

Table des matières

Introduction	3
Notations	9
1 Le principe de la méthode de réallocation	11
1.1 Principe général	11
1.1.1 Refocaliser une distribution lissée	11
1.1.2 La méthode de réallocation dans la classe de Cohen	13
1.1.3 Généralisation à la classe affine	17
1.1.4 Champ de vecteur de réallocation	19
1.2 La réallocation du spectrogramme	19
1.2.1 Relation avec la phase de la FCT, interprétation en tant que fréquence instan- tanée et retard de groupe locaux	19
1.2.2 Formulation à l'aide de quotients de FCT, application à la mise en œuvre . .	21
1.2.3 Réallocation du spectrogramme et approximation de la phase stationnaire . .	22
1.2.4 Opérateur de réallocation et changement d'échelle	27
1.3 La réallocation du scalogramme	27
1.3.1 Relation avec la phase de la transformée en ondelettes	28
1.3.2 Formulation à l'aide de quotients de transformées en ondelettes, application à la mise en œuvre	29
1.4 Une famille de méthodes autour d'une même idée	30
1.4.1 Principe	30
1.4.2 Comparatif	37
1.5 Conclusion	43
2 Quelques exemples de champs de vecteurs de réallocation	47
2.1 Spectrogramme	47
2.1.1 Impulsion	48
2.1.2 Fréquence	48
2.1.3 Logon Gaussien	48
2.1.4 Modulation linéaire de fréquence	49
2.1.5 Modulation linéaire de fréquence, d'enveloppe gaussienne	49
2.1.6 Somme de deux impulsions ou de deux fréquences	50
2.2 Scalogramme	53
2.2.1 Estimation de l'exposant de Hölder à l'aide du scalogramme	53
2.2.2 Estimation de l'exposant de Hölder à l'aide du scalogramme réalloué	57

2.3	Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme	63
2.3.1	Statistiques des opérateurs de réallocation du spectrogramme de Gabor	64
2.3.2	Statistiques des opérateurs de réallocation du spectrogramme	68
2.4	Conclusion	74
3	Des extensions et des améliorations à la réallocation	77
3.1	Géométrie du champ des vecteurs de réallocation	77
3.1.1	Phase géométrique et courbes de niveau	78
3.1.2	Potentiel scalaire et lignes de plus grande pente	79
3.2	Réallocation différentielle	82
3.2.1	Principe	82
3.2.2	Points fixes par la réallocation	86
3.3	Partition	89
3.3.1	Différentes approches	89
3.3.2	Une proposition basée sur la réallocation différentielle	91
3.3.3	Algorithme pour la partition	91
3.3.4	Quelques exemples	93
3.3.5	Fusion de partition	105
3.4	Conclusions sur la réallocation différentielle et la partition temps-fréquence	116
3.5	Réallocation supervisée	117
3.5.1	Superviser la réallocation	117
3.5.2	Mise en œuvre et résultats	119
3.5.3	Conclusions sur la supervision	122
4	Application de la réallocation au problème de la détection d’ondes gravitationnelles	125
4.1	Introduction	125
4.2	Chirps	127
4.3	Détection	128
4.3.1	Détection optimale	128
4.3.2	Détection temps-fréquence	131
4.4	Détecter les chirps linéaires	132
4.5	Détecter les chirps en loi de puissance	133
4.6	L’exemple des ondes gravitationnelles	138
4.6.1	Un modèle pour la coalescence de binaires	138
4.6.2	Un détecteur temps-fréquence simplifié	141
4.6.3	Une illustration	145
4.7	Conclusion	148
	Conclusion	151
	Annexes	153
A	Simplifications des opérateurs de réallocation du spectrogramme	153
A.1	Opérateur de réallocation en temps	153
A.2	Opérateur de réallocation en fréquence	154
B	Simplifications des opérateurs de réallocation du scalogramme	155
B.1	Opérateur de réallocation en temps	155

	B.2	Opérateur de réallocation en échelle	156
C		Densité de probabilité des vecteurs de réallocation du spectrogramme	157
	C.1	Formule des interférences	157
	C.2	Densité de probabilité des vecteurs de réallocation, fenêtre gaussienne, signal + bruit	157
	C.3	Quotient de variables aléatoires complexes gaussiennes	158
D		La méthode de la phase stationnaire	161
	D.1	Quelques rappels	161
	D.2	Approximation de phase stationnaire des spectres des chirps	161
	D.3	Exemples et contre-exemples	163

Introduction

Il est aujourd'hui bien admis que les représentations d'un signal conjointement en temps et en fréquence présentent un intérêt en soi : elles donnent une description naturelle des signaux non stationnaires, e.g., dont la fréquence varie au cours du temps, ou provenant de régimes transitoires. Le problème reste de savoir comment arriver à une telle description. La démarche la plus intuitive est celle de l'analyse de Fourier à court terme qui conduit à l'introduction du *spectrogramme* (module carré de la transformée de Fourier à court terme). Ce n'est cependant qu'une approche parmi d'autres et une formalisation générale du problème aboutit à la conclusion qu'il n'existe pas une solution intéressante mais toute une variété. Dans le cas des distributions quadratiques, il est maintenant bien connu que, sous hypothèse de covariance par rapport aux translations en temps et en fréquence, les différentes solutions admissibles se regroupent dans un ensemble, que l'on appelle *classe de Cohen*, dont le spectrogramme n'est qu'un élément. Une autre classe de solutions digne d'intérêt est celle de la *classe affine* qui rassemble les distributions quadratiques covariantes par les translations en temps et en échelle. Dans cette classe, le *scalogramme* (module carré de la transformée en ondelettes) joue un rôle mathématiquement équivalent à celui du spectrogramme dans la classe de Cohen.

À l'intérieur de ces deux classes, il n'existe pas de solution universelle, i.e., valable pour tous signaux, en terme de lisibilité de la représentation. On doit, en effet, choisir entre présence d'*interférences* (dûes à la nature bilinéaire de la distribution) et étalement (ou *délocalisation*) des composantes du signal (dû au lissage utilisé pour atténuer les interférences). Interférences et délocalisation viennent compliquer, chacune à leur manière, la lecture de la représentation soit, pour les premières, par des termes d'interaction peu significatifs (les interférences), qu'il est parfois difficile de séparer de l'information pertinente soit, pour la deuxième, parce qu'elle en diminue le contraste.

D'un point de vue pratique et compte tenu de la nature des signaux à analyser, il est difficile au non spécialiste de faire d'abord le choix de la représentation (parmi toutes celles qui sont possibles) qui aboutit au meilleur compromis, et ensuite de lire simplement le résultat de l'analyse sélectionnée.

De nombreux travaux ont été dédiés à l'amélioration de la lisibilité des distributions de la classe de Cohen et de la classe affine. La méthode de la *réallocation* résulte de ceux conduits par Kodera, Gendrin et de Villedary dans le courant des années 1970 et Auger et Flandrin qui en ont fait une récente réactualisation. Son principe est de réarranger (ou réallouer) les valeurs d'une distribution présentant peu d'interférences pour en améliorer la localisation, en s'aidant d'une distribution bien localisée (avec, donc, des interférences). Plus précisément, cela consiste à déplacer avec un *champ de vecteurs de réallocation* adéquat les valeurs d'une distribution mal localisée de la classe de Cohen ou de la classe affine, pour en concentrer les composantes du signal (étalées par lissage).

