

Chapitre 2

Quelques exemples de champs de vecteurs de réallocation

Nous avons présenté dans le chapitre précédent le principe de la méthode de réallocation. Il s'agit maintenant d'étudier précisément les quantités mathématiques qu'elle met en jeu. La section 2.1 répertorie, pour le spectrogramme, un certain nombre de situations où les calculs analytiques peuvent être complètement menés sans aboutir à des expressions d'une complexité rédhibitoire. On se concentre ensuite sur le plan temps-échelle. La section 2.2 est, en effet, consacrée à la réallocation du scalogramme de singularités hölderiennes avec comme application directe, la mesure de l'exposant de régularité locale à partir du scalogramme réalloué. On revient, en section 2.3, au plan temps-fréquence en notant toutefois que les calculs qui y sont accomplis, sont intégralement transposables au plan temps-échelle. On traite dans cette section de l'étude statistique des vecteurs de réallocation du spectrogramme en présence de bruit.

2.1 Spectrogramme

Cette section réunit une collection de quelques situations où il est possible d'obtenir une expression algébrique pour les vecteurs de réallocation. Nous aborderons uniquement le cas où la fenêtre d'observation est gaussienne, seule situation où pour des signaux non triviaux, les opérateurs de réallocation s'écrivent simplement.

Pour présenter les résultats de manière compacte, il est utile de rendre sans dimension les quantités que nous calculons. Nous nous intéresserons donc au vecteur de déplacement $\mathbf{r} = ((\hat{t} - t)/\Delta t_h, (\hat{\omega} - \omega)/\Delta \omega_h)^t$ normalisé par la durée Δt_h et la bande $\Delta \omega_h$ de la fenêtre $h(t)$. On résumera ce vecteur par son image dans le plan complexe, qui s'écrit (cf. éq. (1.39)),

$$r = \frac{\hat{t} - t}{\Delta t_h} + i \frac{\hat{\omega} - \omega}{\Delta \omega_h} = \frac{1}{\Delta t_h} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F^{th}}{F} \right\} - \frac{i}{\Delta \omega_h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{F^{dh/dt}}{F} \right\} \quad (2.1)$$

Dans le cas qui nous importe, lorsque la fenêtre $h(t)$ est gaussienne comme définie dans l'éq. (1.40), l'image r du vecteur de réallocation se simplifie en un simple quotient de FCT,

$$r = \frac{1}{\Delta t_h} \frac{F^{th}}{F}, \quad (2.2)$$

où la durée de la fenêtre est égale à $\Delta t_h = \lambda/\sqrt{2}$.

On se propose de donner pour chacun des six signaux test suivants, l'expression algébrique de la FCT $F(t, \omega)$, du spectrogramme $S(t, \omega)$, du champ de vecteur de réallocation $r(t, \omega)$ et du spectrogramme réalloué $\check{S}(t, \omega)$. Les cinq premiers calculs ne sont que de simples remises en forme de ceux effectués dans [68, 4]. Le dernier exemple, signal formé de deux impulsions ou de sa version duale (deux sinusoïdes), est une contribution originale.

2.1.1 Impulsion

Le signal $x(t) = \delta(t - t_0)$ est une impulsion en t_0 .

$$\begin{aligned} F(t, \omega) &= \pi^{-1/4} \lambda^{-1/2} e^{-(t_0-t)^2/(2\lambda^2)} e^{-i\omega t_0} e^{it\omega/2} & S(t, \omega) &= \pi^{-1/2} \lambda^{-1} e^{-(t_0-t)^2/\lambda^2} \\ r(t, \omega) &= \sqrt{2}(t_0 - t)/\lambda & \check{S}(t, \omega) &= \delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le point (t, ω) est déplacé en (t_0, ω) en empruntant le plus court chemin entre (t, ω) et la droite $t = t_0$. Autrement dit, tous les vecteurs de réallocation pointent vers l'instant de l'impulsion, comme illustré en Fig. 2.1.5.

2.1.2 Fréquence

Le signal $x(t) = e^{i\omega_0 t}$ est une fréquence en ω_0 .

$$\begin{aligned} F(t, \omega) &= 2^{1/2} \pi^{1/4} \lambda^{1/2} e^{-(\omega_0-\omega)^2 \lambda^2/2} e^{i\omega_0 t} e^{-it\omega/2} & S(t, \omega) &= 2^{-1} \pi^{1/2} \lambda e^{-(\omega_0-\omega)^2 \lambda^2} \\ r(t, \omega) &= \sqrt{2} \lambda (\omega_0 - \omega) & \check{S}(t, \omega) &= \delta(\omega - \omega_0)/(2\pi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

C'est le cas dual par Fourier du précédent. Tous les vecteurs de réallocation indiquent cette fois la fréquence ω_0 analysée, et ce, parallèlement à l'axe des fréquences c'est-à-dire par le chemin le plus court entre (t, ω) et la droite $\omega = \omega_0$ (cf. Fig. 2.1.5).

2.1.3 Logon Gaussien

Le signal $x(t) = \pi^{-1/4} T^{-1/2} e^{-t^2/(2T^2)}$ est un logon gaussien centré au point $(0, 0)$ du plan temps-fréquence. On note $\Delta t_x = T/\sqrt{2}$ et $\Delta \omega_x = 1/(\sqrt{2}T)$, les durée et bande du signal et $\Delta = \sqrt{\Delta t_h \Delta t_x / (\Delta t_h^2 + \Delta t_x^2)}$.

$$F(t, \omega) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\lambda T}{\lambda^2 + T^2}} \exp\left(-\frac{t^2 + \lambda^2 T^2 \omega^2}{2(\lambda^2 + T^2)}\right) \exp\left(i \frac{\lambda^2 - T^2}{2(\lambda^2 + T^2)} t \omega\right) \quad (2.5)$$

$$= 2 \sqrt{\Delta t_h \Delta t_x} \Delta \exp\left(-\frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{t^2}{\Delta t_h \Delta t_x} + \frac{\omega^2}{\Delta \omega_h \Delta \omega_x}\right)\right) \exp\left(i \frac{\Delta t_h^2 - \Delta t_x^2}{\Delta t_h^2 + \Delta t_x^2} t \omega\right) \quad (2.6)$$

$$S(t, \omega) = 4 \Delta t_h \Delta t_x \Delta^2 \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{t^2}{\Delta t_h \Delta t_x} + \frac{\omega^2}{\Delta \omega_h \Delta \omega_x}\right)\right) \quad (2.7)$$

$$r(t, \omega) = -\frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda^2 + T^2} (t + iT^2\omega) = -\Delta^2 \left(\frac{t}{\Delta t_x} + i \frac{\omega}{\Delta \omega_x} \right) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \check{S}(t, \omega) &= \frac{2\Delta t_h \Delta t_x \Delta^2}{(\Delta \omega_x - \Delta^2 \Delta \omega_h)(\Delta t_x - \Delta^2 \Delta t_h)} \\ &\exp \left(-\frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\Delta t_x}{\Delta t_h} \frac{t^2}{(\Delta t_x + \Delta^2 \Delta t_h)^2} + \frac{\Delta \omega_x}{\Delta \omega_h} \frac{\omega^2}{(\Delta \omega_x + \Delta^2 \Delta \omega_h)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dans le cas $\lambda = T = 1$,

$$F(t, \omega) = \exp \left(-\frac{t^2 + \omega^2}{4} \right) \quad S(t, \omega) = \exp \left(-\frac{t^2 + \omega^2}{2} \right) \quad (2.10)$$

$$r(t, \omega) = -(t + i\omega) / \sqrt{2} \quad \check{S}(t, \omega) = 4 \exp(-2(t^2 + \omega^2)), \quad (2.11)$$

la réallocation fait subir au paquet gaussien initial une homothétie (illustrée en Fig. 2.1.5) de centre $(0, 0)$, le centre du logon, et d'un rapport $1/2$ (contraction).

2.1.4 Modulation linéaire de fréquence

Le signal $x(t)$ est une modulation linéaire de fréquence ou “chirp” linéaire : $x(t) = e^{i\beta t^2/2}$

$$S(t, \omega) = \frac{2\pi^{-1/2}}{\lambda(1/\lambda^4 + \beta^2)} \exp \left(-\frac{1}{1/\lambda^4 + \beta^2} \left(\frac{\beta t - \omega}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

$$r(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda(1/\lambda^4 + \beta^2)} (\beta - i/\lambda^2)(\omega - \beta t) \quad \check{S}(t, \omega) = \frac{\delta(\omega - \beta t)}{(\beta^2 + (2\pi)^2)^{(1/2)}}. \quad (2.13)$$

Dans le cas $\lambda = \beta = 1$ (voir Fig. 2.1.5), on obtient

$$S(t, \omega) = \pi^{-1/2} \exp \left(-\frac{(\omega - t)^2}{2} \right) \quad (2.14)$$

$$r(t, \omega) = \sqrt{2}/2(1 - i)(\omega - t). \quad (2.15)$$

Tous les vecteurs de réallocation pointent exactement sur la ligne de fréquence instantanée $\omega = \beta t$. On retrouve ici, pour le spectrogramme et dans un cas particulier, la propriété de localisation parfaite des distributions réallouées (démontrée dans un cadre général en section 1.18) pour les signaux sur lesquels la distribution de Wigner-Ville est parfaitement localisée.

2.1.5 Modulation linéaire de fréquence, d'enveloppe gaussienne

Le signal $x(t)$ est une modulation linéaire de fréquence d'enveloppe gaussienne : $x(t) = e^{-(1/T^2 - i\beta)t^2/2}$. Ce modèle général à partir duquel les signaux précédents peuvent se déduire (soit directement, soit de

manière asymptotique) est traité en détail dans [68].

$$S(t, \omega) = 2 \frac{\pi^{1/2}}{\lambda \sqrt{(1/\lambda^2 + 1/T^2)^2 + \beta^2}} \exp \left(-\frac{1}{(1/\lambda^2 + 1/T^2)^2 + \beta^2} \left(\left(\beta^2 + \frac{1}{T^4} + \frac{1}{\lambda^2 T^2} \right) t^2 / \lambda^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{T^2} \right) \omega^2 - 2\beta t \omega / \lambda^2 \right) \right) \quad (2.16)$$

$$r(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}/\lambda}{(1/\lambda^2 + 1/T^2)^2 + \beta^2} \left(\left(-\left(\beta^2 + \frac{1}{T^4} + \frac{1}{\lambda^2 T^2} \right) + i \frac{\beta}{\lambda^2} \right) t + \left(\beta - i \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{T^2} \right) \right) \omega \right). \quad (2.17)$$

Dans le cas $T = \lambda = \beta = 1$,

$$S(t, \omega) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{5}} \exp \left(-\frac{3t^2 + 2\omega^2 - 2t\omega}{5} \right) \quad (2.18)$$

$$r(t, \omega) = \sqrt{2} ((-3 + i)t + (1 - 2i)\omega) / 5 \quad (2.19)$$

$$\dot{S}(t, \omega) = 2\sqrt{5\pi} \exp(-(7t^2 - 8t\omega + 3\omega^2)), \quad (2.20)$$

la réallocation résulte en une transformation qui combine les effets d'homothétie et de regroupement autour de la ligne de fréquence instantanée (voir en Fig. 2.1.5).

