma_2^2 + \Delta t_h^2 \sigma_1^2 |r|^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

ce qui nous conduit au résultat en insérant les expressions de σ_1 et σ_2

$$f(r) = \frac{1}{\pi (1 + |r|^2)^2} \left[1 + \frac{S}{2\sigma^2} \left(1 + |r_0|^2 - \frac{|r - r_0|^2}{1 + |r|^2} \right) \right] \exp \left[-\frac{S}{2\sigma^2} \frac{|r - r_0|^2}{1 + |r|^2} \right], \quad (\text{C.15})$$

que l'on préfère sous la forme (2.96).

C.3 Quotient de variables aléatoires complexes gaussiennes

Le problème qui nous intéresse ici est le suivant: soit $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]^t$ un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire de moyenne $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \dots s_N]^t$ et de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ inversible, donc de densité de probabilité

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{\Gamma})} \exp(-(\mathbf{y} - \mathbf{s})^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s})), \quad (\text{C.16})$$

quelle est la densité conjointe de probabilité du vecteur $\mathbf{r} = [r_1 r_2 \dots r_{N-1}]$ dont les coordonnées sont données par $r_n = (1/\lambda_n) y_{n+1}/y_1$, pour $n = 1 \dots N-1$ où $\{\lambda_n, n = 1 \dots N-1\}$ est une famille de nombres complexes?

La résolution de notre problème passe par l'utilisation du changement de variable $[y_1 y_2 \dots y_N] \rightarrow [y_1 r_1 r_2 \dots r_{N-1}]$. Du changement de variable inverse $[y_1 r_1 r_2 \dots r_N] \rightarrow [y_1 y_2 \dots y_N]$, où $y_{n+1} = \lambda_n r_n y_1$ pour $n \in [1..N-1]$, on déduit la matrice jacobienne

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \lambda_1 r_1 & \lambda_1 y_1 & & \\ \lambda_2 r_2 & & \lambda_2 y_1 & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

La densité de probabilité du vecteur \mathbf{r} s'obtient en marginalisant la densité conjointe par rapport à y_1 ,

$$f(\mathbf{r}) = \iint \left| \prod_{n=1}^{N-1} \lambda_n y_1^{N-1} \right|^2 f_{\mathbf{y}}(\mathbf{r}_{\lambda} y_1) d\text{Re}\{y_1\} d\text{Im}\{y_1\}, \quad (\text{C.18})$$

où \mathbf{r}_{λ} désigne le vecteur $[1 \ \lambda_1 r_1 \ \lambda_2 r_2 \dots]^t$.

La mise en forme canonique de la forme quadratique dans la gaussienne $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{r}_{\lambda} y_1)$

$$(\mathbf{r}_{\lambda} y_1 - \mathbf{s})^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{r}_{\lambda} y_1 - \mathbf{s}) = (\mathbf{r}_{\lambda}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}) \left| y_1 - \frac{\mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}}{\mathbf{r}_{\lambda}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}} \right|^2 - \frac{|\mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}|^2}{\mathbf{r}_{\lambda}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}} + \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}, \quad (\text{C.19})$$

conduit à l'expression générale

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^N \det \mathbf{\Gamma}} \left| \prod_{n=1}^{N-1} \lambda_n \right|^2 \iint |y_1 + b/a|^{2N-2} \exp(-a|y_1|^2) d\text{Re}\{y_1\} d\text{Im}\{y_1\} \exp[-|b|^2/a + c], \quad (\text{C.20})$$

où l'on a défini les constantes $a = \mathbf{r}_{\lambda}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}$, $b = \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_{\lambda}$ et $c = \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}$. En outre, nous tiendrons compte par la suite de la simplification

$$-|b|^2 + ca = -(s_1 \tilde{\mathbf{r}}_{\lambda} - \tilde{\mathbf{s}})^{\dagger} [\mathbf{g} \mathbf{g}^t + g_1 \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}] (s_1 \tilde{\mathbf{r}}_{\lambda} - \tilde{\mathbf{s}}), \quad (\text{C.21})$$

où les variables introduites ici sont des sous-blocs des vecteurs et matrices définies plus haut

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} g_1 & \mathbf{g}^{\dagger} \\ \mathbf{g} & \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = [s_1 \tilde{\mathbf{s}}]^t \quad \tilde{\mathbf{r}}_{\lambda} = [\lambda_1 r_1 \ \lambda_2 r_2 \dots]^t. \quad (\text{C.22})$$

Lorsque on se focalise sur le cas $N = 3$ qui nous importe, l'éq. (C.20)

$$f(\mathbf{r}) = \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\pi^4 \det \mathbf{\Gamma}} \iint |y_1 + b/a|^4 \exp(-a|y_1|^2) d\text{Re}\{y_1\} d\text{Im}\{y_1\} \exp[-|b|^2/a + c] \quad (\text{C.23})$$

devient intégrable. En utilisant pour $\alpha > 0$, [22]

$$\iint (x^2 + y^2)^2 e^{-\alpha((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} dx dy = \frac{\pi}{\alpha^3} (2 + \alpha(x_0^2 + y_0^2) + 4\alpha^2(x_0^2 + y_0^2)^2), \quad (\text{C.24})$$

on arrive finalement au résultat

$$f(\mathbf{r}) = \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\pi \det \mathbf{\Gamma} a^3} \left[2 + c^2 + (1 + 8c) \frac{|b|^2 - ca}{a} + 4 \left(\frac{|b|^2 - ca}{a} \right)^2 \right] \exp \left[-|b|^2/a + c \right]. \quad (\text{C.25})$$

Si \mathbf{y} est un vecteur centré, i.e., lorsque $\mathbf{s} = 0$, nul besoin de se restreindre à une valeur précise de N

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\left| \prod_{n=1}^{N-1} \lambda_n \right|^2}{\pi^N \det \mathbf{\Gamma}} \iint |y_1|^{2N-2} \exp(-a|y_1|^2) d\text{Re}\{y_1\} d\text{Im}\{y_1\}, \quad (\text{C.26})$$

le calcul général (C.20) peut être conduit à terme, et conduit à

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\left| \prod_{n=1}^{N-1} \lambda_n \right|^2 (N-1)!}{\pi^{N-1} \det \mathbf{\Gamma} \left(\mathbf{r}_\lambda^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}_\lambda \right)^N}. \quad (\text{C.27})$$

D La méthode de la phase stationnaire

Le principe de phase stationnaire est souvent invoqué lors de l'évaluation du spectre de Fourier d'un chirp. Cette annexe a pour but de considérer ce problème en détail, et de s'intéresser en particulier au contrôle quantitatif de l'erreur d'approximation correspondante, ce qui nous sera utile au Chapitre 4. Une analyse détaillée conduit à l'introduction d'un critère plus précis mais plus compliqué que celui produit par les conditions heuristiques qui sont généralement considérées dans ce contexte. Il est également mis en évidence par l'intermédiaire de deux contre-exemples appartenant à l'importante classe des chirps en loi de puissance, que — en opposition à des croyances habituelles — les conditions heuristiques ne sont ni nécessaires, ni suffisantes pour la validité de l'approximation de phase stationnaire. Le travail fait ici que l'on peut retrouver dans [26] est une entité en soi. C'est la raison pour laquelle cette annexe a été écrite de manière à ce qu'elle puisse être lue et comprise indépendamment du reste du document.