La méthode de réallocation dont les qualités sont aujourd'hui reconnues, a été appliquée dans des contextes divers avec des résultats satisfaisants (voir e.g., [16, 34, 9, 85]). Elle est néanmoins un outil méconnu et son mécanisme est dans certaines situations (e.g., signaux avec plusieurs composantes, mélanges signal et bruit . . .) mal compris.

L'objet de cette thèse est d'apporter une meilleure compréhension de la méthode de réallocation, d'en proposer des améliorations et d'étendre son champ d'application au delà du cadre de l'analyse (temps-fréquence) proprement dite.

On s'intéressera essentiellement à la réallocation des spectrogrammes et scalogrammes dans la mesure où celle-ci jouit d'une plus grande richesse d'interprétation et conduit à des développements mathématiques plus simples.

Nos objectifs :

- *Apporter une meilleure compréhension de la méthode de réallocation*

La réallocation n'est pas la seule stratégie envisageable pour le problème de la lisibilité évoqué plus haut. Nous commençons dans le premier chapitre par faire brièvement un état des connaissances actuelles concernant la réallocation. Nous mettons ensuite en évidence l'existence d'un ensemble de méthodes dédiées au même objectif qui se retrouvent autour d'une communauté d'idées. Nous situons chacune de ces méthodes relativement aux autres en montrant les aspects communs et en comparant les descriptions qu'elles donnent du signal.

Dans le deuxième chapitre, nous nous attachons à faire une description analytique aussi complète que possible du champ de vecteurs de réallocation dans quelques cas précis : d'abord pour le spectrogramme, avec une gamme de signaux jouets, ensuite pour le scalogramme, avec des singularités hœlderiennes isolées, situation qui présente un intérêt particulier puisque l'on en déduit que, comme le scalogramme, le scalogramme réalloué peut servir, sous certaines conditions, à la mesure de la régularité locale des signaux. Enfin, nous considérons le cas important des signaux aléatoires, et plus spécifiquement des signaux déterministes auxquels s'ajoute un bruit gaussien stationnaire. Nous obtenons pour ces signaux la densité de probabilité des vecteurs de réallocation.

Les distributions temps-fréquence ne sont pas des fonctions quelconques. Il en est de même pour les champs de vecteurs de réallocation. Ces derniers respectent des contraintes géométriques précises que l'on se propose de caractériser dans le troisième chapitre. En particulier, on montre le lien important qui unit le champ de vecteur de réallocation à un potentiel scalaire dont il dérive exactement sous certaines conditions.

- *Proposer des améliorations à la méthode de réallocation*

La méthode de réallocation déplace les quantités de manière discrète, i.e., par "bonds" finis, dans le plan temps-fréquence. Les résultats prouvant que le champ de vecteurs de réallocation est intimement relié à un champ de gradient suggère par analogie aux systèmes dynamiques physiques une généralisation continue, la *réallocation différentielle*, dans laquelle les contributions énergétiques, à l'image de particules, se meuvent continûment dans le plan temps-fréquence selon une vitesse fixée par le vecteur de réallocation. On montre que cette approche peut être vue comme une extension d'autres méthodes (les méthodes "arête et squelette") présentées au premier chapitre.

Déjà constatée de manière heuristique, et confirmée par les calculs accomplis au deuxième chapitre, la sensibilité au bruit (large bande) de la méthode de réallocation fait figure d'obstacle à son utilisation dans certaines situations réelles à faible rapport signal sur bruit. Nous proposons en fin de troisième chapitre, une amélioration destinée à augmenter la robustesse de la représentation, qui consiste à autoriser la réallocation uniquement lorsque l'on estime se trouver à proximité d'un signal. On peut considérer que l'on engage un audit ou une *supervision* en chaque point du plan temps-fréquence sur la pertinence de la mise en jeu de la réallocation, et ce au vu d'informations obtenues

par le biais de l'utilisation d'un panel de fenêtres d'observation.

- *Étendre son champ d'application au delà du cadre de l'analyse (temps-fréquence)*

La réallocation a été initialement introduite dans un but essentiel d'analyse, i.e., avec comme objectif une amélioration de lisibilité. Nous envisageons dans ce document l'extension possible de l'applicabilité de l'approche dans deux directions qui vont au-delà de l'analyse proprement dite. Au chapitre 3 d'abord, nous nous intéressons à une description originale des signaux se prêtant à une extraction de composantes et à leur débruitage. Pour ce faire, on s'appuie sur la description du signal fournie par la réallocation différentielle pour construire une *partition* du plan temps-fréquence dans laquelle chaque région est associée à une composante du signal modulée en fréquence et/ou en amplitude. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux issus de techniques informationnelles et de traitement d'image. Après avoir montré les faiblesses de cette approche, nous proposons des algorithmes de *fusion* pour y remédier.

Nous nous intéressons ensuite dans le chapitre 4 au problème de la détection optimale de signaux modulés en fréquence ou *chirps*. Il est connu que la formulation temps-fréquence de ce problème conduit à des algorithmes basés sur l'intégration de chemin d'une distribution temps-fréquence, la condition d'optimalité sélectionnant le chemin et la distribution adéquats. La mise en œuvre d'un tel détecteur temps-fréquence se heurte généralement à la difficulté du calcul de la distribution temps-fréquence que l'on doit utiliser. C'est par exemple vrai dans le cas important des chirps hyperboliques que l'on traite dans le détail. Nous montrons que dans cette situation le spectrogramme réalloué, plus facile à évaluer, peut être employé avec profit en tant qu'estimateur de la distribution centrale pour notre problème. Nous appliquons ces résultats au problème spécifique de la détection d'ondes gravitationnelles. Il est à noter que ce dernier chapitre constitue une entité en soi et que ses objectifs, guidés par l'application, amènent à des contributions originales mais extérieures à la méthodologie de réallocation proprement dite. Il fournit cependant une illustration de comment la réallocation — en tant qu'outil dont les propriétés sont bien maîtrisées par ailleurs — peut s'insérer avec profit dans une chaîne de traitement du signal.