2.1.6 Somme de deux impulsions ou de deux fréquences

Dans le cas où il est naturel d'écrire le signal comme la somme de deux termes $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ que l'on appellera *composantes* (parce que c'est en ajoutant deux signaux différents que l'on a construit $x(t)$, ou bien parce que l'on observe le résultat de deux phénomènes physiques distincts), le calcul du champ de réallocation devient plus difficile. La nature non linéaire (et plus que bilinéaire) de r fait qu'il ne s'écrit pas comme une simple superposition de r_1 et r_2 (les quantités d'indice 1, resp. 2, feront référence dans la suite, au signal x_1 , resp. x_2). Il ne peut non plus se mettre sous la forme d'une somme de trois termes (deux "auto-termes" et un terme d'interférences) comme c'est le cas pour les distributions bilinéaires. Mais, si l'on invoque la linéarité de la FCT

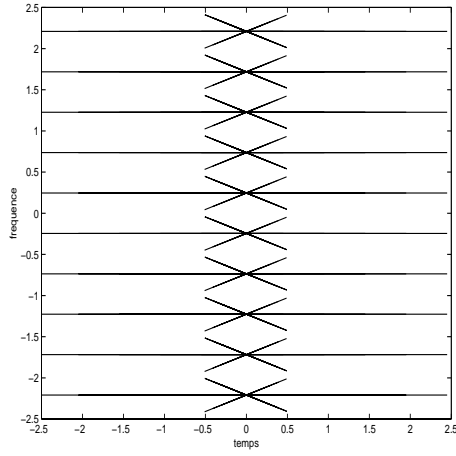
$$r = \frac{1}{\Delta t_h} \frac{F_1^{th} + F_2^{th}}{F_1^h + F_2^h}, \quad (2.21)$$

le champ de vecteur de réallocation s'exprime sous la forme d'une somme pondérée de r_1 et r_2

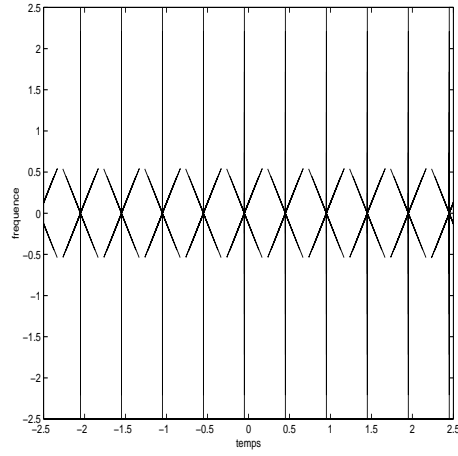
$$r = \frac{F_1^h}{F_1^h + F_2^h} r_1 + \frac{F_2^h}{F_1^h + F_2^h} r_2, \quad (2.22)$$

où les poids sont à valeurs complexes et dépendent du signal (conduisant à une modification à la fois en module et argument). La somme de ces poids est égale à 1, ce qui autorise une interprétation de cette opération en termes de moyenne arithmétique.

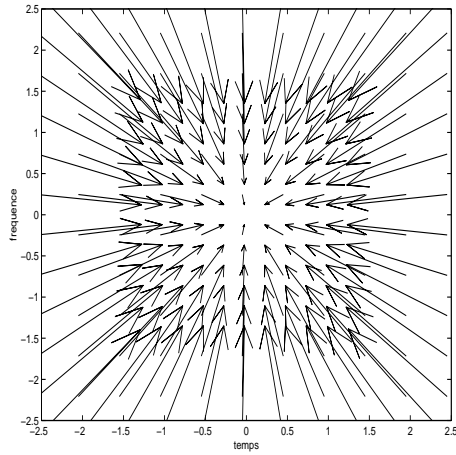
Il est intéressant de traiter en particulier les cas duaux de deux impulsions ou deux fréquences successives. Ces deux exemples vont nous renseigner en effet sur la résolution, i.e., la capacité de séparation, que l'on peut espérer d'un spectrogramme réalloué.



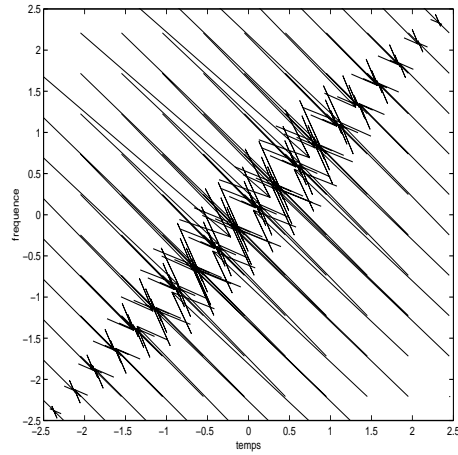
(a) Impulsion, Sect. 2.1.1



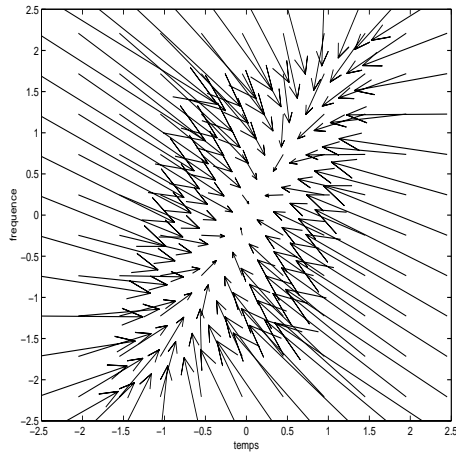
(b) Fréquence, Sect. 2.1.2



(c) Logon gaussien, Sect. 2.1.3



(d) Modulation linéaire de fréquence,
Sect. 2.1.4



(e) Modulation linéaire de fréquence
d'enveloppe gaussienne, Sect. 2.1.5

FIG. 2.1 – *Champ des vecteurs de réallocation pour quelques signaux test. On a regroupé ici les graphes des champs de réallocation pour l'ensemble des signaux jouets choisis (voir texte). Chaque flèche relie le point de calcul (t, ω) , côté encoche, au point de réallocation $(\hat{t}, \hat{\omega})$, côté pointe.*

Considérons tout d'abord le signal composé de deux impulsions réparties de part et d'autre et à égale distance t_0 , de l'origine des temps. La combinaison des éqs. (2.3) et (2.22) aboutit à l'expression suivante pour le champ de réallocation

$$r(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}(t_0 - t)/\lambda}{1 + \exp((-2t_0/\lambda)(t/\lambda + i\lambda\omega))} + \frac{-\sqrt{2}(t_0 + t)/\lambda}{1 + \exp((2t_0/\lambda)(t/\lambda + i\lambda\omega))}. \quad (2.23)$$

Notons que les quotients dans l'éq. (2.23) ne sont pas partout définis. Les termes au dénominateur peuvent en effet s'annuler en des points où les numérateurs sont définis et non nuls. Ceci arrive nécessairement sous la condition $t = 0$, i.e., au milieu des deux impulsions, points en lesquels

$$r(0, \omega) = \sqrt{2} \frac{t_0}{\lambda} \tan(t_0 \omega). \quad (2.24)$$

Le champ de réallocation diverge aux points de fréquence $\omega_k = k\pi/(2t_0)$ où $k \in \mathbb{Z}$. On peut alors se poser la question du bien fondé et de la validité mathématique de la méthode de réallocation. Le calcul de la FCT $F^h(t, \omega)$ du signal total au temps $t = 0$

$$F^h(0, \omega) = F_1^h(0, \omega) + F_2^h(0, \omega) = 2\pi^{-1/4} \lambda^{-1/2} e^{-t_0^2/(2\lambda^2)} \cos(\omega t_0), \quad (2.25)$$

montre qu'en chacun des points singuliers ω_k , le spectrogramme, c'est-à-dire la quantité à réallouer, s'annule (c'est d'ailleurs pourquoi le champ de réallocation y est indéfini). Il n'est alors pas nécessaire de disposer d'une valeur de déplacement lorsqu'il n'y a rien à déplacer. Il reste néanmoins problématique qu'autour de ces points critiques, le champ de réallocation admette de grandes valeurs, ce qui est difficilement acceptable aussi bien d'un point de vue conceptuel que d'un point de vue algorithmique.

La divergence du champ de réallocation est à rapprocher de celle la fréquence instantanée (définie comme la dérivée de la phase du signal analytique) sur un signal formé de la somme de deux fréquences [28]. On peut, en effet, montrer que le *battement* entre les deux fréquences entraîne dans certains cas la divergence à l'infini de la fréquence instantanée, ce qui interdit son interprétation en tant que fréquence locale. Ce que nous observons dans notre cas, est l'effet (dual) du battement entre les deux impulsions sur le temps de retard de groupe (défini comme la dérivée de la phase de la transformée de Fourier du signal analytique). Rappelons que l'opérateur de réallocation en temps au point (t, ω) est aussi égal au temps de retard de groupe du signal multiplié par la fenêtre centrée au point (t, ω) . L'influence du battement se fait d'autant moins sentir, que les impulsions sont distantes l'une de l'autre, ce que l'on peut montrer en reformulant l'éq. (2.23) à l'aide de fonctions trigonométriques

$$r(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left(t_0 \frac{\tanh(t_0 t/\lambda^2) + i \tan(t_0 \omega)}{1 + i \tanh(t_0 t/\lambda^2) \tan(t_0 \omega)} - t \right), \quad (2.26)$$

puis en faisant tendre l'éloignement entre les deux impulsions relatif à la taille de la fenêtre d'observation t_0/λ vers l'infini,

$$r(t, \omega) \approx \sqrt{2} \frac{t_0 - t}{\lambda} \quad \text{si } t > 0 \quad (2.27)$$

$$r(t, \omega) \approx \sqrt{2} \frac{-t_0 - t}{\lambda} \quad \text{si } t < 0, \quad (2.28)$$

expression à comparer avec l'éq. (2.3) dans le cas d'une impulsion isolée.

Réciproquement, lorsque les deux impulsions se rapprochent, il devient alors impossible de séparer les deux événements, comme le corrobore la convergence lorsque t_0/λ tend vers 0 du champ de réallocation vers

$$r(t, \omega) \approx \sqrt{2} \frac{-t}{\lambda}, \quad (2.29)$$

expression du champ de réallocation d'une impulsion isolée à l'instant $t_0 = 0$ (eq. (2.3)). Ces différents comportements sont illustrés en Fig. 2.2.

De manière duale, on peut s'intéresser au champ de réallocation de la superposition de deux exponentielles complexes placées symétriquement autour de la fréquence nulle, en ω_0 et en $-\omega_0$.

$$r(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}i(\omega_0 - \omega)\lambda}{1 + \exp(-2\omega_0\lambda(\omega\lambda - it/\lambda))} + \frac{-\sqrt{2}i(\omega_0 + \omega)\lambda}{1 + \exp(2\omega_0\lambda(\omega\lambda - it/\lambda))}. \quad (2.30)$$

Ces calculs sont à comparer avec les figures, et résultats obtenus pour l'étude de "arête" lors de l'interaction (ou battement) entre deux sinusoïdes [33].

2.2 Scalogramme

Dans le cas temps-échelle, il est également possible de donner l'expression analytique exacte de certains champs de réallocation. C'est ce qui est fait dans [4] pour les cinq premiers signaux test précédents avec le scalogramme à ondelette de Morlet. Nous allons adopter ici un autre point de vue.

Les techniques temps-échelle sont connues pour être bien adaptées à l'analyse des singularités. Ceci est dû au fait que les distributions temps-échelle (comme le scalogramme) réagissent avec un fort contraste à la présence d'un comportement singulier (pris au sens de discontinuités du signal ou de ses dérivées successives) qui, une fois détecté, est facilement caractérisé par une mesure de la croissance locale de la distribution le long des échelles. Il est raisonnable de penser que, dans le cas du scalogramme, le contraste soit amélioré par l'utilisation de la méthode de réallocation. Il nous reste à montrer que la caractérisation de la singularité reste toujours possible avec le scalogramme réalloué. C'est ce que l'on se propose de faire dans cette section et dans le cas d'une singularité de Hölder isolée et pour une ondelette de Klauder.

2.2.1 Estimation de l'exposant de Hölder à l'aide du scalogramme

Famille de singularités hölderiennes

La régularité hölderienne est un raffinement de la notion de différentiabilité qui permet l'extension de cette dernière à certaines fonctions singulières (e.g., les fonctions discontinues ou dont les dérivées successives sont discontinues). Sa définition prend sa source dans une généralisation du développement de Taylor qui s'écrit pour une fonction $f \in C^{N+1}(0)$, i.e., f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $N + 1$ sont continues en 0

$$\forall t \in \Omega \quad f(t) = \sum_{n=0}^N c_n t^n + t^{N+1} O(t), \quad (2.31)$$

où Ω est un voisinage de 0, $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ et $|O(t)| \leq \sup_{s \in \Omega} |f^{(N+1)}(s)|/(N+1)!$.