D.1 Quelques rappels

Par définition, un chirp est un signal de la forme

$$x(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\}, \quad (\text{D.1})$$

où $a(t)$ est une fonction d'amplitude aux variations douces et donc l'évolution est lente comparée aux oscillations du terme de phase $\exp\{i\varphi(t)\}$.

Rappelons cela se traduit formellement par les deux conditions de la Définition 1 (du Chapitre 4)

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t) \dot{\varphi}(t)} \right| \ll 1; \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} \right| \ll 1, \quad (\text{D.2})$$

qui caractérisent $x(t)$ en tant que chirp.

Bien que la définition d'un chirp se donne généralement en temps (comme dans (D.1)), de nombreuses applications appellent une description équivalente en fréquence [27, 25, 36]. Pour ce faire, il est habituel de faire appel à l'approximation de phase stationnaire en supposant plus ou moins explicitement que les conditions (D.2) régissent l'efficacité de l'approche.

D.2 Approximation de phase stationnaire des spectres des chirps

Le principe de phase stationnaire

L'argument de phase stationnaire peut être formulé comme suit. Soit I une intégrale oscillante de la forme

$$I = \int_{\Omega} b(t) e^{i\psi(t)} dt, \quad (\text{D.3})$$

où $b(t) > 0$ et $\psi(t)$ sont C^1 , entendu que $\text{supp}\{\psi(t)\}$ est restreint à un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel $b(t)$ est intégrable. En supposant que $b(t)$ varie lentement relativement aux oscillations contrôlées par $\psi(t)$, les valeurs positives et négatives de l'intégrande tendent à s'annuler réciproquement, avec la conséquence que la contribution principale de I provient seulement du voisinage des points où la dérivée de la phase est nulle.

Un point stationnaire et spectres de chirps approchée

Dans le cas d'un modèle (D.3), les résultats classiques de la théorie de la phase stationnaire (voir, e.g., [92] ne peuvent pas être directement appliqués dans la mesure où les oscillations ne sont pas contrôlées par un paramètre dont on peut faire croître la valeur librement. En supposant, cependant, que la phase $\psi(t)$ a un et seulement un point stationnaire non dégénéré (i.e., pour lequel $\dot{\psi}(t_s) = 0$ et $\ddot{\psi}(t_s) \neq 0$), nous pouvons faire le changement de variable

$$u^2 = \frac{\psi(t) - \psi(t_s)}{\ddot{\psi}(t_s)/2} \quad (\text{D.4})$$

et ainsi réécrire (D.3) sous une forme canonique

$$I = e^{i\psi(t_s)} \int_{\Omega'} g(u) e^{i\beta u^2} du, \quad (\text{D.5})$$

avec $g(u) = b(t(u))(du/dt)^{-1}$ et $\beta = \ddot{\psi}(t_s)/2$. En utilisant un développement de Taylor de l'exponentielle du membre de droite de (D.5), nous sommes conduits [54] à la décomposition de (D.3) en $I = I_a + R$, avec

$$I_a = \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\psi}(t_s)|}} b(t_s) e^{i\psi(t_s)} e^{i(\text{sgn}\ddot{\psi}(t_s))\pi/4}, \quad (\text{D.6})$$

la qualité de l'utilisation de I_a comme une approximation de I dépendant de l'amplitude du reste R .

Le prolongement d'approches développées dans [54, 94] nous permet de borner explicitement l'erreur relative $Q = |R/I_a|$ par

$$Q \leq Q_m = \frac{5 \sup_{u \in \Omega'} |\ddot{g}|}{4 |\beta| g(t_s)} \quad (\text{D.7})$$

et l'approximation de phase stationnaire est alors valide si $Q_m \ll 1$. Étant donné le modèle (D.3), une évaluation explicite de cette quantité mène à $Q_m = \sup_{t \in \Omega} F(t)$, avec

$$F(t) = 5\sqrt{2|\ddot{\psi}(t_s)|} \left| \frac{a}{a(t_s)} \frac{\psi^{1/2}}{\dot{\psi}} \left| \frac{\ddot{a}}{a} \frac{\psi}{\dot{\psi}^2} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a\dot{\psi}} \left(1 - \frac{\psi\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^2} \right) + \left(3\psi \left(\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^2} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^2} - \frac{\psi\psi'''}{\dot{\psi}^3} \right) \right| \right|, \quad (\text{D.8})$$

où ψ est une notation compacte pour $\psi(t) - \psi(t_s)$.

Ce résultat nous donne un critère suffisant pour justifier (quantitativement) l'efficacité de l'approximation. Il peut être appliqué tel quel au problème de l'évaluation du spectre d'un chirp (D.1) de fréquence instantanée monotone en posant $b(t) = a(t)$ et $\psi(t) = \varphi(t) - 2\pi ft$ (le point stationnaire t_s étant alors défini par $\dot{\varphi}(t_s) = 2\pi f$). On en déduit que l'erreur correspondante n'est pas seulement contrôlée par les termes ε_1 et ε_2 (tels qu'il sont définis dans (D.2)), mais également par des termes additionnels qui dépendent de combinaisons compliquées de $a(t)$, $\varphi(t)$ et de quelques-unes de leurs dérivées successives. En général, l'évaluation de la borne supérieure Q_m dans (D.7) n'apparaît pas faisable mais, dans la plupart des cas, un substitut utile est donné par $F(t_s)$, une telle simplification revenant à considérer le terme principale du reste intégral R .