Il est possible de refaire toutes les figures de ce document, si l'on dispose du logiciel Matlab 5 (Mathworks Corp.), en téléchargeant les scripts correspondants à l'adresse internet suivante :

<http://www.physique.ens-lyon.fr/ts/publi.html>

Notations

Temps-fréquence

Classe de Cohen

$W_x(t, \omega) = \int x(t - s/2)x^*(t + s/2)e^{-is\omega} ds$	Distribution de Wigner-Ville
$\hat{C}_x(t, \omega) = \iint W_x(s, \xi)\Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Distribution de la classe de Cohen
$\hat{t}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \iint sW_x(s, \xi)\Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Opérateur de réallocation en temps
$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \iint \xi W_x(s, \xi)\Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Opérateur de réallocation en fréquence
$\check{C}_x(t, \omega) = \iint C_x(s, \xi)\delta(t - \hat{t}_x(s, \xi), \omega - \hat{\omega}_x(s, \xi)) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Distribution réallouée
$\hat{\mathbf{r}}_x(t, \omega) = (\hat{t}_x(t, \omega) - t, \hat{\omega}_x(t, \omega) - \omega)^t$	Champ de vecteurs de réallocation
$\hat{r}_x(t, \omega) = (\hat{t}_x(t, \omega) - t) + i(\hat{\omega}_x(t, \omega) - \omega)$	Image dans le plan complexe

Spectrogramme

$F_x^h(t, \omega) = \int x(s)h^*(s - t)e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2}$	Transformée de Fourier à Court Terme (FCT)
$S_x^h(t, \omega) = F_x^h(t, \omega) ^2$	Spectrogramme
$\Pi(t, \omega) = W_h(t, \omega)$	Noyau de paramétrisation
$\hat{t}_x^h(t, \omega) = t/2 - \partial_\omega \arg\{F_x^h\} = t + \text{Re}\{F_x^{th}/F_x^h\}$	Opérateur de réallocation en temps
$\hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \omega/2 + \partial_t \arg\{F_x^h\} = \omega - \text{Im}\{F_x^{dh/dt}/F_x^h\}$	Opérateur de réallocation en fréquence

Temps-échelle

Classe affine

$\Omega_x(a, b) = \iint W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Distribution de la classe affine
$\hat{b}_x(a, b) = \frac{1}{C_x(a, b)} \iint s W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Opérateur de réallocation en temps
$\hat{\omega}_x(a, b) = \frac{1}{C_x(a, b)} \iint \xi W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Opérateur de réallocation en fréquence
$\omega_0 = \iint \xi \Pi(s, \xi) \frac{dsd\xi}{2\pi}$	Fréquence centrale
$\hat{a}_x^\psi(a, b) = \omega_0 / \hat{\omega}_x(a, b)$	Opérateur de réallocation en échelle
$\check{\Omega}_x(a, b) = \iint \Omega_x(\zeta, s) \delta(b - \hat{b}_x(\zeta, s), a - \hat{a}_x(\zeta, s)) \frac{\zeta^2}{\hat{a}_x^2(\zeta, s)} dsd\zeta$	

Scalogramme

$T_\psi(a, b) = \int x(s) \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds$	Transformée en ondelettes
$S_x^\psi(t, \omega) = T_x^\psi(t, \omega) ^2$	Scalogramme
$\Pi(t, \omega) = W_\psi(t, \omega)$	Noyau de paramétrisation
$\omega_0 = \int \xi \Psi(\xi) ^2 d\xi / (2\pi)$	Fréquence centrale
$\hat{b}_x^\psi(a, b) = b + a \operatorname{Re}\{T_x^{t\psi} / T_x^\psi\}$	Opérateur de réallocation en temps
$\hat{a}_x(a, b) = -\frac{a\omega_0}{\operatorname{Im}\{T_x^{d\psi/dt} / T_x^\psi\}}$	Opérateur de réallocation en échelle

Chapitre 1

Le principe de la méthode de réallocation

Ce chapitre introductif constitue une synthèse bibliographique sur la méthode de réallocation. On en introduit d'abord le principe, les définitions des quantités mathématiques mises en jeu et quelques unes de leurs propriétés. On se focalise ensuite sur la réallocation du spectrogramme (module carré de la transformée de Fourier à court-terme) et du scalogramme (module carré de la transformée en ondelettes), deux distributions qui nous intéresseront particulièrement par la suite. Finalement, on établit un parallèle, dans un formalisme unique, entre la méthode de réallocation et d'autres méthodes qui partagent des idées analogues bien que proposées indépendamment.

Précisons que la section introductive s'appuie essentiellement sur les travaux de Koderà *et al.* [67, 66] (Sect. 1.1.1), et sur ceux d'Auger et Flandrin [5] (Sect. 1.1.2). Les sections 1.2 et 1.3 mêlent des éléments pris dans [5] et des travaux personnels dont certains ont été publiés [40]. Enfin, la synthèse fait en Sect. 1.4 constitue la contribution principale de ce chapitre.

1.1 Principe général

La méthode de réallocation a été introduite [67] en 1976 par Koderà, Gendrin et de Villelary. Cette année marque également la première utilisation du formalisme de la classe de Cohen pour le traitement des signaux non stationnaires [35]. Pourtant, les idées apportées par la méthode de réallocation n'ont pas profité immédiatement de ce résultat fort, qui rassemble dans un même cadre théorique toutes les distributions d'énergie temps-fréquence bilinéaires (covariantes par les translations en temps et fréquence). Ce n'est que récemment, que Auger et Flandrin [5] ont reformulé les idées de la réallocation dans le cadre de cette théorie et ont montré la pertinence de la méthode de réallocation en tant qu'outil complémentaire pour l'analyse temps-fréquence.

Pour préciser les idées fondamentales de la réallocation, nous en éclaircirons, dans un premier temps, le principe dans le cas particulier du spectrogramme [67] par souci de simplicité.

1.1.1 Refocaliser une distribution lissée

La transformée de Fourier¹

$$X(\omega) = \int x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (1.1)$$

1. Nous emploierons une définition de la transformée de Fourier en pulsation plutôt qu'en fréquence. Les intégrales sans bornes explicites courent de $-\infty$ à $+\infty$.

ou son module carré $|X(\omega)|^2$ le spectre, si l'on est intéressé par l'énergie, offrent pour les signaux stationnaires une caractérisation simple et facile à interpréter.

Dès que l'on sort de ce cadre, par exemple, lorsqu'on désire mettre en évidence des glissements de la fréquence du signal au cours du temps, localiser des régimes transitoires, ou caractériser la naissance ou l'extinction d'un signal, il est naturel d'abandonner la description à un paramètre (le temps ou la fréquence) et de passer à une représentation conjointe à la fois en temps et en fréquence.

On doit alors se poser le problème de définir une telle représentation du signal. La distribution de Wigner-Ville est un candidat envisageable pour la description de l'évolution de l'énergie :

$$W_x(t, \omega) = \int x(t + s/2) x^*(t - s/2) e^{-is\omega} ds. \quad (1.2)$$

On constate en Fig. 1.1, **(a)** sur un signal constitué de deux modulations linéaires de fréquence parallèles, qu'elle répond à nos espérances : l'énergie est concentrée autour de chacune des lois de variation de la fréquence en fonction du temps des deux signaux. Mais la nature bilinéaire de cette distribution provoque l'apparition d'*interférences* [39] qui se matérialisent par des structures oscillantes (entre valeurs positives et négatives) qui viennent en compliquer la lecture.

Il nous faut trouver une solution pour supprimer ces interférences. Compte tenu de la structure de celles-ci, le lissage (l'application d'un filtre linéaire passe-bas) de la distribution de Wigner-Ville, est une solution naturelle.