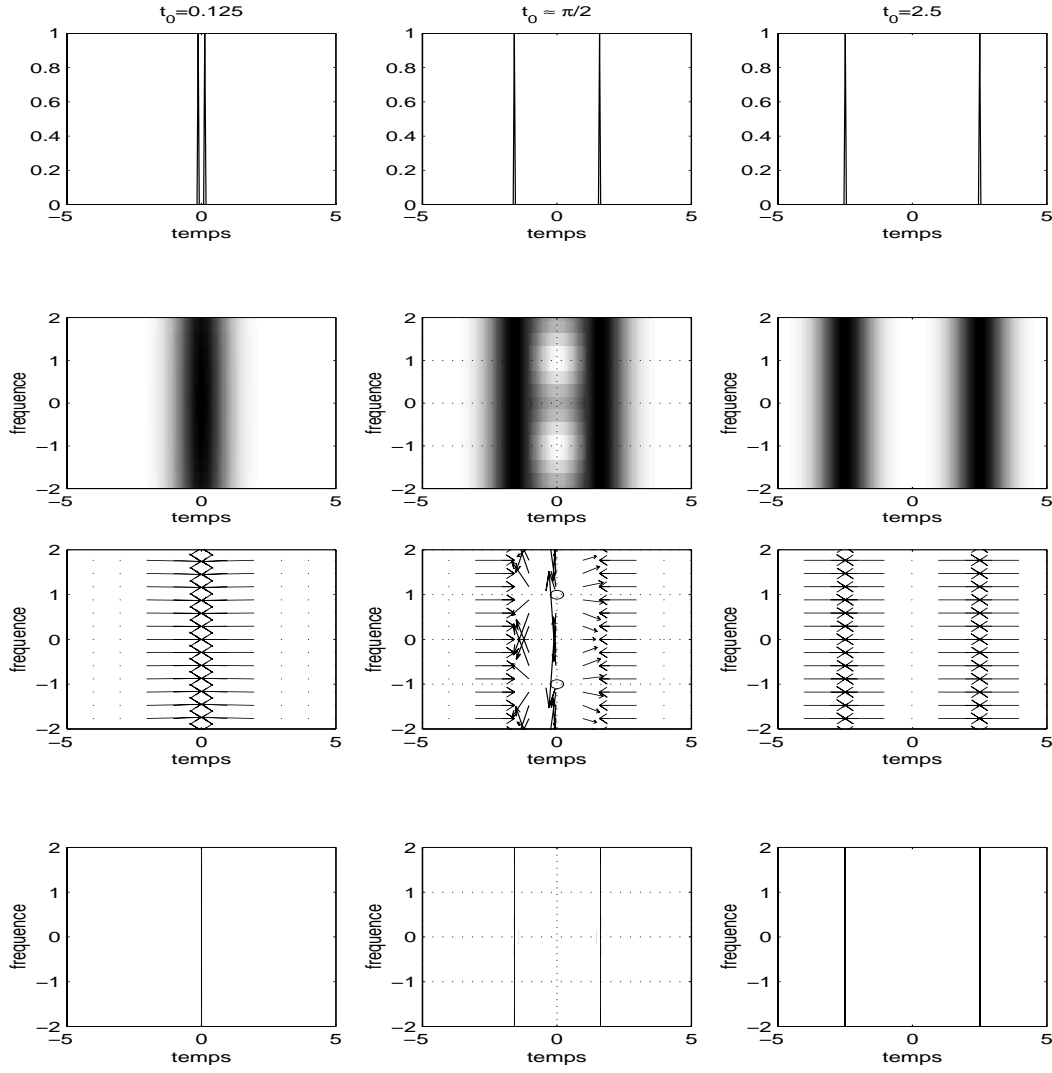


FIG. 2.2 – **Graphe du champ de vecteurs de réallocation d'une suite de deux impulsions.** Différentes configurations sont présentées en fonction de la distance $d = 2t_0$ entre les deux impulsions. Pour les détails, voir en Sect. 2.1.6. **Colonne de gauche :** impulsions proches relativement à la taille λ de la fenêtre d'observation (ici, $\lambda = 1$). Il en résulte un spectrogramme (deuxième ligne), un champ de vecteurs de réallocation (en troisième ligne) et un spectrogramme réalloué (quatrième ligne) proches de ceux que l'on aurait obtenu en analysant une seule impulsion. **Colonne du centre :** d est de l'ordre de la taille de la fenêtre, $d \approx \lambda$. On voit apparaître sur l'axe $t = 0$ les points où le champ de vecteur de réallocation diverge. La valeur de d a été choisie pour que ces points soient séparés d'une distance égale à 2 en unités normalisées (ce sont les points marqués d'un \circ dans le graphe du champ de vecteurs) dans la direction des fréquences. Ils correspondent aux endroits où le spectrogramme s'annule. Les faibles quantités énergétiques qui viennent s'ajouter sur le spectrogramme réalloué (représenté avec une dynamique logarithmique contrairement aux autres) entre les deux impulsions s'interprètent comme des interférences entre les deux impulsions. **Colonne de droite :** la distance d est, cette fois, suffisamment grande pour qu'il n'y ait plus d'interaction entre les champs de vecteurs de réallocation des deux impulsions. Tout se passe comme si le champ de vecteurs de réallocation (idem pour le spectrogramme et le spectrogramme réalloué) du signal total résultait de la somme des champs de chaque impulsion prise séparément.

En procédant dans un même esprit, une fonction $f \in C^\nu(0)$ de régularité hölderienne $\nu \in \mathbb{R}$ est une fonction pour laquelle une approximation locale par un polynôme d'ordre égal¹ à $N = \lfloor \nu \rfloor$ est possible à la différence que sa validité est contrôlée par un monôme impliquant une puissance éventuellement non entière de t [74]

$$\forall t \in \Omega \quad f(t) = \sum_{n=0}^N c_n t^n + t^\nu O(t), \quad (2.32)$$

où $O(t)$ est bornée sur Ω .

Dans ce cadre, il devient naturel de s'intéresser à la fonction $x(t) = |t|^\nu$, prototype de régularité hölderienne ν en 0, où ν est un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On appelle ce genre de fonction, une *singularité hölderienne* d'exposant ν . Le prolongement de la définition d'une singularité hölderienne pour les valeurs entières de ν qui n'ont *a priori* aucune raison d'être exclues, n'est pas trivial. On opte pour une définition du signal en fréquence. On peut montrer que, pour ν réel non entier, la transformée de Fourier de $x(t)$ est égale² au sens des distributions à [51]

$$X(\omega) = 2\Gamma(\nu + 1) \left(-\sin(\nu\pi/2) \right) |\omega|^{-\nu-1} \quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (2.33)$$

- *Entiers naturels impairs*: $\nu = 1, 3, 5, \dots$

Pour les ν entiers impairs positifs, cette équation reste valable par prolongement analytique. Pour ces indices, notons que la singularité est obtenue par un retournement du demi-plan $t < 0$, qui transforme une fonction impaire t^n régulière en une fonction paire $|t|^n$ singulière.

- *Entiers naturels pairs*: $\nu = 0, 2, 4, \dots$

Lorsque $\nu = 0$, $x(t)$ est une constante sur \mathbb{R} sauf en 0 où elle n'est pas définie. La fonction x n'est donc pas singulière au sens que nous nous sommes fixés. On aimerait associer à $\nu = 0$ une singularité qui présente une décroissance spectrale en loi de puissance de la fréquence avec un exposant -1 pour rester conforme à l'éq. (2.33). L'échelon $\text{sgn}(t)$ est un candidat naturel à ce remplacement puisqu'il procède du même principe énoncé plus haut (retournement du demi-plan $t < 0$) mais transformant, cette fois, une fonction paire en une fonction impaire singulière. On généralise ce procédé à tous les ordres ν entiers pairs positifs en employant la fonction $x(t) = \text{sgn}(t)|t|^\nu$ dont la transformée de Fourier respecte la décroissance espérée

$$X(\omega) = 2\nu! (-1)^{(\nu+1)/2} |\omega|^{-\nu-1} \quad \text{si } \nu = 2, 4, \dots \quad (2.34)$$

Notons que cette équation est, en fait, valable pour tous les entiers naturels, $\nu \in \mathbb{N}$.

- *Entiers relatifs pairs*: $\nu = -2, -4, -6, \dots$

Pour les entiers négatifs pairs, on établit le prolongement de l'éq. (2.33) en invoquant le fait que l'opérateur d'inversion par Fourier n'est autre que son conjugué, ce qui mène à [51]

$$X(\omega) = \frac{\pi}{|\nu + 1|!} (-1)^{\nu/2} |\omega|^{-\nu-1}. \quad (2.35)$$

- *Entiers relatifs impairs*: $\nu = -1, -3, -5, \dots$

Il suffit de se convaincre que, pour les entiers négatifs impairs, la distribution de Dirac et ses

1. La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

2. Il y a convergence au sens des fonctions [74] si et seulement si ν est compris entre -1 et 0 .

dérivées d'ordre pair sont les signaux que nous cherchons à une constante multiplicative près : en effet, l'éq. (2.35) donne également la forme de la transformée de Fourier de $x(t) = \pi/(|\nu+1|!) \delta^{(\nu)}(t)$.

En résumé, la forme temporelle du signal que nous emploierons, change selon la valeur de l'indice ν tandis que sa transformée de Fourier conserve la forme générale

$$X(\omega) = A_\nu |\omega|^{-\nu-1}, \quad (2.36)$$

où le facteur d'amplitude vaut :

$$\begin{cases} A_\nu = 2\Gamma(\nu+1) (-\sin(\nu\pi/2)) & \text{si } \nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \\ A_\nu = 2(\nu!) (-1)^{(\nu+1)/2} & \text{si } \nu \in \mathbb{N} \text{ et} \\ A_\nu = \pi(-1)^{\nu/2}/|\nu+1|! & \text{si } \nu \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases} \quad (2.37)$$

Nous avons introduit l'exposant ν en tant qu'exposant de Hölder. Dans la mesure où nous avons engendré dans le domaine fréquentiel, la famille de singularités que nous proposons, on peut s'interroger sur la nature effective *a posteriori* de l'exposant ν et en particulier sur le fait qu'il représente ou non la régularité locale de la fonction au sens de Hölder. Nous répondrons par l'affirmative. En effet, dans des espaces de signaux au comportement singulier simple (signaux sans oscillations, comportant des singularités isolées) comme ceux que nous venons d'introduire, le lien entre exposant de décroissance spectrale et Hölder est maintenant bien établi. Le formalisme est cependant critiquable pour les exposants de Hölder négatifs qui nécessitent des développements mathématiques sophistiqués [57] dans lesquels nous n'entrerons pas. Nous nous satisferons de notre définition en fréquence de la famille des singularités isolées. Notons par ailleurs que parmi toutes les singularités qui sont envisageables, nous avons sélectionné celles dont la transformée de Fourier est à phase constante sur \mathbb{R} .

Transformée en ondelettes d'une singularité hölderienne

Compte tenu de ce que nous venons de montrer, la transformée en ondelettes à l'échelle a et au temps b

$$T^\psi(a, b) = \int X(\omega) \sqrt{a} \Psi^*(a\omega) e^{i\omega b} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (2.38)$$

d'un tel signal s'interprète comme l'action de la distribution (2.36) sur une fonction test. Si $\Psi(\omega)$ est une fonction à décroissance rapide sur \mathbb{R}^+ et s'annule suffisamment vite en 0 pour lever toutes les divergences de la fonction à intégrer, alors on peut faire la sommation

$$T^\psi(a, b) = \int A_\nu |\omega|^\alpha \sqrt{a} \Psi^*(a\omega) e^{i\omega b} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.39)$$

$$= A_{-\alpha-1} a^{-(\alpha+1/2)} i^\alpha \left(\int_0^{+\infty} (i\omega)^\alpha \Psi(\omega) e^{-i\omega(b/a)} d\omega / (2\pi) \right)^*, \quad (2.40)$$

où $\alpha = -\nu - 1$ et réécrire l'éq. (2.40) en faisant apparaître la dérivée fractionnaire³ d'ordre α de ψ , [53]

$$T^\psi(a, b) = A_{-\alpha-1} a^{-(\alpha+1/2)} i^\alpha \psi^{(\alpha)*}(-b/a). \quad (2.41)$$

3. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre α de g comme suit : $g^{(\alpha)}(x) = \int_0^{+\infty} (i\omega)^\alpha G(\omega) e^{i\omega x} \frac{d\omega}{2\pi}$.

On peut déduire de l'éq. (2.41), deux caractéristiques importantes de la structure du scalogramme (module carré de $T^\psi(a, b)$) d'une singularité hölderienne. D'une part, il est clair que toute l'énergie est concentrée dans le support de $|\psi^{(\alpha)}(-b/a)|$ qui définit dans le plan temps-échelle un domaine conique centré sur la ligne $b = 0$ que l'on appelle *cône d'influence* de la singularité. D'autre part, au point $b = 0$, la relation [47]

$$\log(|T^\psi(a, 0)|^2) = \log(|A_\nu \psi^{-\nu-1}(0)|^2) + (2\nu + 1) \log(a), \quad (2.42)$$

entre scalogramme et l'exposant de Hölder ν de la singularité rend possible la mesure de ν par celle de la pente locale du scalogramme le long des échelles dans un diagramme log-log. En pratique, les points singuliers pouvant être multiples et de positions inconnues *a priori*, on procède à la mesure de l'exposant ν sur chaque ligne de maxima (ou lignes de crête) du scalogramme [75].