Pas de point stationnaire et quasi-analyticité des chirps

En revenant au modèle général (D.3), il est intéressant de s'interroger sur le cas où il n'y a pas de point stationnaire. Dans cette situation où $\dot{\psi}(t) \neq 0$ quelque soit t , (D.3) peut être réécrit comme

$$I = \int_{\Omega} \frac{b(t)}{i\dot{\psi}(t)} i\dot{\psi}(t) e^{i\psi(t)} dt, \quad (\text{D.9})$$

de telle sorte que l'on puisse l'intégrer par parties. En supposant que $b(t) \in L^1(\Omega)$ et $b(\partial\Omega) = 0$, nous obtenons

$$\frac{I}{\|b\|_1} \leq \left\| \frac{\dot{b}(t)}{b(t)\dot{\psi}(t)} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\ddot{\psi}(t)}{\dot{\psi}^2(t)} \right\|_{\infty}, \quad (\text{D.10})$$

ce qui signifie que, relativement à la situation où les oscillations du terme de phase seraient infiniment ralenties, le module de (D.3) est dans ce cas borné par une quantité dont la décroissance vers zéro est contrôlée par les conditions de chirps (D.2). Qui plus est, dans le cas où I correspond à la transformée de Fourier du chirp (D.1), i. e., quand $b(t) = a(t)$ et $\psi(t) = \varphi(t) - 2\pi ft$, et si nous supposons par ailleurs que $\dot{\varphi}(t) > 0$ pour tout $t \in \Omega$, nous pouvons conclure que le domaine de fréquence dans lequel il n'existe aucun point stationnaire, est la demi-droite des fréquences négatives. Puisque, dans ce cas, nous avons $\ddot{\psi}(t) = \ddot{\varphi}(t)$ et $\dot{\psi}(t) \geq \dot{\varphi}(t)$ quand $f < 0$, il est alors clair que

$$\left\| \frac{\dot{b}(t)}{b(t)\dot{\psi}(t)} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)\dot{\varphi}(t)} \right\|_{\infty} \quad (\text{D.11})$$

et

$$\left\| \frac{\ddot{\psi}(t)}{\dot{\psi}^2(t)} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} \right\|_{\infty}. \quad (\text{D.12})$$

Il apparaît que les conditions heuristiques (D.2) sont suffisantes pour rendre le membre de droite de (D.10) négligeable, et ainsi garantir la quasi-analyticité du modèle exponentiel (D.1) — dans le sens où les contributions spectrales aux fréquences négatives sont presque nulles —, avec la conséquence que la quantité $\dot{\varphi}(t)/2\pi$ puisse être effectivement interprétée comme la fréquence instantanée du chirp.

D.3 Exemples et contre-exemples

Chirps en loi de puissance

Pour mettre en évidence les possibles limitations de l'utilisation de l'approximation de phase stationnaire quand à l'évaluation du spectre d'un chirp, nous nous focaliserons ici sur la classe importante des chirps en loi de puissance.

Par la Définition 6 (du Chapitre 4), un chirp en loi de puissance est un chirp (D.1), pour lequel

$$a(t) = (t_0 - t)^{-\alpha} \quad (\text{D.13})$$

et

$$\varphi(t) = 2\pi d(t_0 - t)^{\beta}, \quad (\text{D.14})$$

avec α, β et d trois paramètres réels et $t < t_0$. (On ne tient pas compte ici du terme de phase à l'origine).

À partir de cette définition, il doit d'abord être remarqué que différents types de forme d'onde peuvent être obtenus, selon les valeurs que l'on donne aux paramètres α et β :

- si l'on considère $a(t)$ comme l'amplitude du chirp, on observe alors que $a(t_0) = 0$ (resp. $+\infty$) si $\alpha < 0$ (resp. > 0) ;
- si on identifie $\dot{\varphi}(t)/2\pi = d\beta(t_0 - t)^{\beta-1}$ avec la “fréquence instantanée” du chirp, on est conduit à une divergence en loi de puissance en t_0 pour toutes les valeurs de β telles que $\beta < 1$. Mais ceci correspondra à un signal “infiniment oscillant” en t_0 uniquement sous la contrainte plus forte $\beta < 0$ [77]. En effet, dans l'intervalle $0 < \beta < 1$, la phase présente une valeur bien définie en t_0 : $\varphi(t_0) = 0$, le comportement singulier de sa dérivée étant alors homogène à celui d'une singularité non oscillante en t_0 .

Dans le cas des chirps en loi de puissance, il peut être montré que les deux critères obtenus à partir des conditions heuristiques (D.2) ou de l'analyse raffinée présentée en Sect. D.2, partagent la même dépendance fréquentielle

$$\varepsilon = C (\beta d)^{\frac{1}{\beta-1}} f^{-\frac{\beta}{\beta-1}}, \quad (\text{D.15})$$

la seule différence provenant du pré-facteur C , qui s'écrit

$$C_1 = (1/2\pi) \max(|\alpha|, |\beta - 1|) \quad (\text{D.16})$$

dans le premier cas et

$$C_2 = (5/48\pi) |12\alpha^2 - 12\alpha + 12\alpha\beta + 2\beta^2 - 5\beta + 2|/|\beta - 1| \quad (\text{D.17})$$

dans le second.

Dépendant de quelle quantité est plus grande que l'autre, nous pouvons démontrer que, pour un d donné, il existe des couples (α, β) tels que l'approximation de phase stationnaire reste valide alors que les conditions heuristiques (D.2) sont enfreintes, ou bien réciproquement, l'approximation ne fonctionne plus alors que ces conditions sont toujours satisfaites. C'est ce qui est illustré en Fig. D.2 à D.3

Dans le contexte de la détection des ondes gravitationnelles issues de binaires coalescentes, les indices sont fixés (par des arguments physiques) à $\alpha = 1/4$ (divergence de l'amplitude à la coalescence) et $\beta = 5/8$ (singularité non oscillante à la coalescence), tandis que le taux de modulation hyperbolique d est un paramètre libre relié aux masses des objets du système. On déduit que, pour les valeurs des paramètres α et β , et sur une échelle de valeur raisonnable pour d , les critères C_1 et C_2 coïncident approximativement. Qui plus est, ils ont tous deux une petite valeur, ce qui valide *a posteriori* l'efficacité de l'approximation de phase stationnaire ce qui est un résultat important pour les développements faits au Chapitre 4, et qui est, par ailleurs, couramment utilisé dans ce contexte (voir e.g., [36]). C'est ce qui est illustré en Fig. D.4.