À ce titre, le spectrogramme (cf. Fig. 1.1, **(b)**) $S_x^h(t, \omega) = |F_x^h(t, \omega)|^2$, i.e., le module carré de la transformée de Fourier à Court Terme² (FCT) :

$$F_x^h(t, \omega) = \int x(s) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2}, \quad (1.3)$$

peut être vu comme une version lissée de la distribution de Wigner-Ville du signal

$$S_x^h(t, \omega) = \iint W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (1.4)$$

par un noyau égal à la distribution de Wigner-Ville de la fenêtre $h(t)$.

Dans les régions où la distribution de Wigner-Ville ne présente que des interférences, celle-ci fluctue rapidement entre valeurs positives et négatives qui se compensent si on en fait une moyenne locale. Ceci amène le spectrogramme (cf. Fig. 1.1, **(c)**) à avoir, dans ces régions, une valeur proche de 0. Les interférences sont donc bien atténuées. En contrepartie, le lissage provoque l'étalement de la distribution d'énergie dans les régions associées au signal (cf. Fig. 1.1, **(d)**), ce qui conduit pour le spectrogramme à une perte de résolution et de contraste.

Le principe de la réallocation [67] est de "refocaliser" le spectrogramme sur la répartition d'énergie temps-fréquence donnée par la distribution de Wigner-Ville³. Cela consiste à déplacer les valeurs du spectrogramme de leur point de calcul vers une nouvelle position $(\hat{t}(t, \omega), \hat{\omega}(t, \omega))$ donnée par

2. Dans la suite, on allégera les notations de la FCT et du spectrogramme lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté en supprimant les indices concernant le signal et/ou la fenêtre utilisés.

3. Dans la version originale, Kodera *et al.* ont utilisé la distribution de Rihaczek à la place de la distribution de Wigner-Ville. Pour le spectrogramme, l'utilisation de l'une ou l'autre de ces distributions aboutit aux mêmes résultats. Ce n'est plus le cas dans cadre général que nous décrirons dans la section suivante. Nous préférons la distribution de Wigner-Ville pour ces nombreuses propriétés (de localisation, notamment) [5].

un barycentre évalué sur la distribution de Wigner-Ville du signal dans un voisinage du plan temps-fréquence défini par le noyau de de lissage $W_h(t, \omega)$ de la manière suivante :

$$\hat{t}_x^h(t, \omega) = \frac{1}{S_x^h(t, \omega)} \iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (1.5)$$

$$\hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \frac{1}{S_x^h(t, \omega)} \iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (1.6)$$

Le spectrogramme réalloué s'obtient donc en réagénçant les valeurs du spectrogramme dans le plan temps-fréquence, éventuellement en en faisant la somme si deux quantités arrivent au même endroit :

$$\check{S}_x^h(t, \omega) = \iint S_x^h(s, \xi) \delta(t - \hat{t}_x^h(s, \xi), \omega - \hat{\omega}_x^h(s, \xi)) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (1.7)$$

Dans notre exemple en Fig. 1.1, le spectrogramme réalloué donne une description très simple à lire et à interpréter, proche de la représentation idéale (que l'on espère).

1.1.2 La méthode de réallocation dans la classe de Cohen

Généralisation

Nous avons défini les opérateurs de réallocation comme les coordonnées du centre de masse calculé sur la distribution de Wigner-Ville du signal prise dans un voisinage du plan temps-fréquence. Ce voisinage est déterminé pour le spectrogramme par $W_h(t, \omega)$, la distribution de Wigner-Ville de la fenêtre. Rien n'empêche *a priori* de considérer d'autres types de voisinage. Ceci revient alors à choisir un noyau de lissage arbitraire pour la distribution que l'on désire réallouer.

Soit $\Pi(t, \omega)$ ce noyau, la distribution qui lui est associé s'écrit alors comme la convolution $2D$ de la distribution de Wigner-Ville du signal :

$$C_x(t, \omega) = \iint W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (1.8)$$

On se retrouve alors naturellement dans la classe de Cohen qui rassemblent toutes les distributions bilinéaires temps-fréquence covariantes aux translations en temps et en fréquence [39].

La généralisation pour ces distributions des éqs. (1.5) et (1.6) est alors directe [5]

$$\hat{t}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \iint s W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (1.9)$$

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \iint \xi W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (1.10)$$

On modifie ensuite la distribution $C_x(t, \omega)$ de manière identique au spectrogramme :

$$\check{C}_x(t, \omega) = \iint C_x(s, \xi) \delta(t - \hat{t}_x(s, \xi), \omega - \hat{\omega}_x(s, \xi)) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (1.11)$$

De cette manière, on associe à chaque distribution de la classe de Cohen, une distribution modifiée par la méthode de réallocation. L'utilité de la modification de telle ou telle distribution dépend de la nature du noyau de paramétrisation. Par exemple, l'application de la réallocation sur la distribution de