2.2.2 Estimation de l'exposant de Hölder à l'aide du scalogramme réalloué

L'idée sous-jacente à l'utilisation du scalogramme réalloué pour l'estimation de l'exposant de Hölder est que les opérateurs de réallocation du scalogramme (cf. éq. 1.79)

$$\hat{b} = b + a \operatorname{Re} \left\{ \frac{T^{t\psi}}{T^\psi} \right\} \quad \hat{a} = - \frac{a\omega_0}{\operatorname{Im} \{ T^{d\psi/dt} / T^\psi \}}, \quad (2.43)$$

(ω_0 est la fréquence centrale de l'ondelette ψ) vont concentrer l'information contenue dans le cône d'influence, par conséquent augmenter le contraste de la représentation, ce qui permettra vraisemblablement de rendre les stratégies d'extraction de lignes de crêtes plus robustes au bruit. La difficulté vient du fait qu'en modifiant le scalogramme par la réallocation, on perd la relation (2.42), fondamentale pour la mesure de l'exposant ν . Nous allons, pour une ondelette particulière, montrer que nous pouvons trouver une relation similaire à (2.42) pour le scalogramme réalloué. Sans résoudre complètement le problème de la détection et de la caractérisation de singularité *via* le scalogramme réalloué, les calculs faits ici montrent que l'intuition de départ est théoriquement acceptable mais révèlent des problèmes de simulations numériques, en particulier d'échantillonnage du plan temps-échelle.

Transformée en ondelettes de Klauder d'une singularité hölderienne

La condition *sine qua non* à la résolution de notre problème est le choix des ondelettes de Klauder [65],

$$\kappa_{\beta,\gamma}(t) = \frac{C_{\beta,\gamma}}{(\gamma - it)^{\beta+1}}, \quad (2.44)$$

où $C_{\beta,\gamma} = (2\gamma)^{\beta+1/2} \Gamma(\beta+1) / \sqrt{2\pi\Gamma(2\beta+1)}$ est la constante de normalisation à l'énergie unité. Ces ondelettes sont centrales pour les décompositions à temps et échelle continus, au même titre que les gaussiennes pour les décompositions temps-fréquence (ce sont par exemple les signaux d'encombrement minimum dans le plan temps-échelle). L'utilisation des ondelettes de Klauder vont nous permettre ici d'obtenir l'expression analytique de toutes les grandeurs utiles (scalogramme, champ de vecteurs de réallocation, scalogramme réalloué). Leur transformée de Fourier est

$$K_{\beta,\gamma}(\omega) = C_{\beta,\gamma} \frac{2\pi}{\Gamma(\beta+1)} \omega^\beta e^{-\gamma\omega} U(\omega), \quad (2.45)$$

où $U(\cdot)$ est l'échelon de Heaviside, sous les conditions d'existence $\beta > -1/2$ et $\gamma > 0$. Elles appartiennent donc à l'ensemble des fonctions tests, identiquement nulles sur \mathbb{R}^- , à décroissance rapide à l'infini sur \mathbb{R}^{+*} . Le contrôle de la décroissance de $K_{\beta,\gamma}(\omega)$ en 0 s'effectue par le paramètre β par lequel il est donc possible de garantir la convergence de l'intégrale dans l'éq. (2.40). Les ondelettes de Klauder pour lesquelles $\alpha + \beta > -1$ vérifient donc les hypothèses de validité de l'éq. (2.41). De plus, la dérivation fractionnaire est une opération qui laisse invariante la famille des ondelettes de Klauder, en effet :

$$\kappa_{\beta,\gamma}^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{i}{2\gamma}\right)^\alpha \sqrt{\frac{\Gamma(2(\alpha + \beta) + 1)}{\Gamma(2\beta + 1)}} \kappa_{\alpha+\beta,\gamma}(t), \quad (2.46)$$

la validité de cette équation étant soumise aux deux inégalités

$$\beta > -1/2 \quad \alpha + \beta > -1/2, \quad (2.47)$$

qui président à l'existence de $\kappa_{\beta,\gamma}^{(\alpha)}$ et $\kappa_{\alpha+\beta,\gamma}$. Cette propriété nous permet d'obtenir la transformée en ondelettes (2.41), avec $\psi = \kappa_{\beta,\gamma}$, sans faire appel à la dérivée fractionnaire,

$$T^{\kappa_{\beta,\gamma}}(a, b) = A_{-\alpha-1}(2\gamma a)^{-\alpha} \sqrt{\frac{\Gamma(2(\alpha + \beta) + 1)}{\Gamma(2\beta + 1)}} \frac{1}{\sqrt{a}} \kappa_{\alpha+\beta,\gamma}^*(-b/a). \quad (2.48)$$

Ce qui nous donne avec l'éq. (2.44) une expression algébrique exacte de (2.41)

$$T^{\kappa_{\beta,\gamma}}(a, b) = A_{-\alpha-1}(2\gamma a)^{\beta+1/2} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\sqrt{\Gamma(2\beta + 1)}} (\gamma a - ib)^{-(\alpha+\beta+1)}, \quad (2.49)$$

d'où l'on peut déduire le scalogramme par quadrature,

$$S^{\kappa_{\beta,\gamma}}(a, b) = A_{-\alpha-1}^2 (2\gamma a)^{2\beta+1} \frac{\Gamma^2(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(2\beta + 1)} |\gamma a - ib|^{-2(\alpha+\beta+1)}. \quad (2.50)$$

Opérateurs de réallocation du scalogramme d'une singularité hölderienne

La famille des ondelettes de Klauder présente également la caractéristique de rester stable vis-à-vis de la dérivation et de la multiplication par t , i.e., des ondelettes de Klauder, transformées par ces opérations, peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire d'ondelettes de Klauder,

$$d\kappa_{\beta,\gamma}/dt = i/(2\gamma) \sqrt{(2\beta + 3)(2\beta + 2)} \kappa_{\beta+1,\gamma}(t) \quad (2.51)$$

$$x\kappa_{\beta,\gamma}(t) = i\gamma \sqrt{\frac{2\beta}{2\beta - 1}} \kappa_{\beta-1,\gamma}(t) - i\gamma \kappa_{\beta,\gamma}(t). \quad (2.52)$$

Chacune de ces équations est contrainte par une paire d'inégalités similaires à (2.47); nous en ferons le bilan en fin de calcul. Lorsqu'elles sont combinées avec l'éq. (1.79)

$$\hat{b}(a, b) = b + \gamma a \sqrt{\frac{2\beta}{2\beta - 1}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{T^{\kappa_{\beta-1,\gamma}}}{T^{\kappa_{\beta,\gamma}}} \right\} (a, b) \quad (2.53)$$

$$\hat{a}(a, b) = \frac{2\gamma a \omega_0}{\sqrt{2(\beta + 1)(2\beta + 1)}} \operatorname{Re}^{-1} \left\{ \frac{T^{\kappa_{\beta+1,\gamma}}}{T^{\kappa_{\beta,\gamma}}} \right\} (a, b), \quad (2.54)$$

($\text{Re}^{-1}\{\cdot\}$ doit être compris comme $1/\text{Re}\{\cdot\}$) et avec l'éq. (2.49) (sous les conditions d'application de cette formule)

$$\hat{b}(a, b) = b + \gamma a \sqrt{\frac{2\beta}{2\beta - 1}} \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\gamma a} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\sqrt{\Gamma(2\beta - 1)}} \frac{\sqrt{\Gamma(2\beta + 1)}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (\gamma a - ib) \right\} \quad (2.55)$$

$$\hat{a}(a, b) = \frac{2\gamma a \omega_0}{\sqrt{2(\beta + 1)(2\beta + 1)}} \text{Re}^{-1} \left\{ (2\gamma a) \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\sqrt{\Gamma(2\beta + 3)}} \frac{\sqrt{\Gamma(2\beta + 1)}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (\gamma a - ib)^{-1} \right\}, \quad (2.56)$$

elles nous permettent de déduire les expressions des opérateurs de réallocation qui se réduisent à :

$$\hat{b}(a, b) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} b \quad (2.57)$$

$$\hat{a}(a, b) = \frac{\omega_0}{\alpha + \beta + 1} \frac{(\gamma a)^2 + b^2}{\gamma a}. \quad (2.58)$$

Pour finir le calcul, on peut remplacer ω_0 par son expression en fonction des paramètres idoines $\omega_0 = \int_0^{+\infty} \xi |K_{\beta, \gamma}(\xi)|^2 d\xi / (2\pi) = (\beta + 1/2)/\gamma$. Ce raisonnement est valide sous réserve que α et β respectent les contraintes de validité cumulées de toutes les équations utilisées (convergence de l'intégrale des transformées en ondelettes, existence des ondelettes de Klauder) qui se résument en les deux inégalités suivantes

$$\beta > 1/2 \quad \alpha + \beta > 1/2. \quad (2.59)$$

Remarque 2.1. Remarquons que pour $\alpha = 0$, \hat{b} est uniformément nul, ce qui corrobore dans un cas particulier la propriété générale de localisation parfaite du scalogramme réalloué d'une impulsion de Dirac.

Remarque 2.2. Étant admis que les paramètres α et β vérifient (2.59), leur somme $(\alpha + \beta)$ doit être *a fortiori* positive. Si α est négatif alors l'éq. (2.57) prouve que les points du demi-plan $b > 0$ sont réalloués dans le demi-plan $\hat{b} < 0$ et vice-versa. Donc, les flèches des vecteurs de réallocation se croisent, ce qui nous est difficile à interpréter.

Remarque 2.3. Il est clair par l'éq. (2.57) que le scalogramme réalloué est d'autant plus concentré autour de l'instant de la singularité que β est grand. Les ondelettes de Morlet (gaussiennes modulées) deviennent intéressantes dans cette situation puisqu'elles peuvent s'obtenir *via* la famille des ondelettes de Klauder en limite bande étroite par l'équivalence [79]

$$K_{\beta, \gamma}(\omega) = \pi^{-1/4} \beta^{-1/4} \gamma^{1/2} \exp(-\gamma^2(\omega - \beta/\gamma)^2/(2\beta) + O(\omega - \beta/\gamma)^3), \quad (2.60)$$

lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$, β/γ étant maintenu constant.

En prenant la même limite dans les éqs. (2.57) et (2.58), on obtient une approximation à l'ordre 3 des opérateurs de réallocation pour le scalogramme à ondelette de Morlet,

$$\hat{b}(a, b) \approx 0 \quad \hat{a}(a, b) \approx a, \quad (2.61)$$

qui étaient jusqu'à lors inaccessibles car faisant appel à des fonctions spéciales difficilement manipulables. L'éq. (2.61) montre clairement que le scalogramme réalloué à ondelette de Morlet est parfaitement localisé au point d'occurrence de la singularité. Qui plus est, les quantités réallouées au point $(0, \hat{a})$ sont celles qui appartiennent à la ligne $a = \hat{a}$. Ce résultat avait déjà été prouvé pour une impulsion de Dirac dans [40].

Scalogramme réalloué d'une singularité hölderienne

• Cône de singularité.

Nous disposons maintenant de toute l'armada nécessaire pour calculer le scalogramme réalloué. Nous allons procéder à un examen préliminaire des opérateurs de réallocation (2.57) et (2.58) pour connaître la manière avec laquelle ils modifient le cône d'influence de la singularité.