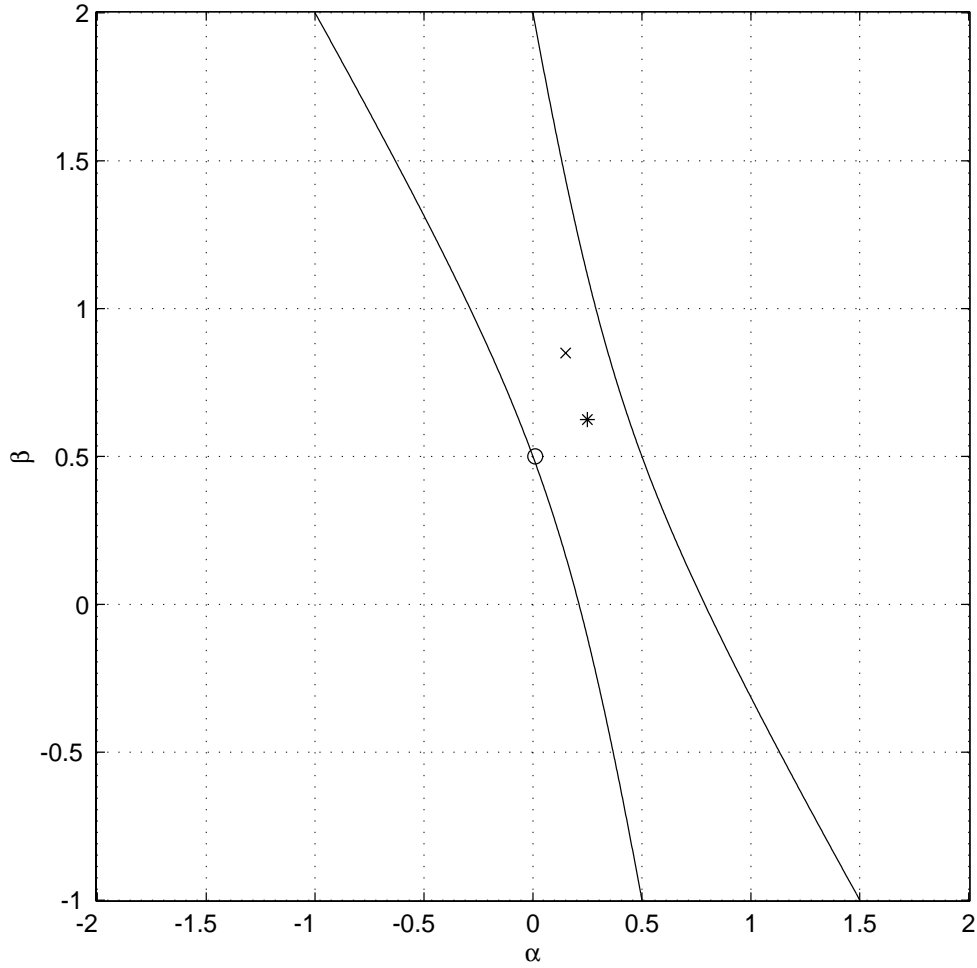


FIG. D.1 – *Comparaison des critères heuristique et raffiné de validité de la phase stationnaire pour les chirps en loi de puissance d'indice α and β (voir texte). Le domaine de couleur blanche (resp. grise) correspond aux valeurs de α et β telles que le critère raffiné C_2 est plus petit (resp. plus grand) que le critère heuristique C_1 . Les lignes pleines indiquent les points solutions de $C_2 = 0$. La croix, le cercle et l'étoile sont des valeurs spécifiques utilisées dans les Figs. D.2 à D.4 respectivement.*

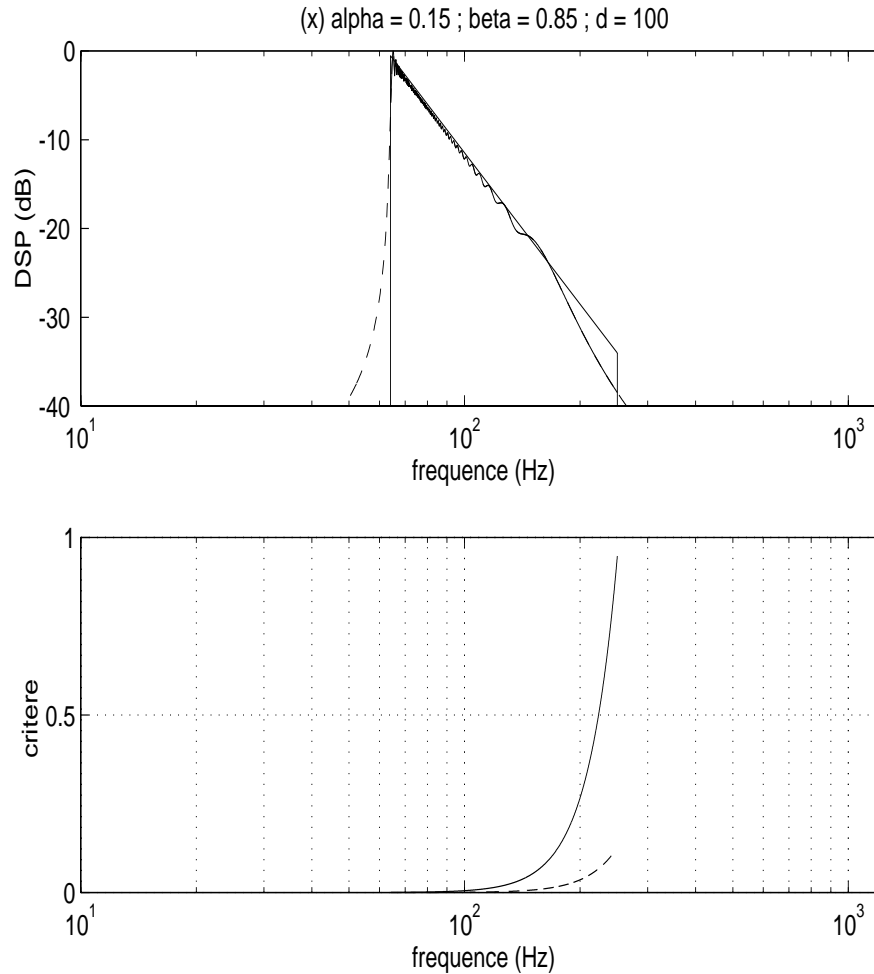


FIG. D.2 – **Validité de l'approximation de phase stationnaire — Contre-exemple 1** : dans le cas d'un chirp en loi de puissance dont les paramètres sont indiqués par la croix en Fig. D.1, on constate que le critère heuristique (ligne pointillée dans le diagramme du bas) prédit une bonne approximation (dans une bande de fréquence choisie), tandis que la comparaison avec le vrai spectre (diagramme du haut) révèle une différence significative, comme indiqué par le critère raffiné (ligne pleine dans le diagramme du bas).