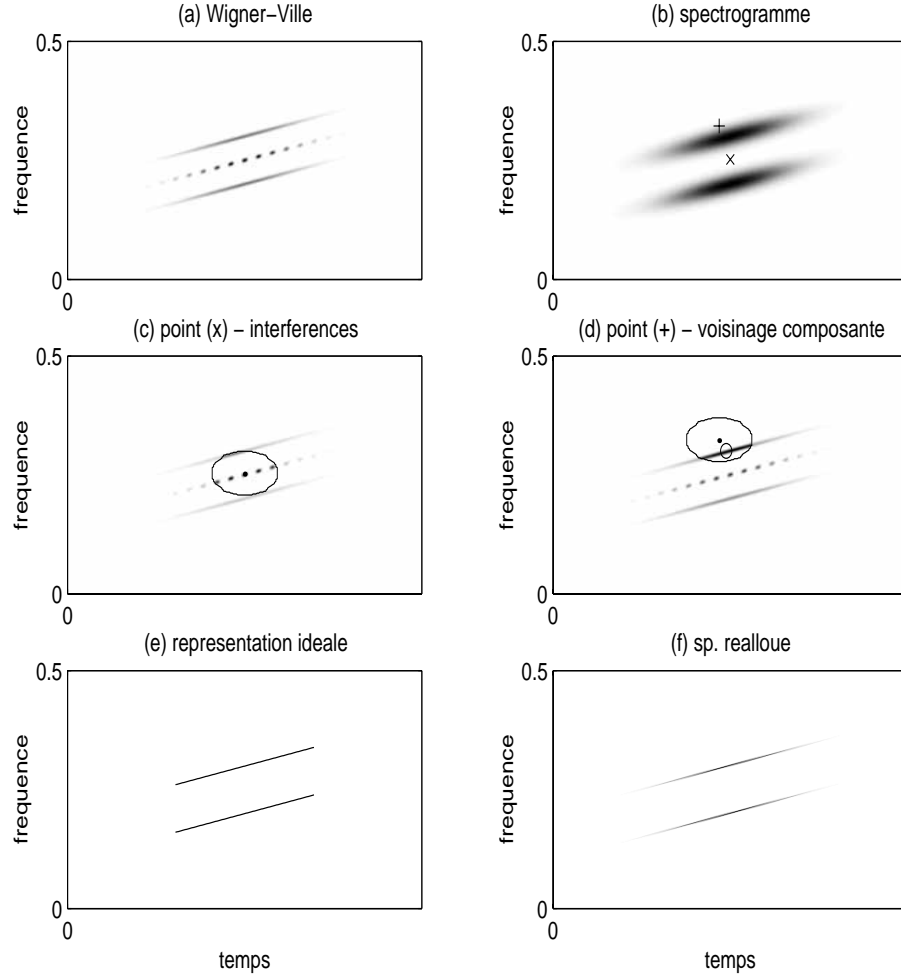


FIG. 1.1 – **Principe de la réallocation du spectrogramme** (voir Sect. 1.1.1). Le signal est formé de deux modulations linéaires de fréquence d’amplitudes gaussiennes. Pour la description temps-fréquence à l’aide de distribution bilinéaire, on est confronté à un compromis entre présence d’interférences, termes oscillants sur la distribution de Wigner-Ville (a) et délocalisation des termes signal, comme sur le spectrogramme (b) : le lissage de la distribution de Wigner-Ville a pour avantage d’atténuer les interférences puisque les valeurs positives et négatives se compensent dans la somme faite à l’intérieur de domaine temps-fréquence défini par le noyau de lissage. C’est qui est illustré en (c) qui montre la restriction de la distribution de Wigner-Ville au domaine temps-fréquence qui sert au calcul du spectrogramme au point marqué d’un \times en (b). En contrepartie, la taille finie du noyau de lissage conduit à un étalement des composantes du signal et donc à une perte en localisation. Par exemple, la valeur du spectrogramme au point $+$ en (b) est obtenue par la moyenne des valeurs de la distribution de Wigner-Ville apparaissant en (d). Le principe de la réallocation est de ne plus affecter cette valeur au point $+$ mais de la déplacer au point \circ , centre de masse des contributions en (d), et point plus représentatif du comportement énergétique local du signal. En procédant de la sorte en tout point du plan temps-fréquence, on obtient le spectrogramme réalloué (f), distribution “refocalisée” sur la répartition d’énergie donnée par la distribution de Wigner-Ville. Le spectrogramme réalloué présente des résultats satisfaisants en termes de lisibilité et de facilité d’interprétation comme le montre sa comparaison avec la représentation idéale (e).

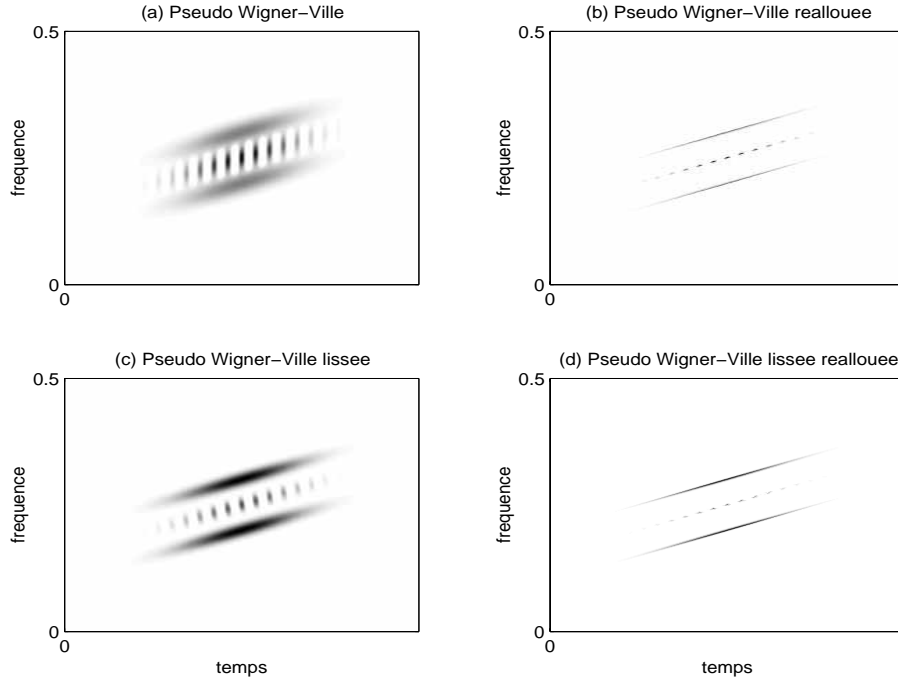


FIG. 1.2 – **Distribution de la classe de Cohen et leurs versions modifiées par la méthode de réallocation.** On présente ici sur la colonne de gauche, quelques distributions classiques de la classe de Cohen, et en regard sur la colonne de droite, leur versions modifiées par la méthode de réallocation. (a) Distribution pseudo Wigner-Ville : noyau de paramétrisation $\Pi(t, \omega) = \delta(t)H(\omega)$. (c) Distribution pseudo Wigner-Ville lissée : $\Pi(t, \omega) = g(t)H(\omega)$. En (b) et (d), les distributions réallouées qui leur correspondent respectivement.

Wigner-Ville pour laquelle $\Pi(t, \omega) = \delta(t, \omega)$ donne à nouveau la distribution de Wigner-Ville, et est donc inutile. On ne dispose pas de règle quantitative qui permet de savoir quand l'application de la réallocation est digne d'intérêt. Néanmoins, il est naturel de penser qu'elle est justifiée lorsque $\Pi(t, \omega)$ définit implicitement un voisinage du plan temps-fréquence (qui donne un sens à la notion de centre de masse local) aux dimensions telles que l'atténuation des interférences soit suffisante.

Propriétés

On répertorie ici quelques propriétés des distributions de la classe de Cohen réallouées qui sont intrinsèquement liées à la méthode de réallocation et donc vérifiées par toutes celles-ci). On donne les preuves sans entrer dans les détails (on réfère le lecteur intéressé à [5]).

- **Distribution d'énergie**

La réallocation ne fait que déplacer des valeurs. Si la distribution à réallouer est une distribution d'énergie, i.e., si $\iint C_x(t, \omega) dt d\omega / (2\pi) = \|x\|_2^2$, alors la distribution après réallocation est également une distribution d'énergie :

$$\iint \check{C}_x(t, \omega) \frac{dt d\omega}{2\pi} = \|x\|_2^2. \quad (1.12)$$

- **Covariance aux translations en temps et en fréquence**

La classe de Cohen est la classe des distributions d'énergie quadratiques covariantes aux translations en temps et en fréquence. Il est intéressant de savoir si cette dernière propriété est conservée après réallocation.