La dérivée de $\hat{a}(a, b)$ prise comme une fonction de a uniquement, b étant fixé à une valeur positive,

$$\frac{\partial \hat{a}(a, b)}{\partial a} = \frac{\omega_0}{\alpha + \beta + 1} \frac{\gamma^2 a^2 - b^2}{\gamma a^2}, \quad (2.62)$$

est négative de $-\infty$ à $a_0 = b/\gamma$, seule valeur dans \mathbb{R}^{+*} où elle s'annule en changeant de signe. La fonction $a \mapsto \hat{a}(a, b)$ possède donc un seul minimum global atteint au point a_0 ,

$$\hat{a}(a, b) \geq \hat{a}(a_0, b) = \frac{2b\omega_0}{\alpha + \beta + 1} = \frac{2\omega_0(\alpha + \beta)}{\alpha(\alpha + \beta + 1)} \hat{b}. \quad (2.63)$$

Si b est négatif, le minimum se situe en $a_0 = -b/\gamma$. Par conséquent, toutes les valeurs du scalogramme sont réallouées au-dessus (et donc entre) les deux droites d'équations $\hat{a} = \pm(2\beta + 1)(\alpha + \beta)/[\alpha\gamma(\alpha + \beta + 1)]\hat{b}$. Le cône d'influence de la singularité pour le scalogramme réalloué est, chose nouvelle et contrairement au scalogramme, délimité strictement par ces deux droites frontières. Le scalogramme réalloué est uniformément nul à l'extérieur de ce domaine. L'angle θ entre les deux limites est contrôlé par α/β et tend vers 0 lorsque ce rapport tend vers 0, comme l'indique l'équivalence $\tan \theta \approx \gamma(\beta + 1)/(2\beta + 1)(\alpha/\beta)$ si $\alpha/\beta \rightarrow 0$. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque la singularité s'approche de l'impulsion de Dirac ($\alpha = 0$) à β fixé.

• Scalogramme réalloué : cas général

La manière avec laquelle nous allons calculer le scalogramme réalloué prend le contre-pied de la procédure utilisée en pratique. On considère un point (\hat{a}_0, \hat{b}_0) dans le cône de singularité, on veut savoir quels sont les points (a, b) qui viennent s'y réallouer. Autrement dit, on veut résoudre pour \hat{a}_0 et \hat{b}_0 donnés, le système d'équation

$$\hat{a}(a, b) = \hat{a}_0 \quad \hat{b}(a, b) = \hat{b}_0, \quad (2.64)$$

qui, avec les éqs. (2.58) et (2.57), s'écrit

$$b - (1 + \beta/\alpha)\hat{b}_0 = 0 \quad (2.65)$$

$$(\gamma a - C\hat{a}_0)^2 + b^2 - (C\hat{a}_0)^2 = 0, \quad (2.66)$$

où $C = (\alpha + \beta + 1)/(2\omega_0)$. Dans le plan (b, a) , ces équations définissent une droite, éq. (2.65), et une ellipse, éq. (2.66) (plus précisément, on reconnaît un cercle dans le plan $(b, \gamma a)$ de centre $C\hat{a}_0$ et passant par l'origine) qui ont les points solutions à leur intersection. Si (\hat{a}_0, \hat{b}_0) se trouve dans le cône de singularité, cette droite et cette ellipse se coupent en deux points (b, a_+) et (b, a_-) (ou un point double) de coordonnées (voir Fig. 2.3)

$$(b, \gamma a_{\pm}) = \left((1 + \beta/\alpha)\hat{b}_0, C\hat{a}_0 \pm \sqrt{(C\hat{a}_0)^2 - (1 + \beta/\alpha)^2 \hat{b}_0^2} \right), \quad (2.67)$$

desquelles on déduit le scalogramme réalloué sous la forme d'une somme de deux termes

$$\check{S}(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = S^{\kappa_{\beta, \gamma}}(b, a_+)(\hat{a}_0/a_+)^2 + S^{\kappa_{\beta, \gamma}}(b, a_-)(\hat{a}_0/a_-)^2. \quad (2.68)$$

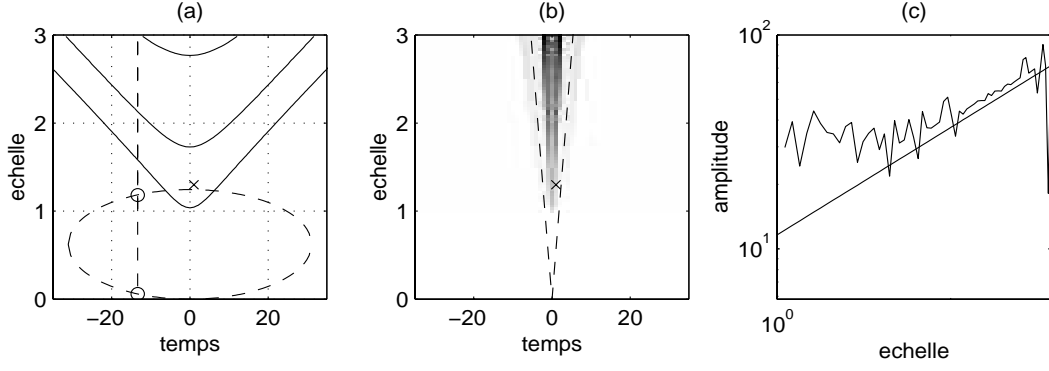


FIG. 2.3 – **Réallocation du scalogramme avec ondelette de Klauder** ($\beta = 20$, $\gamma = 50$) **d'une singularité hölderienne d'exposant** $\nu = 1/3$ ($\alpha = -4/3$). (a) Les valeurs du scalogramme qui viennent se réallouer au point marqué d'une croix sont celles des points (marqués d'un cercle) situés à l'intersection de l'ellipse et de la droite définies par le système d'éqs. (2.65) et (2.66). Le scalogramme est indiqué par des lignes de niveaux. (b) Après réallocation, le scalogramme est contenu entre deux droites (en pointillé) qui délimitent le cône d'influence de la singularité. (c) On vérifie l'adéquation entre la pente du scalogramme réalloué à l'instant de la singularité et celle prédite par l'éq. (2.72). Les écarts que l'on observe aux petites et grandes échelles sont dus aux effets de bord.

On remplace dans l'équation précédente l'expression obtenue pour le scalogramme en éq. (2.50)

$$\check{S}(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = \hat{C} \sum_{\epsilon=\pm} \frac{(\gamma a_\epsilon)^{2\beta+1} (\gamma \hat{a}_0 / \gamma a_\epsilon)^2}{((\gamma a_\epsilon)^2 + b^2)^{\alpha+\beta+1}}, \quad (2.69)$$

où $\hat{C} = A_{-\alpha-1}^2 2^{2\beta+1} \Gamma^2(\alpha + \beta + 1) / \Gamma(2\beta + 1)$, que l'on simplifie avec l'éq. (2.66)

$$\check{S}(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = \hat{C} (\gamma \hat{a}_0)^2 \sum_{\epsilon=\pm} \frac{(\gamma a_\epsilon)^{2\beta-1}}{(2C \hat{a}_0 a_\epsilon)^{\alpha+\beta+1}}, \quad (2.70)$$

pour obtenir avec l'éq. (2.67) la forme algébrique du scalogramme réalloué

$$\check{S}(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = \hat{C} \frac{\gamma^{\alpha+\beta+3} \hat{a}_0^{-(\alpha+\beta-1)}}{(2C)^{\alpha+\beta+1}} \sum_{\epsilon=\pm} \left(C \hat{a}_0 + \epsilon \sqrt{(C \hat{a}_0)^2 - (1 + \beta/\alpha)^2 \hat{b}_0^2} \right)^{-\alpha+\beta-2}. \quad (2.71)$$

Utilisée à l'instant de la singularité, i.e., en $\hat{b}_0 = 0$, l'éq. (2.71) montre que le scalogramme réalloué d'une singularité hölderienne

$$\check{S}(\hat{a}_0, 0) = \hat{C} \frac{\gamma^{\alpha+\beta+3}}{(2C)^{2\alpha-3}} \hat{a}_0^{-(2\alpha+1)}, \quad (2.72)$$

évolue selon les échelles avec une loi de puissance similaire au scalogramme (eq. (2.42)). Ce résultat est important dans la mesure où il montre qu'il est non seulement possible de *relier la décroissance du scalogramme réalloué à l'exposant de singularité* mais, aussi qu'il suffit d'utiliser un lien identique à celui obtenu pour le scalogramme.

- *Scalogramme réalloué: cône de singularité étroit*

Néanmoins, pour certaines valeurs de ν , on doit remettre en question l'éq. (2.72) :

- la résolution du système éqs. (2.65) et (2.66) exclut le cas $\alpha = 0$, i.e, $\nu = -1$,
- lors des simulations numériques, on observe, pour les valeurs de ν proches de -1 , un écart entre le résultat théorique et celui simulé qu'il faut donc expliquer.

La raison de la différence entre simulation et théorie est, qu'à échantillonnage du plan temps-échelle fixé, il devient impossible de bien échantillonner le cône d'influence lorsque ses deux droites frontières sont séparées d'un angle très aigu ($\theta \ll 1$). Il est alors préférable de considérer que toutes les contributions réallouées à la même échelle le sont finalement en un seul point du plan temps-échelle (dans le calcul précédent, seulement deux valeurs peuvent se réallouer en un point). En procédant de la sorte, nous pourrions traiter simultanément le cas $\nu = -1$ puisqu'il correspond à la situation où tout le scalogramme se trouve concentré à l'instant de la singularité (cf. Rem 2.1). Dans ces conditions, le scalogramme réalloué s'écrit sur la ligne $b = 0$ comme la somme (voir Fig. 2.4)

$$\check{S}(\hat{a}_0, 0) = \iint S(a, b) \delta(\hat{a}(a, b) - \hat{a}_0) (\hat{a}_0/a)^2 da db, \quad (2.73)$$

du scalogramme sur le chemin dans le plan temps-fréquence décrit par l'éq. (2.66). Pour faire la sommation, on sépare l'ellipse (2.66) en deux parties, l'une supérieure, notée $(b, a_+(b))$, et l'autre inférieure $(b, a_-(b))$ et on effectue l'intégrale, I_+ et I_- , sur chacune d'elles. Les coordonnées polaires ($b = C \hat{a}_0 \cos \theta$, $a = C \hat{a}_0 (1 + \sin \theta)/\gamma$) sont la paramétrisation naturelle du chemin le long duquel nous intégrons. Si θ varie de π et 0, la somme se fait sur la partie supérieure

$$I_+ = \int_{\pi}^0 S(a_+(C \hat{a}_0 \cos \theta), C \hat{a}_0 \cos \theta) \left(\frac{\hat{a}_0}{a_+(C \hat{a}_0 \cos \theta)} \right)^2 (-C \hat{a}_0 \sin \theta) d\theta, \quad (2.74)$$

qui, avec éq. (2.50), nous conduit à

$$I_+ = 2^{-(\alpha+\beta+1)} \hat{C} C^{-2\alpha} \gamma^2 \hat{a}_0^{-2\alpha} \int_0^{\pi} (1 + \sin \theta)^{-2\alpha-3} \sin \theta d\theta. \quad (2.75)$$

Pour la partie inférieure, θ court de $-\pi$ à 0,

$$I_- = 2^{-(\alpha+\beta+1)} \hat{C} C^{-2\alpha} \gamma^2 \hat{a}_0^{-2\alpha} \int_0^{\pi} (1 - \sin \theta)^{-2\alpha-3} \sin \theta d\theta. \quad (2.76)$$

Le scalogramme réalloué en $\hat{b}_0 = 0$ s'obtient en parcourant entièrement l'ellipse éq. (2.66), donc en faisant la somme de I_+ et I_- ,

$$\check{S}(\hat{a}_0, 0) = 2^{-(\alpha+\beta+1)} \hat{C} C^{-2\alpha} \gamma^2 \hat{a}_0^{-2\alpha} \int_0^{\pi} ((1 + \sin \theta)^{-2\alpha-3} + (1 - \sin \theta)^{-2\alpha-3}) \sin \theta d\theta. \quad (2.77)$$

Le scalogramme réalloué varie maintenant en $\check{S}(\hat{a}_0, 0) \sim \hat{a}_0^{-2\alpha}$ ce que confirment les simulations en Fig. 2.4.