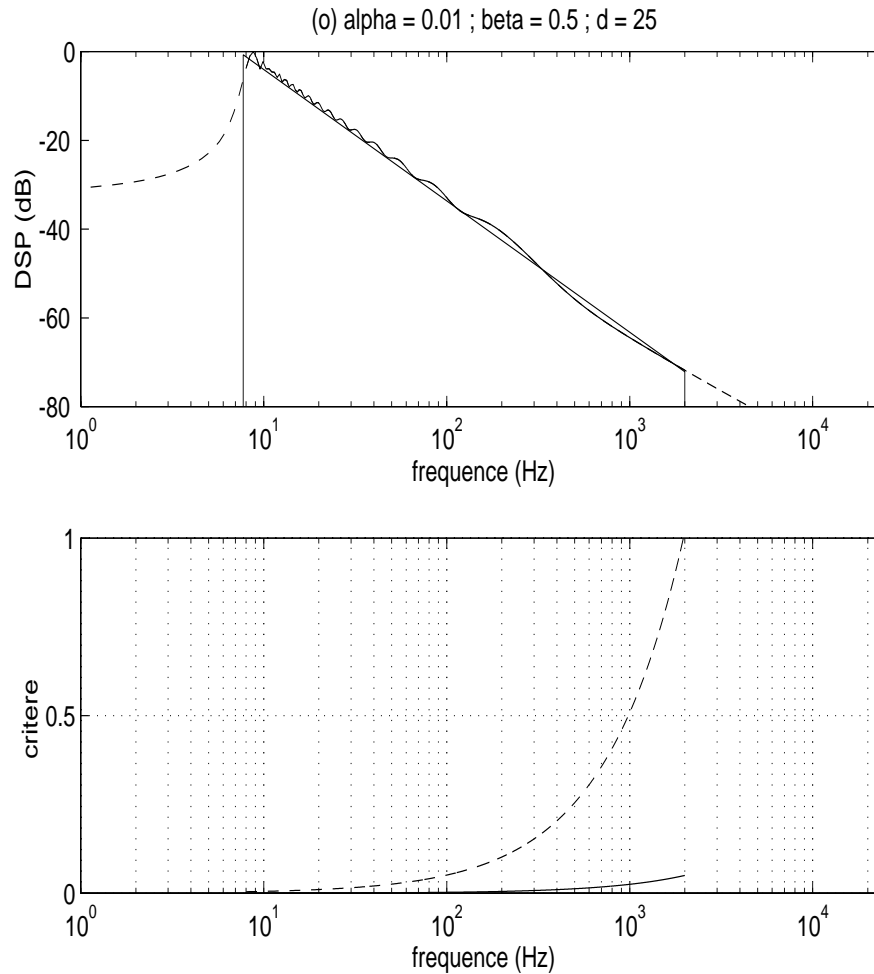


FIG. D.3 – **Validité de l'approximation de phase stationnaire** — **Contre-exemple 2** : dans le cas d'un chirp en loi de puissance dont les paramètres sont indiqués par le cercle en Fig. D.1, on constate que le critère heuristique (ligne pointillée dans le diagramme du bas) prédit une mauvaise approximation (dans une bande de fréquence choisie), tandis que la comparaison avec le vrai spectre (diagramme du haut) révèle un bon accord, comme indiqué par le critère raffiné (ligne pleine dans le diagramme du bas).