Soit $[T_{\tau,\theta}x](t) = x(t - \tau)e^{i\theta t}$, la version translatée du signal $x(t)$ d'un retard τ et d'un doppler θ . Les opérateurs de réallocation de $C_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega)$ s'obtiennent en partant des définitions (1.9) et (1.10), et en invoquant la covariance aux translations en temps et en fréquence des distributions, soit pour la distribution de Wigner-Ville $W_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = W_x(t - \tau, \omega - \theta)$ et pour les distributions de la classe de Cohen $C_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = C_x(t - \tau, \omega - \theta)$. On en déduit

$$\hat{t}_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t - \tau, \omega - \theta)} \iint s W_x(s - \tau, \xi - \theta) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (1.13)$$

$$\hat{\omega}_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t - \tau, \omega - \theta)} \iint \xi W_x(s - \tau, \xi - \theta) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (1.14)$$

équation dans laquelle on reconnaît, après un changement de variables, les opérateurs de réallocation de $C_x(t, \omega)$

$$\hat{t}_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = \tau + \hat{t}_x(t - \tau, \omega - \theta) \quad (1.15)$$

$$\hat{\omega}_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = \theta + \hat{\omega}_x(t - \tau, \omega - \theta). \quad (1.16)$$

Utilisés dans l'éq. (1.11), ils conduisent à

$$\check{C}_{T_{\tau,\theta}x}(t, \omega) = \check{C}_x(t - \tau, \omega - \theta), \quad (1.17)$$

ce qui prouve la covariance aux translations en temps et en fréquence des distributions de la classe de Cohen réallouées.

- *Localisation parfaite sur les lignes du plan temps-fréquence*

L'action des opérateurs de réallocation se traduit par une compression de chaque composante du signal le long de leur loi de retard de groupe ou/et de fréquence instantanée. Sur les modulations de fréquence (chirps) linéaires et d'amplitude constante, on peut montrer qu'il en résulte une localisation parfaite des distributions réallouées.

$$x(t) = \exp(i(\beta t^2/2 + \omega_0 t + \gamma)) \Rightarrow \check{C}_x(t, \omega) = \delta(\omega - (\beta t + \omega_0)), \quad (1.18)$$

Cette propriété est simple à démontrer dans la mesure où pour ces signaux la distribution de Wigner-Ville est elle-même une distribution de Dirac sur la loi $\omega = \beta t + \omega_0$. Les centres de masse éqs. (1.9) et (1.10) sont donc localisés nécessairement sur cette loi, ce qui prouve (1.18).

Plus généralement, les distributions réallouées de la classe de Cohen sont parfaitement localisées sur tous les signaux pour lesquels la distribution de Wigner-Ville se localise parfaitement c'est-à-dire en plus des chirps, les fréquences pures ($\beta = 0$) et les impulsions (que l'on peut abusivement assimiler au cas où $\beta \rightarrow \infty$).

- *Non linéarité et localisation*

Dans le cas de chirps non linéaires, la réallocation aura un effet de compression similaire, si la fréquence instantanée ou le retard de groupe du signal sont presque linéaires *localement*, c'est-à-dire dans un domaine temps-fréquence dont le support est défini par les largeurs en temps et en fréquence

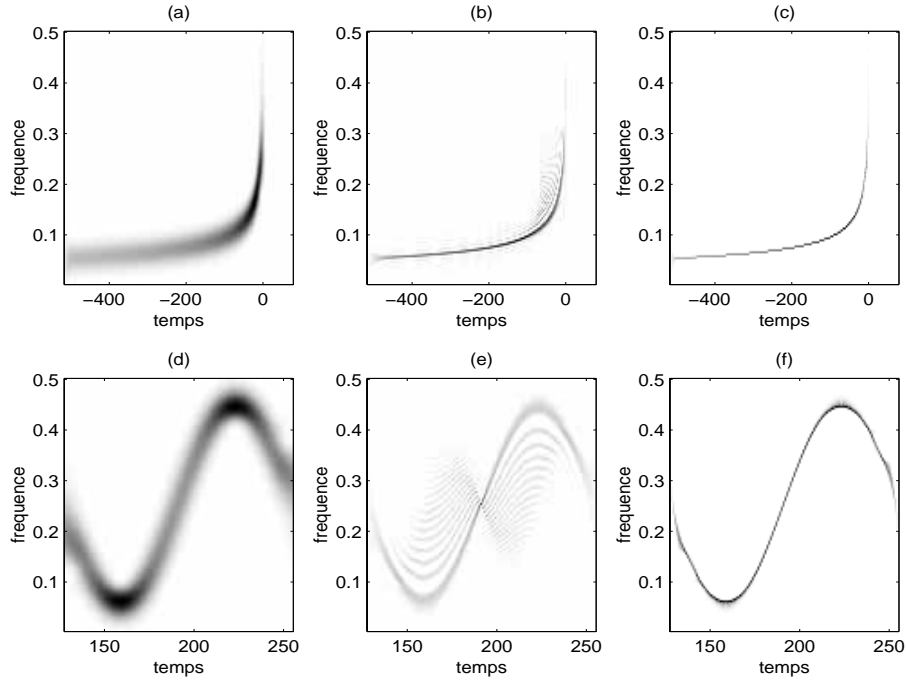


FIG. 1.3 – *Spectrogrammes réalloués de modulations non linéaires de fréquence.* Pour les modulations non linéairement en fréquence, le spectrogramme réalloué possède encore à la fois une bonne localisation le long de la ligne de fréquence instantanée (qui provient de la distribution de Wigner-Ville) et peu d'interférences (héritage du spectrogramme) à la condition que le signal puisse être assimilé localement à une modulation linéaire de fréquence. Ceci est illustré sur deux signaux test : un chirp en loi de puissance qui nous intéressera plus particulièrement au chapitre 4, et une modulation sinusoïdale de fréquence d'amplitude constante. Pour ces deux signaux, on présente le spectrogramme (a) et (d), suivi de la distribution de Wigner-Ville (b) et (e), et enfin le spectrogramme réalloué (associé au spectrogramme de la première colonne) (c) et (f). On note que l'on perd en localisation aux endroits où l'hypothèse de linéarité locale est moins vérifiée (par exemple aux sommets de la sinusoïde).

de la fenêtre d'analyse. Ceci est illustré en Fig. 1.3 avec le spectrogramme réalloué d'un chirp en loi de puissance et d'une modulation sinusoïdale de fréquence.

En conclusion, les distributions réallouées résolvent un compromis, en ayant à la fois peu d'interférences et de bonnes propriétés de localisation. Le prix de ce compromis est la complexité de la distribution. Les distributions réallouées ne font pas partie de la classe des distributions quadratiques. Leur forte non linéarité fait qu'elles sont moins robustes au bruit, et qu'elles deviennent plus difficiles à manier mathématiquement, comme nous allons le voir dans la suite du document.