- *En conclusion*

Nous avons prouvé dans le cas particulier des ondelettes de Klauder que le scalogramme réalloué présente une décroissance d'amplitude le long des échelles, similaire au scalogramme, autorisant par

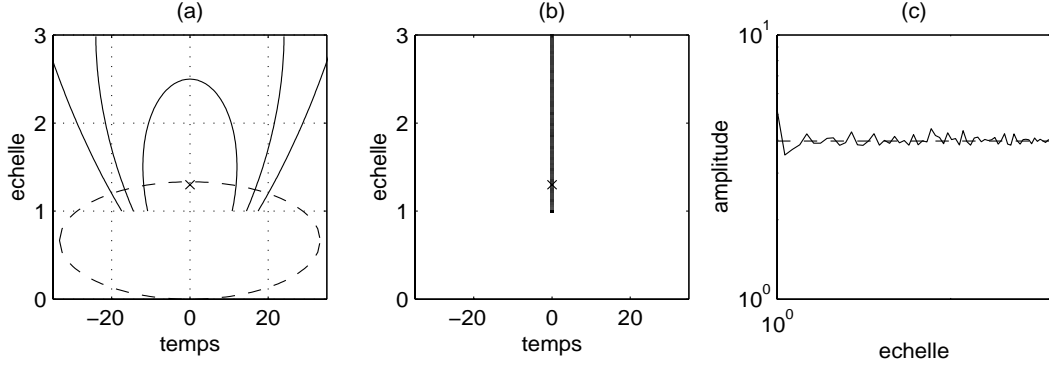


FIG. 2.4 – **Réallocation du scalogramme avec ondelette de Klauder** ($\beta = 20$, $\gamma = 50$) **d’une singularité hölderienne d’exposant $\nu = -1$ ($\alpha = -0$).** (a) Tout le scalogramme se trouve regroupé à l’instant de la singularité. La valeur du scalogramme réalloué (b) au point marqué d’une croix résulte de l’intégration du scalogramme le long de l’ellipse (en pointillé) définie en éq. (2.66). (c) On vérifie la superposition de la coupe du scalogramme réalloué à l’instant de la singularité avec la loi de décroissance théorique (2.77).

là même, son utilisation pour la mesure de singularité locale des signaux. Néanmoins, la mise en pratique d’un tel algorithme nécessite quelques prises de précaution : pour appliquer la formule générale (2.72), il faut que le cône d’influence de la singularité soit correctement échantillonné. Dans le cas contraire, on appliquera l’éq. (2.77). Pour finir, les résultats obtenus ici peuvent être étendus asymptotiquement aux ondelettes de Morlet par les approximations faites en Remarque 2.3. Ces résultats sont en cohérence avec les simulations montrées dans [40] pour les exposants de Hölder négatifs. Ce n’est pas le cas pour les exposants de Hölder positifs. Une étude précise de la validité des approximations faites ici et des conditions d’échantillonnage employées pour les simulations serait nécessaire pour donner une raison à cela.

2.3 Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme

Dans les sections précédentes, nous avons décortiqué l’action de la méthode de réallocation dans un contexte purement déterministe, i.e. lorsque les signaux sont totalement connus. L’objet de cette section est de présenter ce qui se passe lorsque le signal devient aléatoire, et en particulier si du bruit (additif) vient perturber une observation complètement déterminée. Nous nous limiterons à l’étude du spectrogramme, mais il est possible de reproduire ces calculs pour celui du scalogramme. Notons que les résultats obtenus ici peuvent s’appliquer également aux méthodes “arête et squelette”. Ces contributions peuvent être retrouvées au grand complet dans [22] ou inversement sous forme condensée dans [23].

Pour cette étude, on se restreindra au cas d’un bruit additif complexe $n(t)$, signal analytique d’un bruit réel blanc et gaussien, dont les parties réelle et imaginaire sont liées par la transformation de

Hilbert⁴,

$$\text{Im}\{n(t)\} = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int \frac{\text{Re}\{n(s)\}}{t-s} ds \quad (2.78)$$

et pour lequel, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{E}[\text{Re}\{n(t)\}\text{Re}\{n(s)\}] = \mathbf{E}[\text{Im}\{n(t)\}\text{Im}\{n(s)\}] = \frac{\sigma^2}{2} \delta(t-s) \quad (2.79)$$

$$\mathbf{E}[n(t)] = 0 \quad \mathbf{E}[n(t)n(s)] = 0, \quad (2.80)$$

la dernière équation traduisant la circularité totale de $n(t)$ [82].

2.3.1 Statistiques des opérateurs de réallocation du spectrogramme de Gabor

Nous avons déjà vu (équ. (1.42)) que, dans le cas où la fenêtre h est gaussienne, l'image complexe du vecteur de réallocation réduit se mettait sous la forme du quotient des FCTs, $F_1 = F_x^h(t, \omega)$ et $F_2 = F_x^{th}(t, \omega)$,

$$r = \frac{1}{\Delta t_h} \frac{F_2}{F_1}, \quad (2.81)$$

qui, si le signal est gaussien, sont elles-mêmes des variables aléatoires gaussiennes. On s'attend donc à obtenir, pour le vecteur de réallocation, une densité de probabilité du type Cauchy.

Bruit seul

Dans le cas “bruit seul”, le signal observé est $x(t) = n(t)$. Il est facile de vérifier que les corrélations $\mathbf{E}[F_1 F_1]$, $\mathbf{E}[F_2 F_2]$ et $\mathbf{E}[F_1 F_2]$ sont toutes nulles. Compte tenu des propriétés du filtrage linéaire et de la circularité, le vecteur $\mathbf{F} = [F_1 F_2]^t$ est un vecteur gaussien centré totalement circulaire.

La matrice d'autocorrélation $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}[\mathbf{F} \mathbf{F}^\dagger]$ caractérise donc totalement le vecteur \mathbf{F} . Chacun de ses éléments, les moments du deuxième ordre de \mathbf{F} , peut être évalué par la formule des interférences si ω est tel que $h(t) \exp(i\omega t)$ ait un support fréquentiel quasiment contenu dans les fréquences positives (pour des détails à ce sujet, voir en annexe C.1), i.e., pour des valeurs de ω supérieures à la demi-largeur en fréquence de h ,

$$\mathbf{E}[F_1 F_1^*] = 2\sigma^2 \quad \mathbf{E}[F_2 F_2^*] = 2\sigma^2 \Delta t_h^2 \quad \mathbf{E}[F_1 F_2^*] = 0, \quad (2.82)$$

(h est d'énergie unité), ce qui définit complètement la densité de probabilité de \mathbf{F}

$$f_{\mathbf{F}}(F_1, F_2) = \frac{1}{\pi^2 \det(\mathbf{\Gamma})} \exp(-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{F}), \quad (2.83)$$

où la décorrélation entre F_1 et F_2 fait disparaître les termes croisés dans la forme quadratique qui se réduit à

$$\mathbf{F}^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{F} = |F_1|^2 / \sigma_1^2 + |F_2|^2 / \sigma_2^2, \quad (2.84)$$

avec $\sigma_1^2 = 2\sigma^2$ et $\sigma_2^2 = 2\sigma^2 \Delta t_h^2$.

4. On note $\text{vp} \int g(x) dx$ l'intégrale en valeur principale au sens de Cauchy.

En faisant le changement de variables $[F_1, F_2] \rightarrow [w = F_1, r = (1/\Delta t_h) F_2/F_1]$, de jacobien

$$\left| \det \left(\frac{d[F_1 F_2]}{d[w r]} \right) \right|^2 = \Delta t_h^2 |w|^2, \quad (2.85)$$

on obtient la densité de probabilité $f(r)$ de r

$$f(r) = \iint \Delta t_h^2 |w|^2 f_{\mathbf{F}}(w, -\Delta t_h^2 r w) d\text{Re}\{w\} d\text{Im}\{w\}, \quad (2.86)$$

sous forme d'une intégrale gaussienne qu'il est ensuite possible de calculer

$$f(r) = \frac{\Delta t_h^2}{\pi(\sigma_1^2 \sigma_2^2) (1/\sigma_1^2 + \Delta t_h^2 |r|^2/\sigma_2^2)^2}, \quad (2.87)$$

puis de simplifier en utilisant les expressions de σ_1 et σ_2 , (voir en Fig. 2.5)

$$f(r) = \frac{1}{\pi (1 + |r|^2)^2}. \quad (2.88)$$

Comme le montrent les premiers moments et les marginales (voir en Fig. 2.5),

$$\mathbf{E}[r] = 0 \quad \text{var}(r) = \mathbf{E}[r r^*] = +\infty \quad (2.89)$$

$$f(\text{Re}\{r\}) = 1/(2(1 + (\text{Re}\{r\})^2)^{3/2}) \quad f(\text{Im}\{r\}) = 1/(2(1 + (\text{Im}\{r\})^2)^{3/2}), \quad (2.90)$$

la variable aléatoire r est centrée, de variance infinie, et les densités de probabilité de ses parties réelle (i.e., l'opérateur de déplacement en temps de la réallocation) et imaginaire (i.e., l'opérateur de déplacement en fréquence de la réallocation) prennent une même forme. Notons que les résultats sont indépendants de l'énergie du bruit σ^2 , du temps (stationnarité), de la fréquence (blancheur) et de la longueur de la fenêtre (coordonnées réduites). Des estimations issues de simulation numérique des log-densités de probabilité marginales et conjointe des opérateurs de réallocation confirment ces résultats théoriques (voir Figs. 2.6 et 2.7).

Compte tenu la symétrie radiale de l'éq. (2.88), il est naturel d'abandonner la représentation cartésienne du plan temps-fréquence adoptée jusqu'ici pour en envisager un paramétrage polaire (ρ, θ) avec $\rho = |r| \in [0, +\infty[$ et $\theta = \arg r \in]-\pi, \pi]$, ce qui conduit à la densité de probabilité conjointe

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho}{\pi (1 + \rho^2)^2}. \quad (2.91)$$

Les quantités ρ et θ apparaissent comme des variables séparables de densité de probabilité marginale (voir en Fig. 2.8)

$$f(\rho) = 2\rho / (1 + \rho^2)^2 \quad f(\theta) = 1/(2\pi), \quad (2.92)$$

et de premiers moments

$$\mathbf{E}[\rho] = \pi/2 \quad \text{var}(\rho) = +\infty \quad \mathbf{E}[\theta] = 0 \quad \text{var}(\theta) = \pi^2/3. \quad (2.93)$$

De la fonction de répartition de ρ , $\Phi(\rho) = \rho^2/(1 + \rho^2)$, on peut calculer la distance maximale $\rho_{max} = \sqrt{p/(1-p)}$ à laquelle peut se trouver réallouée une valeur du spectrogramme à une probabilité p donnée telle que $p = \mathbf{P}(\rho \leq \rho_{max})$. Par exemple, pour $p = 0,99$, $\rho_{max} \approx 9,95$.

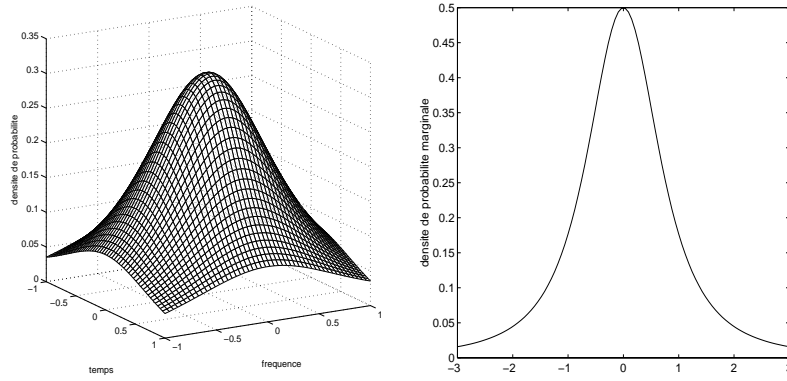


FIG. 2.5 – *Densités de probabilité conjointe et marginale du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.* (à gauche) Densité de probabilité conjointe théorique du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique (à droite) Densité de probabilité marginale (temps ou fréquence) théorique des opérateurs de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.

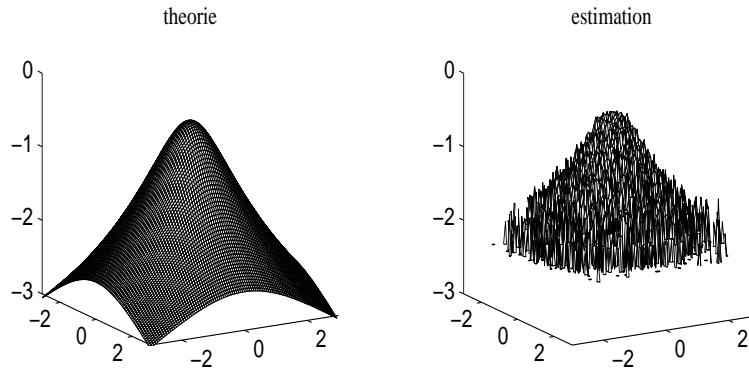


FIG. 2.6 – *Log-densités de probabilité conjointes du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.* Log-densités de probabilité conjointes simulée (à gauche) et théorique (à droite) donnée par (2.88) du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation "bruit seul". La densité estimée a été calculée à partir d'histogrammes issus de moyenne d'ensemble sur 412×156 (soit 64272) points temps-fréquence, et pour 3 réalisations de bruit.