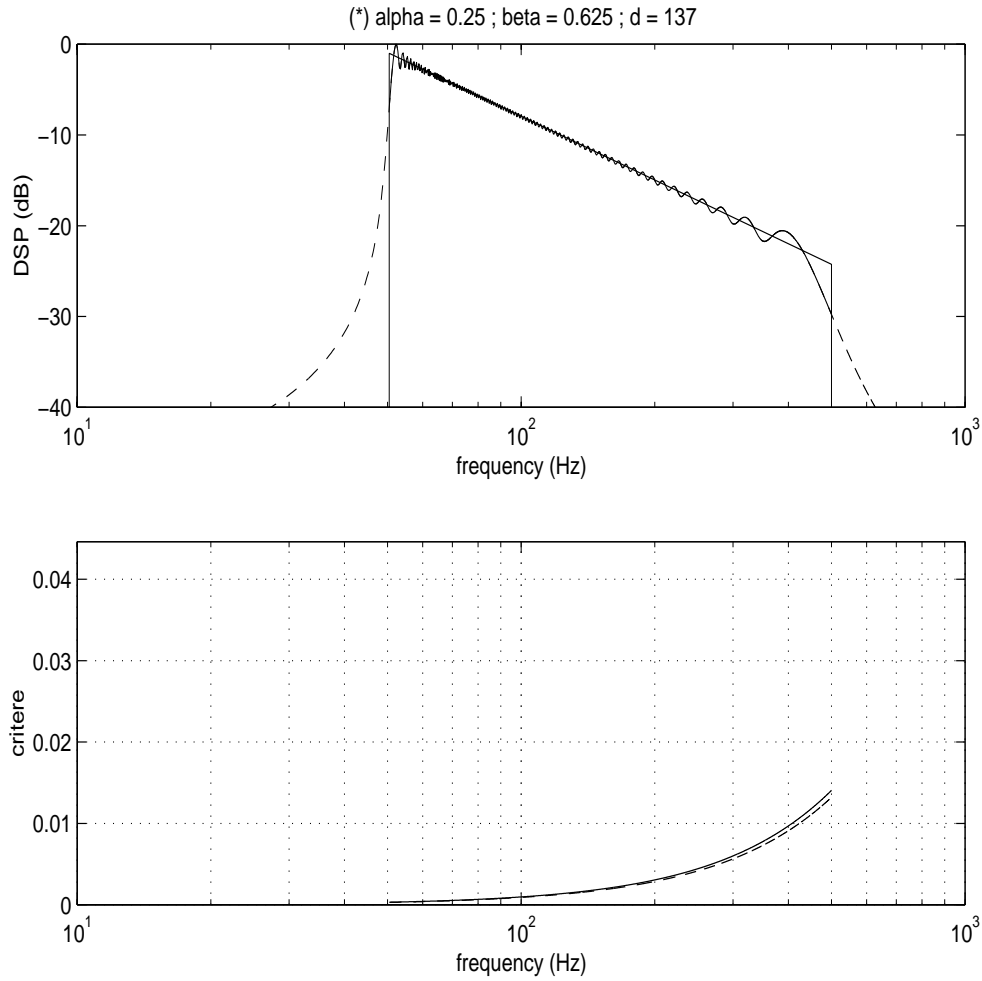


FIG. D.4 – **Validité de l'approximation de phase stationnaire — Exemple 3 :** exemple utilisant le modèle pour les ondes gravitationnelles produites par la coalescence d'un système binaire, pour des valeurs typiques : les paramètres du chirp en loi de puissance sont fixés à $\alpha = 1/4$, $\beta = 5/8$ et $d = 137$. On constate que les critères raffiné et heuristique coïncident approximativement (diagramme du bas). Qui plus est, ils admettent tous deux une petite valeur dans la bande de fréquence considérée, ce qui valide a posteriori l'efficacité de l'approximation de phase stationnaire qui est couramment utilisée dans ce contexte.

Bibliographie

- [1] Abramowitz (M.) et Stegun (I.). – *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. – New York, Dover, 1972.
- [2] Abry (P.), Chassande-Mottin (E.) et Flandrin (P.). – Algorithmes rapides pour la décomposition en ondelette continue. Application à l’implantation de la réallocation du scalogramme. *In : Proc. 15ème Colloque GRETSI*, pp. 313–316. – Juan-Les-Pins, France, 1995.
- [3] Altes (R. A.). – Detection, estimation and classification with spectrograms. *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 67, n° 4, 1980, pp. 1232–1246.
- [4] Auger (F.) et Flandrin (P.). – *Improving the readability of the time-frequency and time-scale representations by the reassignment method*. – Rapport technique n° LAN 93-05, Nantes, Laboratoire d’Automatique de Nantes, 1993.
- [5] Auger (F.) et Flandrin (P.). – Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, n° 5, 1995, pp. 1068–1089.
- [6] Baraniuk (R. G.), Flandrin (P.), Janssen (A. J. E. M.) et Michel (O.). – Measuring time-frequency content using the Rényi entropies. – 1998. Submitted for publication.
- [7] Baraniuk (R. G.), Flandrin (P.) et Michel (O.). – Information and complexity on the time-frequency plane. *In : Proc. 14ème Colloque GRETSI*, pp. 359–362. – Juan-Les-Pins, France, 1993.
- [8] Barbarossa (S.). – Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, n° 6, 1995.
- [9] Barbarossa (S.) et Lemoine (O.). – Analysis of nonlinear FM signals by pattern recognition of their time-frequency representation. *IEEE Signal Proc. Lett.*, vol. SPL-3, n° 4, 1996, pp. 112–115.
- [10] Bargmann (V.). – On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol. 14, 1961, pp. 187–214.
- [11] Benzecri (J.P.) et al. – *L’analyse de données. Tome 1 : la taxinomie*. – Paris, Dunod, 1973.
- [12] Berthomier (C.). – Sur une méthode d’analyse de signaux. *Ann. Geophys.*, vol. 31, n° 2, 1975, pp. 239–252.
- [13] Bertrand (J.) et Bertrand (P.). – Some practical aspects of the affine time-frequency distributions. *In : Proc. 13ème Colloque GRETSI*, pp. 25–28. – Juan-Les-Pins, France, 1991.

- [14] Bertrand (J.) et Bertrand (P.). – A class of affine Wigner distributions with extended covariance properties. *J. Math. Phys.*, vol. 33, n° 7, 1992, pp. 2515–2527.
- [15] Boudreaux-Bartels (G.). – Mixed time-frequency signal transformations. In : *The Transforms and Applications Handbook*, éd. par Poularikas (A. D.). – CRC Press Inc., 1996.
- [16] Bouruet-Aubertot (P.), Sommeria (J.) et Staquet (C.). – Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities. *J. Fluid Mech.*, no285, 1995, pp. 265–301.
- [17] Broman (H.). – The instantaneous frequency of a gaussian signal: the one-dimensional density function. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-29, n° 1, 1981, pp. 103–111.
- [18] Carmona (R. A.), Hwang (W. L.) et Torrèsani (B.). – Multi-ridge detection and time-frequency reconstruction. – To appear in *IEEE Trans. on Signal Proc.*
- [19] Carmona (R. A.), Hwang (W. L.) et Torrèsani (B.). – Identification of chirps with continuous wavelet transform. In : *Wavelets and Statistics*, éd. par Antoniadis (A.) et Oppenheim (G.). – Springer Verlag, 1995.
- [20] Carmona (R. A.), Hwang (W.L.) et Torrèsani (B.). – Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-45, n° 10, 1997, pp. 2586–2590.
- [21] Chassande-Mottin (E.), Auger (F.), Daubechies (I.) et Flandrin (P.). – Partition du plan temps-fréquence et réallocation. In : *Proc. 16ème Colloque GRETSI*, pp. 1447–1450. – Grenoble, France, 1997.
- [22] Chassande-Mottin (E.), Auger (F.) et Flandrin (P.). – *Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme*. – Rapport technique n° 96-01, Lyon, Laboratoire de Physique, ENS-Lyon (URA 1325 CNRS), 1996.
- [23] Chassande-Mottin (E.), Auger (F.) et Flandrin (P.). – On the statistics of spectrogram reassignment. *Multidim. Syst. and Signal Proc.*, 1998. – Accepté.
- [24] Chassande-Mottin (E.), Daubechies (I.), Auger (F.) et Flandrin (P.). – Differential reassignment. *IEEE Signal Proc. Lett.*, vol. SPL-4, n° 10, 1997, pp. 293–294.
- [25] Chassande-Mottin (E.) et Flandrin (P.). – On the time-frequency detection of chirps and its application to gravitational waves. In : *Proc. of the Second Workshop on Grav. Waves Data Analysis*. – Orsay, France, 1997.
- [26] Chassande-Mottin (E.) et Flandrin (P.). – On the stationary phase approximation of chirp spectra. In : *Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*. – Pittsburg, 1998. Accepté.
- [27] Chassande-Mottin (E.) et Flandrin (P.). – On the time-frequency detection of chirps. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 1998. – Accepté.
- [28] Cohen (L.). – *Time-frequency analysis*. – Englewoods Cliffs (NJ), Prentice Hall, 1995.
- [29] Daubechies (I.). – *Ten Lectures on Wavelets*. – Philadelphia, SIAM, 1992.