1.1.3 Généralisation à la classe affine

La classe affine regroupe les distributions d'énergie temps-échelle quadratiques et covariantes par les translations en temps et en échelle⁴. Ces distributions s'écrivent comme des versions modifiées de

4. Les variables a et b désigneront respectivement dans ce cadre l'échelle et le temps.

la distribution de Wigner-Ville

$$\Omega_x(a, b) = \iint W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}. \quad (1.19)$$

par un lissage particulier que l'on qualifie d'*affine*. La forme du noyau varie à chaque échelle. Pour les échelles $a > 1$ (resp. $a < 1$), c'est une version dilatée (resp. contractée) en temps et contractée (resp. dilatée) en fréquence du noyau de référence $\Pi(t, \omega)$. Cela ne nous empêche pas de continuer à pouvoir appliquer l'idée de refocalisation par la réallocation des contributions temps-échelle vers la distribution de Wigner-Ville par des centres de masse locaux. La définition de l'opérateur de réallocation en temps se déduit directement

$$\hat{b}_x(a, b) = \frac{1}{C_x(a, b)} \iint s W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}. \quad (1.20)$$

La nature particulière du lissage affine nous oblige à passer par l'intermédiaire d'une définition fréquentielle

$$\hat{\omega}_x(a, b) = \frac{1}{C_x(a, b)} \iint \xi W_x(s, \xi) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{dsd\xi}{2\pi}, \quad (1.21)$$

que l'on convertit ensuite en échelle par

$$\hat{a}_x(a, b) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_x(a, b)}, \quad (1.22)$$

où $\omega_0 = \iint \xi \Pi(s, \xi) dsd\xi / (2\pi)$ est la fréquence de référence du noyau $\Pi(t, \omega)$ (de norme $L^1(\mathbb{R})$ unité).

On procède ensuite à la réorganisation des contributions temps-échelle de la même manière qu'en éq. (1.11)

$$\check{\Omega}_x(a, b) = \iint \Omega_x(\zeta, s) \delta(b - \hat{b}_x(\zeta, s), a - \hat{a}_x(\zeta, s)) \frac{\zeta^2}{\hat{a}_x^2(\zeta, s)} dsd\zeta, \quad (1.23)$$

à la différence, toutefois, de l'ajout d'une mesure qui garantit que la distribution réallouée soit de même somme que la distribution standard.

Notons que dans cette classe, l'égal du spectrogramme dans la classe de Cohen, est le scalogramme $S_x^\psi(a, b)$. Il se définit comme $S_x^\psi(a, b) = |T_x^\psi(a, b)|^2$, le module carré de la transformée en ondelettes,

$$T_x^\psi(a, b) = \int x(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds, \quad (1.24)$$

ou comme le membre de la classe affine dont le noyau de $\Pi(t, \omega) = W_\psi(t, \omega)$ est une distribution de Wigner-Ville. Nous nous y intéresserons en détail un peu plus loin.

Les distributions réallouées de la classe affine héritent de propriétés similaires à celles de la classe Cohen (voir [5] pour les démonstrations) à savoir : ce sont des distributions d'énergie, covariantes aux translations en temps et en échelle, et elles sont parfaitement localisées sur les mêmes signaux que la distributions de Wigner-Ville (modulations linéaires de fréquence, impulsion de Dirac, fréquence).

Au delà de la classe de Cohen et de la classe affine, la méthode de réallocation peut être généralisée pour toutes les classes de distributions dont les membres sont obtenus par le lissage d'une

distribution de référence (unitaire, généralement) présentant de bonnes propriétés de localisation sur une gamme de signaux utiles. Les distributions réallouées hériteront de ces propriétés tout en profitant du peu d'interférences dans la distribution lissée. Cela fait de la méthode, un processus général et systématique pouvant s'appliquer à d'autres types de distribution temps-fréquence (la classe hyperbolique [80], par exemple). Nous nous restreindrons cependant dans ce document aux distributions temps-fréquence et temps-échelle.

1.1.4 Champ de vecteur de réallocation

Dans les deux chapitres suivants, nous préférons voir l'action de la réallocation comme la modification du plan temps-fréquence et de la distribution temps-fréquence qu'il contient, par le champ des vecteurs de déplacements

$$\hat{\mathbf{r}}_x(t, \omega) = (\hat{t}_x - t, \hat{\omega}_x - \omega)^t, \quad (1.25)$$

plutôt que par celle des opérateurs (1.9) et (1.10).

Pour les calculs, il nous sera commode d'une part d'assimiler le plan temps-fréquence au plan complexe (t pour la partie réelle et ω pour la partie imaginaire), l'éq. (1.25) devenant alors

$$\hat{r}_x(t, \omega) = (\hat{t}_x - t) + i(\hat{\omega}_x - \omega), \quad (1.26)$$

et d'autre part, de normaliser⁵ le champ des vecteurs de réallocation par les largeurs temporelle et fréquentielle du noyau

$$\Delta t = \left(\int t^2 \Pi(t, \omega) \frac{dt d\omega}{2\pi} \right)^{1/2} \quad \Delta \omega = \left(\int \omega^2 \Pi(t, \omega) \frac{dt d\omega}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad (1.27)$$

ce qui conduit à

$$\mathbf{r}_x(t, \omega) = \left(\frac{\hat{t}_x - t}{\Delta t}, \frac{\hat{\omega}_x - \omega}{\Delta \omega} \right)^t, \quad (1.28)$$

ou bien dans le plan complexe, par

$$r_x(t, \omega) = \frac{\hat{t}_x - t}{\Delta t} + i \frac{\hat{\omega}_x - \omega}{\Delta \omega}. \quad (1.29)$$

1.2 La réallocation du spectrogramme

Dans le cas particulier du spectrogramme, d'autres formulations sont possibles pour les opérateurs de réallocation (1.5) et (1.6). Chacune d'entre elles a une utilité spécifique ou ouvre les portes à de nouvelles interprétations.

1.2.1 Relation avec la phase de la FCT, interprétation en tant que fréquence instantanée et retard de groupe locaux

Nous savons déjà que le noyau de paramétrisation $\Pi(t, \omega)$ du spectrogramme dans la classe de Cohen est la distribution de Wigner-Ville de la fenêtre (cf. éqs. (1.4) et (1.8)). Les opérateurs de

5. Pour mémoire, le champ de vecteurs de réallocation se présentera sans couvre-chef si on lui enlève sa dimension.

réallocation sont donc des centres de masse calculés dans des voisinages qui ne sont pas quelconques mais reliés à une réalité physique. Ceci justifie le fait que des liens existent entre les opérateurs de réallocation et des grandeurs qui ont un sens physique avéré.

Dans un premier temps, il est possible de reformuler les définitions (1.5) et (1.6) à l'aide de la FCT ou de transformées linéaires analogues du signal. Ceci est fait en Annexe A et conduit à l'équation (A.9) pour l'opérateur en temps, que nous rappelons ici :

$$\iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \operatorname{Re} \left\{ F_x^{h*}(t, \omega) \int s x(s) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2} \right\}, \quad (1.30)$$

et pour l'opérateur en fréquence (cf. (A.15)) :

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \omega S_x^h(t, \omega) - \operatorname{Im} \left\{ F_x^{h*}(t, \omega) \int x(s) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds e^{it\omega/2} \right\}. \quad (1.31)$$

À partir de ces deux nouvelles formulations, il est immédiat d'établir le lien des opérateurs de réallocation aux dérivées partielles⁶ de la phase $\varphi(t, \omega) = \arg\{F(t, \omega)\} = \operatorname{Im}\{\log F(t, \omega)\}$ de la FCT, simplement en notant que $\partial_t \varphi(t, \omega) = \operatorname{Im}\{\partial_t F/F\}(t, \omega)$ et $\partial_\omega \varphi(t, \omega) = \operatorname{Im}\{\partial_\omega F/F\}(t, \omega)$ [67]

$$\hat{t}_x^h(t, \omega) = t/2 - \partial_\omega \varphi \quad \hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \omega/2 + \partial_t \varphi. \quad (1.32)$$

Les éqs. (1.32) sont importantes à plusieurs titres :

– *Information de phase*

elles nous informent que les opérateurs de réallocation intègrent l'information de phase de la FCT dont on n'a pas tenu compte pour le calcul du spectrogramme puisque que l'on en garde uniquement le module.