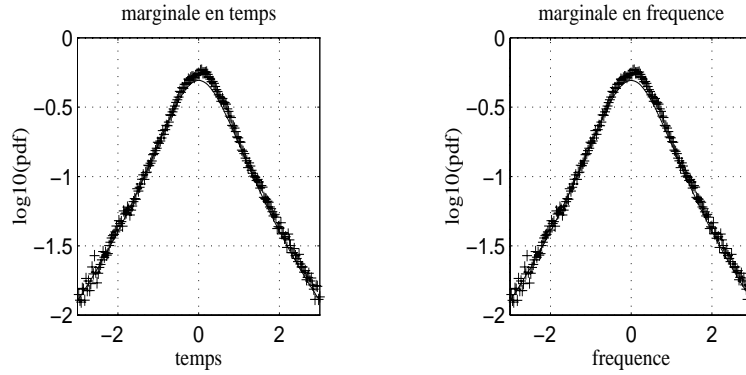


FIG. 2.7 – *Log-densités de probabilité marginales du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.* Log-densités de probabilité marginales en temps (à gauche) et en fréquence (à droite) du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation "bruit seul". Les valeurs estimées, indiquées par des croix, ont été calculées à partir de moyenne d'ensemble sur 412×156 (soit 64272) points temps-fréquence, et pour 3 réalisations de bruit. La loi théorique (éq. (2.90)) est marquée d'un trait continu.

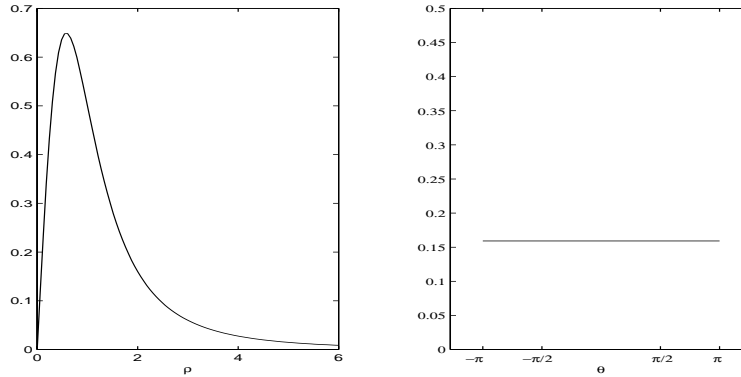


FIG. 2.8 – *Densités de probabilité du module et de l'angle du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.* Densités de probabilité théoriques du module (à gauche) et de l'angle (à droite) du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor d'un bruit blanc gaussien analytique.

Signal + bruit

Le calcul précédent peut être reproduit à l'identique dans le cas d'un mélange "signal+bruit" où l'observation est, cette fois, de la forme $x(t) = s(t) + n(t)$, avec $s(t)$ une composante déterministe et en adoptant une définition identique pour $n(t)$. Dans cette situation, $x(t)$ est toujours gaussien, totalement circulaire, i.e, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{E}[(x(t) - \mathbf{E}[x(t)])(x(s) - \mathbf{E}[x(s)])] = 0$.

Le but de cette section est de savoir dans quelle mesure la présence de bruit perturbe le vecteur de réallocation du spectrogramme $S = |F_s^h(t, \omega)|^2$ du cas sans bruit

$$r_0 = \frac{1}{\Delta t_h} \frac{F_2^s}{F_1^s}, \quad (2.94)$$

où F_1^s et F_2^s sont des notations raccourcies pour $F_s^h(t, \omega)$ et $F_s^{th}(t, \omega)$ respectivement.

Par des arguments similaires à ceux produits dans la section précédente, le vecteur $\mathbf{F} = [F_1 F_2]^t$ est un vecteur gaussien totalement circulaire, dont la matrice de covariance conserve la forme obtenue précédemment, mais dont la moyenne n'est plus nulle. Sa densité de probabilité conjointe s'écrit maintenant

$$f_{\mathbf{F}}(F_1, F_2) = \frac{1}{\pi^2 \det(\mathbf{\Gamma})} \exp(-(\mathbf{F} - \mathbf{F}^s)^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^s)), \quad (2.95)$$

où $\mathbf{F}^s = [F_1^s F_2^s]^t$, et $(\mathbf{F} - \mathbf{F}^s)^\dagger \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^s) = |F_1 - F_1^s|^2 / \sigma_1^2 + |F_2 - F_2^s|^2 / \sigma_2^2$.

Le calcul de $f(r)$, complètement détaillé en annexe C.2, passe par les mêmes étapes (changement de variables, mise en forme d'une intégrale gaussienne, calcul par un passage en coordonnées polaires) que dans le cas "bruit seul" et mène au résultat suivant

$$f(r) = \frac{1}{\pi (1 + |r|^2)^2} \left(1 + \frac{S}{2\sigma^2} \frac{|1 + r r_0|^2}{1 + |r|^2} \right) \exp\left(-\frac{S}{2\sigma^2} \frac{|r - r_0|^2}{1 + |r|^2}\right). \quad (2.96)$$

Les simulations effectuées (en Figs. 2.9 et 2.10) dans le contexte précisé en Fig. 2.11 confirment ces expressions. Il est intéressant de noter que la forme de la densité de probabilité en éq. (2.96) est contrôlée par deux paramètres : le champ de réallocation du signal sans bruit qui joue le rôle d'une valeur moyenne (même si ce n'est pas exactement le cas) et le quotient du spectrogramme du signal seul par la puissance du bruit qui s'interprète comme un rapport signal sur bruit local $\text{RSB} = S/(2\sigma^2)$. Dans le cas où $\text{RSB} \rightarrow 0$, on vérifie que (2.96) se simplifie et devient alors équivalente à (2.88), obtenue pour la situation "bruit seul". Réciproquement, si $\text{RSB} \rightarrow +\infty$ ("signal seul"), alors $f(r) \sim \text{RSB} \exp(1/\text{RSB})$ sauf pour $r = r_0$, cas pour lequel $f(r) = \text{RSB}$. On remarque également que (2.96) tend approximativement vers la loi normale pour les petits r . La figure 2.12 montrent comment s'effectue la transition entre ces différents RSB.

2.3.2 Statistiques des opérateurs de réallocation du spectrogramme

L'utilisation de fenêtres gaussiennes peut paraître très restrictive, c'est pourquoi il est souhaitable d'étendre nos calculs à un cadre plus général. Traiter le cas de fenêtres à la forme arbitraire nécessite néanmoins un traitement spécifique, plus compliqué puisqu'il ne profite pas des simplifications issues de la gaussiannité. En fait, le problème de l'évaluation de la densité de probabilité des vecteurs de réallocation du spectrogramme calculé avec une fenêtre arbitraire est un cas particulier d'un problème plus général résolu en annexe C.3 pour lequel le vecteur $\mathbf{Y} = [y_1 y_2 y_3]^t$ regroupe, dans l'ordre, la valeur en (t, ω) des FCT de fenêtre d'observation $h_1(t) = h(t)$, $h_2(t) = th(t)$ et $h_3(t) = dh/dt$.

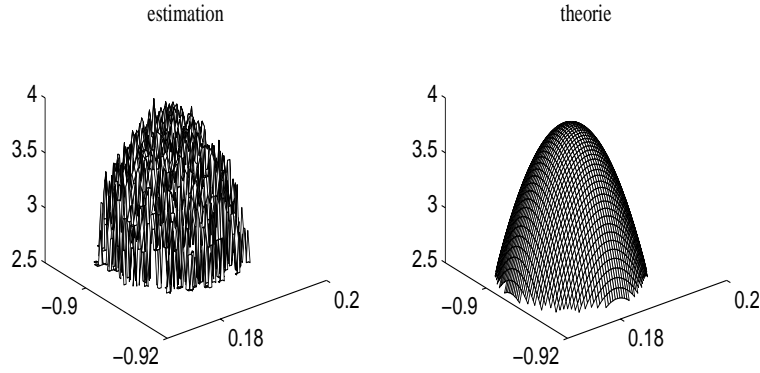


FIG. 2.9 – *Log-densités de probabilité conjointes du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation “chirp+bruit”*. Log-densités de probabilité conjointes simulée (à gauche) et théorique (à droite) donnée par (2.96) du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation “chirp+bruit”. La densité estimée a été calculée à partir d’histogrammes issus de moyenne d’ensemble sur 50000 réalisations de bruit.

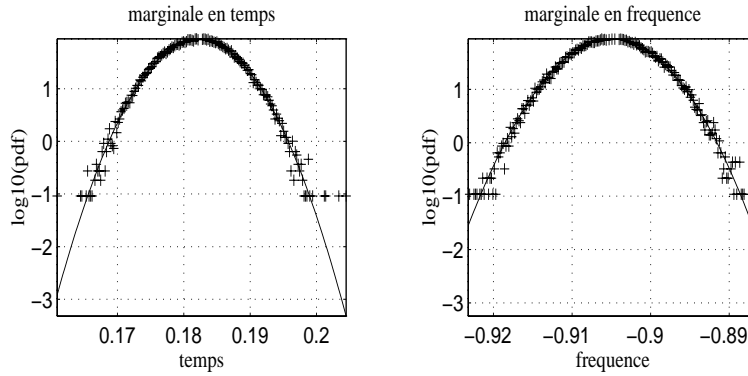


FIG. 2.10 – *Log-densités de probabilité marginales du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation “chirp+bruit”*. Log-densités de probabilité marginales en temps (à gauche) et en fréquence (à droite) du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans la situation “chirp+bruit”. Les valeurs estimées, indiquées par des croix, ont été calculées à partir de moyenne d’ensemble sur 50000 réalisations de bruit. La loi théorique est marquée d’un trait continu.

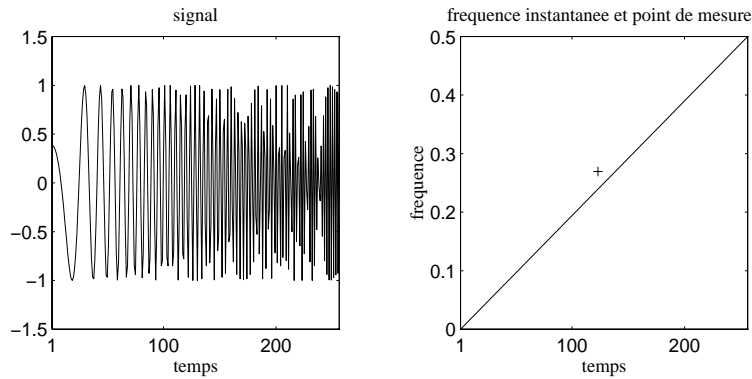


FIG. 2.11 – *Dispositif pour les simulations en Figs. 2.9 et 2.10. Les simulations présentées dans les figures 2.9 et 2.10 ont été faites avec $RSB = 64\text{dB}$. (à gauche): La composante déterministe utilisée est un chirp linéaire. (à droite): sa ligne de fréquence instantanée et le point de mesure de coordonnées $(123, 69/256)$ et marqué d'une croix.*

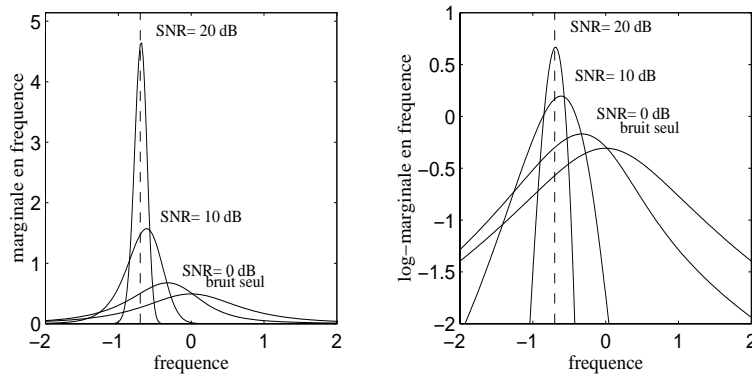


FIG. 2.12 – *Évolution de la densité marginale du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans le cas “signal+bruit” pour différentes valeurs de RSB . Évolution de la densité (à gauche) et de la log-densité (à droite) de probabilité marginale en fréquence du vecteur de réallocation du spectrogramme de Gabor dans le cas “fréquence pure+bruit” pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit local RSB .*

En utilisant la formule des interférences (cf. C.1) et si $h(t)$ et ω répondent aux conditions suivantes

- (i) h paire,
- (ii) $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} (|h(t)|^2) = 0$,
- (iii) $h_1(t)e^{i\omega t}$, $h_2(t)e^{i\omega t}$ et $h_3(t)e^{i\omega t}$ sont de supports fréquentiels approximativement contenus dans les fréquences positives,

la matrice d'autocorrélation de \mathbf{Y} s'écrit

$$\Gamma = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t_h^2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & \Delta \omega_h^2 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Remarque 2.4. Notons que $\det \Gamma = 2\sigma^6(4\Delta t_h^2 \Delta \omega_h^2 - 1)$ est, en vertu de l'inégalité d'Heisenberg, une quantité toujours positive, et qui s'annule si et seulement si h est gaussienne. Dans ce cas, Γ n'est plus inversible, et l'on doit revenir aux sections précédentes.