- [30] Daubechies (I.) et Maes (S.). – A nonlinear squeezing of the continuous wavelet transform based on auditory nerve models. *In : Wavelets in Medicine and Biology*, éd. par Aldroubi (A.) et Unser (M.). – CRC Press Inc., 1996.
- [31] Dechambre (M.) et Lavergnat (J.). – Statistical properties of the instantaneous frequency for a noisy signal. *Sig. Proc.*, vol. 2, 1980, pp. 137–150.
- [32] Delprat (N.). – *Analyse Temps-fréquence de sons musicaux : exploration d'une nouvelle méthode d'extraction de données pertinentes pour un modèle de synthèse*. – Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1992.
- [33] Delprat (N.), Escudié (B.), Guillemain (P.), Kronland-Martinet (R.), Tchamitchian (P.) et Torrè-sani (B.). – Asymptotic wavelet and Gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-38, n° 2, 1992, pp. 644–673.
- [34] Duchêne (J.) et Devedeux (D.). – Time-frequency distributions applied to uterine emg: characterization and assessment. *In : Time-Frequency and Wavelets in Biomedical signal processing*, éd. par Akay (M.), pp. 117–146. – IEEE Press, 1997.
- [35] Escudié (B.) et Grea (J.). – Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie. *C. R. Acad. Sc. Paris, série A*, vol. 283, 1976, pp. 1049–1051.
- [36] Finn (L. S.) et Chernoff (D. F.). – Observing binary inspiral in gravitational radiation: One interferometer. *Phys. Rev. D*, vol. 47, n° 6, 1993, pp. 2198–2219.
- [37] Flandrin (P.). – On detection-estimation procedures in the time-frequency plane. *In : Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, pp. 2331–2334. – Tokyo, 1986.
- [38] Flandrin (P.). – A time-frequency formulation of optimum detection. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-36, n° 9, 1988, pp. 1377–1384.
- [39] Flandrin (P.). – *Temps-Fréquence*. – Paris, Hermès, 1998, seconde édition.
- [40] Flandrin (P.) et Chassande-Mottin (E.). – Sur la réallocation des scalogrammes. *In : Proc. 15ème Colloque GRETSI*, pp. 309–312. – Juan-Les-Pins, France, 1995.
- [41] Flandrin (P.), Chassande-Mottin (E.) et Abry (P.). – Reassigned scalograms and their fast algorithms. *In : Proc. SPIE – Wavelet Appl. in Signal and Image Proc.*, pp. 152–158. – San Diego, CA, 1995.
- [42] Flandrin (P.) et Gonçalves (P.). – From wavelets to time-scale energy distributions. *In : Recent Advances in Wavelet Analysis*, éd. par Schumaker (L. L.) et Webb (G.), pp. 309–334. – Academic Press, 1994.
- [43] Friedman (D.). – Instantaneous frequency distribution vs. time: An interpretation of the phase structure of speech. *In : Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, pp. 1121–1124. – Tampa, FL, 1985.
- [44] Ghitza (O.). – Auditory models and human performances in tasks related to speech coding and speech recognition. *IEEE Trans. Speech Audio Proc.*, vol. 2, n° 1, 1994, pp. 115–132.

- [45] Gibiat (V.), Jardin (P.) et Wu (F.). – Analyse spectrale différentielle : application au signaux sonar de myotis mystacinus. *In : Proc. Conf. CNRS Systèmes Sonar Aériens Animaux*, pp. 20.1–20.25. – Lyon, 1985.
- [46] Gibiat (V.), Wu (F.), Perio (P.) et Chantreuil (S.). – Analyse spectrale différentielle (A.S.D.). *C. R. Acad. Sc. Paris, série II*, vol. 294, 1982, pp. 633–636.
- [47] Gonçalves (P.). – *Représentations temps-fréquence et temps-échelle – Synthèse et contributions*. – Thèse de Doctorat, Inst. National Polytechnique de Grenoble, 1993.
- [48] Gonçalves (P.) et Baraniuk (R. G.). – A pseudo-Bertrand distribution for time-scale analysis. *IEEE Signal Proc. Lett.*, vol. SPL-3, n° 3, 1996, pp. 82–84.
- [49] Gonçalves (P.) et Payot (E.). – Adaptive diffusion equation for time-frequency representations. *In : Proc. 8th IEEE Digital Sig. Proc. Workshop*. – Bryce Canyon Nat. Park, Utah, 1998.
- [50] Gradshteyn (I. S.) et Ryzhik (I. M.). – *Tables of Integrals, Series and Products*. – New York, Academic Press, 1980.
- [51] Guelfand (I. M.) et Chilov (G. E.). – *Les distributions*. – Paris, Dunod, 1962.
- [52] Guillemain (P.) et Kronland-Martinet (R.). – Horizontal and vertical ridges associated to continuous wavelet transforms. *In : Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 63–66. – Victoria, Canada, 1992.
- [53] Guillemain (P.) et Kronland-Martinet (R.). – Characterization of acoustic signals through continuous linear time-frequency representations. *Proc. of the IEEE*, vol. 84, n° 4, 1996, pp. 561–587.
- [54] Harthong (J.). – *Études sur la Mécanique Quantique*. – Astérisque, 1984.
- [55] Innocent (J.-M.) et Torrèsani (B.). – *A multiresolution strategy for detecting gravitational waves generated by binary coalescence*. – Rapport technique n° CPT-96/P.3379, Marseille, CPT-CNRS, 1996.
- [56] Innocent (J.-M.) et Torrèsani (B.). – Wavelets and binary coalescences detection. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 4, n° 2, 1997, pp. 113–116.
- [57] Jaffard (S.). – Multifractal formalism for functions. Part I: results valid for all functions. *SIAM J. Math Anal.*, vol. 28, n° 4, 1997, pp. 944–970.
- [58] Jaffard (S.) et Meyer (Y.). – *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*. – *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 1996. vol. 123, n° 587.
- [59] Janssen (A. J. E. M.). – On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane. *Philips J. Res.*, vol. 37, n° 3, 1982, pp. 79–110.
- [60] Janssen (A. J. E. M.). – Optimal property of gaussian window spectrogram. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-39, n° 1, 1991, pp. 202–204.
- [61] Janssen (A. J. E. M.). – Positivity and spread of bilinear time-frequency distributions. *In : The Wigner Distribution, Theory and Applications in Signal Processing*, éd. par Mecklenbräuker (W.) et Hlawatsch (F.). – Elsevier, 1997.

- [62] Jardin (P.). – *Évaluation des performances d'une technique de Fourier glissant (Analyse Spectrale Différentielle) au traitement des signaux de parole.* – Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 1984.
- [63] Jones (D. L.) et Baraniuk (R. G.). – An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, n° 11, 1995, pp. 2361–2371.
- [64] Kay (S. M.) et Boudreaux-Bartels (G. F.). – On the optimality of the Wigner distribution for detection. In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, pp. 1017–1020. – Tampa, 1985.
- [65] Klauder (J. R.). – Path integrals for affine variables. In: *Functional Integration: Theory and Applications*, éd. par Antoine (J.-P.) et Tirapegui (E.). – Plenum Press, 1980.
- [66] Koderà (K.). – *Analyse numérique de signaux géophysiques non-stationnaires.* – Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 1976.
- [67] Koderà (K.), De Villedary (C.) et Gendrin (R.). – A new method for the numerical analysis of nonstationary signals. *Phys. Earth and Plan. Int.*, vol. 12, 1976, pp. 142–150.
- [68] Koderà (K.), Gendrin (R.) et De Villedary (C.). – Analysis of time-varying signals with small BT values. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-26, n° 1, 1978, pp. 64–76.
- [69] Kozek (W.) et Hlawatsch (F.). – A comparative study of linear and nonlinear time-frequency filters. In: *Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 163–166. – Victoria, Canada, 1992.
- [70] Lieb (E. H.). – Integral bounds for radar ambiguity functions and Wigner distributions. *J. Math. Phys.*, vol. 31, n° 3, 1990, pp. 594–599.
- [71] Loughlin (P.), Pitton (J.) et Hannaford (B.). – Approximating time-frequency density functions via optimal combinations of spectrograms. *IEEE Signal Proc. Lett.*, vol. SPL-1, n° 12, 1994, pp. 199–202.
- [72] Maes (S.). – Wastrium : wavelet derived generalized cepstrum, using the synchrosqueezed plane. In: *Proc. Journées GdR TdSI, Temps-Fréquence, Ondelettes et Multirésolution*, pp. 27.1–27.4. – Lyon, 1994.
- [73] Maes (S.). – The synchrosqueezed representation yields a new reading of the wavelet transform. In: *Proc. SPIE – Wavelet applications for Dual Use.* – Orlando, 1995.
- [74] Mallat (S.). – *A wavelet tour of signal processing.* – New York, Academic Press, 1998.
- [75] Mallat (S.) et Hwang (W. L.). – Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-38, n° 2, 1992, pp. 617–643.
- [76] McAulay (R. J.) et Quatieri (T. F.). – Speech analysis–synthesis based on a sinusoidal representation. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-34, n° 4, 1986, pp. 744–754.
- [77] Meyer (Y.) et Xu (H.). – Wavelet analysis and chirps. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 4, n° 4, 1997, pp. 366–379.

- [78] Mohanty (S. D.) et Dhurandhar (S. V.). – Hierarchical search strategy for the detection of gravitational waves from coalescing binaries. *Phys. Rev. D*, vol. 54, n° 12, 1996, pp. 7108–7128.
- [79] Ovarlez (J.-Ph.). – *La transformation de Mellin – Un Outil pour l'Analyse des Signaux à Large-Bande*. – Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 1992.
- [80] Papandreou (A.), Hlawatsch (F.) et Boudreaux-Bartels (G. F.). – The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations – Part I: constant-Q warping, the hyperbolic paradigm, properties and members. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-41, n° 12, 1993, pp. 3425–3444.
- [81] Papandreou (A.), Kay (S. M.) et Boudreaux-Bartels (G. F.). – The use of hyperbolic time-frequency representations for optimum detection and parameter estimation of hyperbolic chirps. *In : Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 369–372. – Philadelphia, 1994.
- [82] Picinbono (B.). – On circularity. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-42, n° 12, 1994, pp. 3473–3482.
- [83] Picinbono (B.). – On instantaneous amplitude and phase of signals. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-45, n° 3, 1997, pp. 552–560.
- [84] Pierson (V.) et Martin (N.). – Watershed segmentation of time-frequency images. *In : Proc. IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Proc.*, pp. 1003–1006. – Halkidiki, 1995.
- [85] Plante (F.), Meyer (G.) et Ainsworth (W. A.). – Speech analysis with the reallocated spectrogram. *In : Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 640–643. – Philadelphia, PN, 1994.
- [86] Preparata (F.) et Shamos (M.). – *Computational geometry. An introduction*. – New York, Springer Verlag, 1985.
- [87] Richard (C.) et Lengellé (R.). – Joint recursive implementation of time-frequency representations and their modified version by the reassignment method. *Sig. Proc.*, vol. 60, n° 2, 1997, pp. 163–179.
- [88] Sathyaprakash (B. S.) et Dhurandhar (D. V.). – Choice of filters for the detection of gravitational waves from coalescing binaries. *Phys. Rev. D*, vol. 44, n° 12, 1991, pp. 3819–3834.
- [89] Sayeed (A. M.) et Jones (D. L.). – Optimal detection using bilinear time-frequency and time-scale representations. *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, n° 12, 1995, pp. 2872–2883.
- [90] Schutz (B.F.). – Gravitational wave sources and their detectability. *Class. Quantum Grav.*, vol. 6, 1989, pp. 1761–1780.
- [91] Seip (K.). – Curves of maximum modulus in coherent state representations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 51, n° 4, 1989, pp. 335–350.
- [92] Stein (E. M.). – *Harmonic analysis*. – Princeton, Princeton Univ. Press, 1993.
- [93] Thorne (K. S.). – Gravitational radiation. *In : 300 Years of Gravitation*, éd. par Hawking (S.W.) et Israel (W.), pp. 330–458. – Cambridge Univ. Press, 1987.

- [94] Torr sani (B.). – *Analyse Continue par Ondelettes*. – Paris, Inter ditions / CNRS  ditions, 1995.
- [95] Unterberger (A.). – The calculus of pseudo-differential operators of Fuchs type. *Comm. Partial Diff. Equ.*, vol. 9, 1984, pp. 1179–1236.
- [96] Van Trees (H. L.). – *Detection, Estimation, and Modulation Theory – Part I*. – New York, Wiley, 1968.
- [97] Whalen (A. D.). – *Detection of Signals in Noise*. – San Diego, Academic Press, 1971.
- [98] Williams (W.), Brown (M.) et Hero (A.). – Uncertainty, information, and time-frequency distributions. *In : Proc. SPIE*, pp. 144–156. – San Diego, CA, 1991.