Si l'on interdit à h d'être gaussienne, l'inverse de Γ existe

$$\Gamma^{-1} = \frac{4\sigma^4}{\det \Gamma} \begin{bmatrix} \det \Gamma / (8\sigma^6) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta \omega_h^2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \Delta t_h^2 \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

La densité de probabilité du vecteur de réallocation

$$r = \frac{1}{\Delta t_h} \operatorname{Re} \left\{ \frac{y_2}{y_1} \right\} - i \frac{1}{\Delta \omega_h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{y_3}{y_1} \right\}, \quad (2.99)$$

s'obtient en calculant la marginale (par rapport à la partie imaginaire de la première variable, et la partie réelle de la deuxième variable) de la densité de probabilité du vecteur

$$\mathbf{r} = (r_1 r_2)^t = \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{y_2}{y_1}, \frac{1}{\lambda_2} \frac{y_3}{y_1} \right)^t \quad (2.100)$$

avec $\{\lambda_1 = \Delta t_h, \lambda_2 = -\Delta \omega_h\}$.

Bruit seul

Si le signal observé est $x(t) = n(t)$, un bruit blanc gaussien analytique tel que défini par (2.79), on est alors dans le cas de moyenne nulle traité en fin de l'annexe C.3. La densité de probabilité du vecteur complexe \mathbf{r} par (C.27)

$$f(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\pi^2 \det \Gamma a^3} = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2 (H^2 - 1)^2}{(H^2 (1 + |r_1|^2 + |r_2|^2) - 2H \operatorname{Re}\{r_1 r_2^*\} - 1)^3}, \quad (2.101)$$

où $H = 4\Delta t_h \Delta \omega_h$, fournit ensuite par le calcul de la marginale

$$f(r) = \iint f(\mathbf{r}) d\operatorname{Im}\{r_1\} d\operatorname{Re}\{r_2\}, \quad (2.102)$$

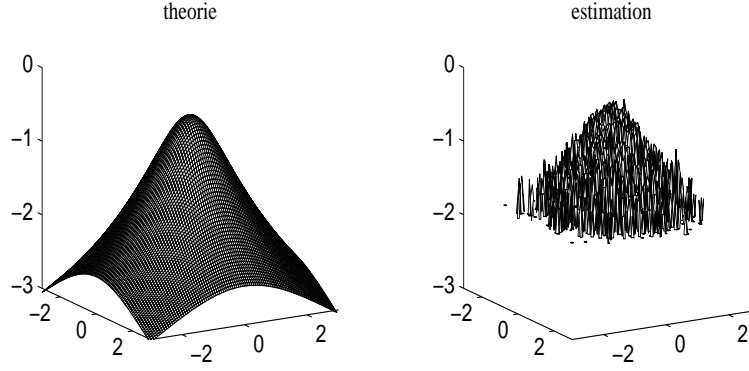


FIG. 2.13 – *Log-densités de probabilité conjointes du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal d’un bruit blanc gaussien analytique. Log-densités de probabilité conjointes simulée (à droite) et théorique (à gauche) donnée par (2.102) du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal (voir Fig. 2.15) dans la situation “bruit seul”. La densité estimée a été calculée à partir d’histogrammes issus de moyenne d’ensemble sur 412×156 (soit 64272) points temps-fréquence, et pour 5 réalisations de bruit.*

le résultat surprenant

$$f(r) = \frac{1}{\pi(1 + |r|^2)^2}, \quad (2.103)$$

puisque identique à celui obtenu dans le cas d’une fenêtre gaussienne (voir éq. (2.88)). Autrement dit, dans le cas “bruit seul”, la forme de la fenêtre ne change rien à la forme finale de la densité de probabilité des vecteurs de réallocation ce que confirment les simulations en Figs 2.13 et 2.14. On peut remarquer que la marginale en fréquence de l’éq. (2.103) peut être aussi bien considérée comme la densité de probabilité de la fréquence instantanée d’un bruit gaussien coloré, avec la conséquence que son expression est en accord avec les résultats obtenus dans [17] par une méthode différente.

Signal et bruit

Dans le cas du mélange “signal+bruit”, les développements faits en annexe C.3 nous donnent l’expression de la densité du vecteur complexe r en éq. (C.23)

$$f(r) = \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\pi \det \mathbf{\Gamma} a^3} \left(2 + c^2 + (1 + 8c) \frac{|b|^2 - ca}{a} + 4 \left(\frac{|b|^2 - ca}{a} \right)^2 \right) \exp(-|b|^2/a + c), \quad (2.104)$$

où, s_1 , r_{01} et r_{02} correspondent à y_1 , r_1 et r_2 sous hypothèse qu’il n’y ait pas de bruit,

$$a = 1 + \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\det \mathbf{\Gamma}} (|r_1|^2 + |r_2|^2 + \operatorname{Re}\{r_1 r_2^*\} / (\lambda_1 \lambda_2)) \quad (2.105)$$

$$|b|^2 - ca = |s_1|^2 \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\det \mathbf{\Gamma}} (|r_1 - r_{01}|^2 + |r_2 - r_{02}|^2 + \operatorname{Re}\{(r_1 - r_{01})(r_2 - r_{02})^*\} / (\lambda_1 \lambda_2)) \quad (2.106)$$

$$c = |s_1|^2 \left(1 + \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^2}{\det \mathbf{\Gamma}} (|r_{01}|^2 + |r_{02}|^2 + \operatorname{Re}\{r_{01} r_{02}^*\} / (\lambda_1 \lambda_2)) \right). \quad (2.107)$$

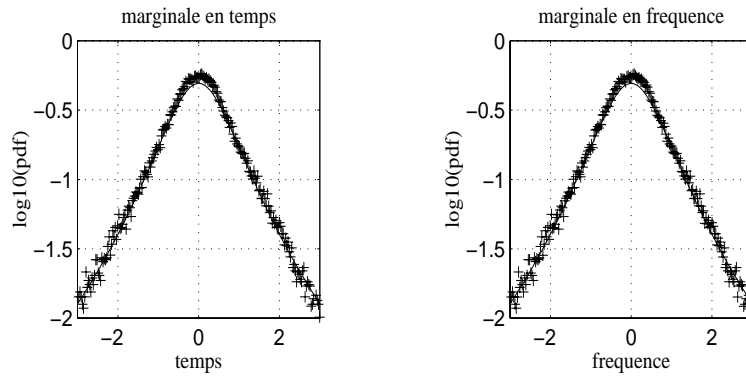


FIG. 2.14 – **Log-densités de probabilité marginales du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal d’un bruit blanc gaussien analytique.** Log-densités de probabilité marginales en temps (à gauche) et en fréquence (à droite) du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal (voir Fig. 2.15) dans la situation “bruit seul”. Les valeurs estimées, indiquées par des croix, ont été calculées à partir de moyenne d’ensemble sur 412×156 (soit 64272) points temps-fréquence, et pour 3 réalisations de bruit. La loi théorique est marquée d’un trait continu.

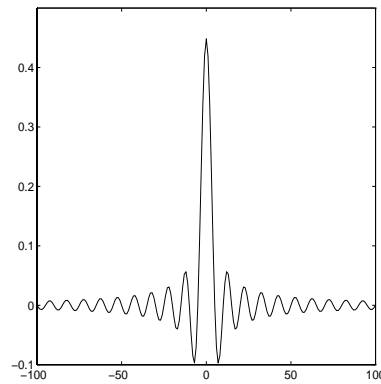


FIG. 2.15 – **Fenêtre utilisée en Figs. 2.13 et 2.14.** Fenêtre utilisée pour les simulations présentées en figures 2.13 et 2.14.

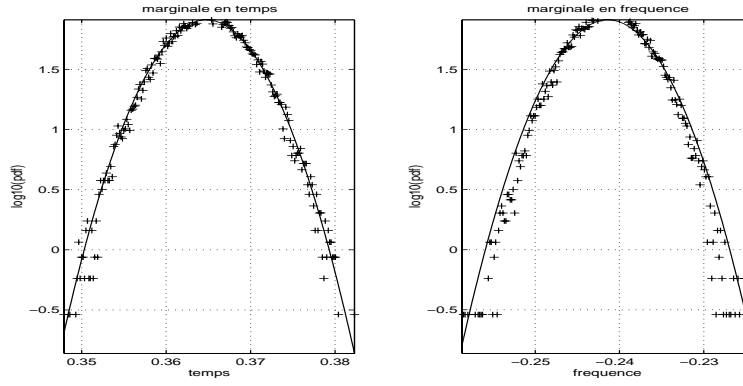


FIG. 2.16 – *Log-densités de probabilité marginales du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal dans la situation “chirp+bruit”. Log-densités de probabilité marginales en temps (à gauche) et en fréquence (à droite) du vecteur de réallocation du spectrogramme basé sur une fenêtre sinus cardinal (voir Fig. 2.15) dans la situation “chirp+bruit”. Les valeurs estimées, indiquées par des croix, ont été calculées à partir de moyenne d’ensemble sur 20000 réalisations de bruit. La loi théorique obtenue pour les fenêtres gaussiennes uniquement est marquée d’un trait continu. Les conditions de simulation sont identiques à celles précisées en figure 2.11, à l’exception de la position du point de mesure dont les coordonnées sont maintenant (123, 67/256).*

Malheureusement, l’étape du calcul de la marginale qui conduit au résultat final nous a été impossible, nos tentatives pour l’évaluation des intégrales s’étant toutes soldées par des échecs. Notons que des travaux [31] effectuant le calcul (par une méthode différente de celle exposée ici) de la densité de probabilité de la fréquence instantanée (marginale en fréquence de $f(r)$) d’un mélange signal et bruit (gaussien) aboutissent aux mêmes impossibilités. Néanmoins, comme le suggère la figure 2.16, les simulations numériques donnent des résultats encourageants, puisque les histogrammes calculés montrent de grandes ressemblances avec les formules obtenues dans le cas d’une fenêtre gaussienne en éq. (2.96).

2.4 Conclusion

Ce chapitre regroupe quelques illustrations destinées à montrer comment agit le champ des vecteurs de réallocation sur les distributions d’énergie temps-fréquence. Pour ce faire, nous avons tout d’abord donné pour une série de signaux tests l’expression du spectrogramme du champ de vecteurs réallocation associé et du spectrogramme réalloué qui résulte de leur combinaison. Nous avons abordé la question de la réallocation de signaux contenant deux composantes dans deux exemples simples (deux impulsions, deux fréquences) ce qui a mis en évidence les problèmes (divergence du vecteur de réallocation) causés par l’interaction des signaux et particulièrement par leur battement de phase. Nous sommes intéressés ensuite à l’utilisation de la réallocation dans le plan temps-échelle. Nous avons prouvé que la mesure de l’exposant de régularité locale pour une singularité de Hölder isolée par le scalogramme réalloué était possible, mais néanmoins soumis à des contraintes de bon échantillonnage du cône d’influence de la singularité. Enfin, nous avons établi les propriétés statistiques des vecteurs de réallocation dans un cadre simple mais réaliste et important. Ces propriétés révèlent l’instabilité du champ de vecteurs de réallocation (qui est de variance infinie pour un bruit blanc gaussien). Ceci est sans doute à relier au problème de l’interaction entre deux composantes d’un signal que

nous venons de mentionner plus haut. En effet, un bruit blanc peut être considéré comme la superposition d'un certain nombre de composantes disposées aléatoirement dans le plan temps-fréquence. On peut néanmoins envisager l'utilisation de ces résultats pour l'amélioration du processus de réallocation dans les situations bruitées. On peut aussi penser que ces nouvelles connaissances pourront aider à extraire de l'information utile directement du champ des vecteurs de réallocation de manière optimale selon des critères statistiques.