– *Fréquence instantanée et retard de groupe locaux*

Avec une réorganisation dans les éqs. (1.32) des termes de phases de la FCT, on peut mettre en évidence que l'opérateur en temps peut être interprété en tant que retard de groupe du signal vu à travers la fenêtre $h(t)$

$$\hat{t}_x^h(t, \omega) = -\partial_\omega \arg \left\{ \int X(\xi) (H(\xi - \omega) e^{-i(\xi - \omega)t})^* \frac{d\xi}{2\pi} \right\}, \quad (1.33)$$

et de manière duale, l'opérateur en fréquence, en tant que fréquence instantanée du signal filtré dans une bande de fréquence définie par la fenêtre

$$\hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \partial_t \arg \left\{ \int x(s) (h(s - t) e^{i\omega(s - t)})^* ds \right\}. \quad (1.34)$$

Ceci nous permet de donner une nouvelle interprétation du fonctionnement de la réallocation du spectrogramme. La valeur du spectrogramme $S_x^h(t, \omega)$ correspond à l'énergie de la “partie” du signal contenue dans un voisinage temps-fréquence centré sur (t, ω) aux dimensions fixées par les tailles temporelle et fréquentielle de la fenêtre. La réallocation du spectrogramme regroupe en une même position les énergies de chacune des “parties” du signal qui ont le même retard de groupe et la même fréquence instantanée.

6. Pour simplifier les notations, on remplacera $\partial/\partial x$ par l'écriture plus compacte ∂_x .

1.2.2 Formulation à l'aide de quotients de FCT, application à la mise en œuvre

Il est également possible de relier les opérateurs de réallocation directement à des FCT (sans en prendre la phase). Il s'agit de reconnaître dans l'intégrale du membre de droite de l'éq. (1.30) la FCT du signal associée à une fenêtre égale à $th(t)$:

$$\iint s W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \text{Re} \left\{ F_x^{th}(t, \omega) F_x^{h*}(t, \omega) \right\} + t S_x^h(t, \omega), \quad (1.35)$$

et celle de l'éq. (1.31) une FCT associée à une fenêtre égale la dérivée de $h(t)$:

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi} = -\text{Im} \left\{ F_x^{dh/dt}(t, \omega) F_x^{h*}(t, \omega) \right\} + \omega S_x^h(t, \omega). \quad (1.36)$$

Les opérateurs de réallocation s'expriment alors à l'aide de quotients de FCT [5]

$$\hat{t}_x^h(t, \omega) = t + \text{Re} \left\{ \frac{F_x^{th}}{F_x^h} \right\} (t, \omega) \quad (1.37)$$

$$\hat{\omega}_x^h(t, \omega) = \omega - \text{Im} \left\{ \frac{F_x^{dh/dt}}{F_x^h} \right\} (t, \omega). \quad (1.38)$$

On peut en faire de même avec le vecteur de déplacement normalisé (eq. (1.29)) par Δt , ici égal à la durée de la fenêtre (d'énergie unité) $\Delta t_h = (\int t^2 |h(t)|^2 dt)^{1/2}$ et $\Delta \omega$, égal à la largeur de bande de la fenêtre $\Delta \omega_h = (\int \omega^2 |H(\omega)|^2 d\omega / (2\pi))^{1/2}$

$$r(t, \omega) = \frac{1}{\Delta t_h} \text{Re} \left\{ \frac{F_x^{th}}{F_x^h} \right\} - \frac{i}{\Delta \omega_h} \text{Im} \left\{ \frac{F_x^{dh/dt}}{F_x^h} \right\}. \quad (1.39)$$

Ces expressions sont très importantes pour la mise en œuvre du spectrogramme réalloué. Elles permettent de remplacer le calcul direct des centres de gravité locaux (très coûteux) ou la dérivation de la phase de la FCT (avec toutes les problèmes d'instabilité que cause son déroulement) par un algorithme efficace qui se résume par :

- l'évaluation des trois FCT du signal basées sur les trois fenêtres $h(t)$, $th(t)$ et dh/dt ,
- leur combinaison selon les eqs. (1.37) et (1.38),
- le calcul du spectrogramme en prenant le module carré de la première,
- la réallocation des valeurs du spectrogramme, proprement dite, selon l'éq. (1.7).

Cette dernière étape mise à part, le coût de calcul du spectrogramme réalloué varie en $O(NM \log M)$, avec un échantillonnage de N points en temps et M points en fréquence. Son utilisation pratique pour des problèmes réels de traitement du signal est donc tout à fait envisageable. Qui plus est, une mise en œuvre récursive de cet algorithme a été proposée récemment [87]. On peut alors penser utiliser le spectrogramme réalloué pour des applications en temps réel.

Si la fenêtre $h(t)$ est gaussienne,

$$h(t) = \pi^{-1/4} \lambda^{-1/2} e^{-t^2/(2\lambda^2)}, \quad (1.40)$$

seulement deux FCT seront nécessaires, puisque dans ce cas, les fenêtres $th(t)$ et dh/dt sont proportionnelles

$$\frac{dh}{dt}(t) = -(1/\lambda^2)th(t). \quad (1.41)$$

Il est alors remarquable que le champ de réallocation normalisé en éq. (1.39) prend la forme particulièrement compacte

$$r_x^h = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{F_x^{th}}{F_x}, \quad (1.42)$$

étant donnés $\Delta t_h = \lambda/\sqrt{2}$ et $\Delta \omega_h = 1/(\sqrt{2}\lambda)$.

1.2.3 Réallocation du spectrogramme et approximation de la phase stationnaire

Kodera *et al.*, dans leur article [68], mettent en avant un argument supplémentaire pour montrer l'importance des opérateurs de réallocation pour la caractérisation du signal. Le point de départ de cet argument est l'application de l'approximation de phase stationnaire à la formule de reconstruction du signal à partir de la FCT. Une erreur de calcul fait que l'interprétation qui en résulte est erronée. Dans cette section, on reprend cette idée en la mettant au net. Nous en profitons pour prolonger la réflexion et montrons qu'il est possible d'étendre le résultat à la reconstruction approchée de la transformée de Fourier fractionnaire du signal en utilisant simplement quelques valeurs de la FCT situées en des points où le vecteur de réallocation obéit à des contraintes géométriques précises.

Reconstruction du signal et approximation de phase stationnaire

Rappelons tout d'abord que la FCT n'est autre que le produit scalaire du signal $x(t)$

$$F(t, \omega) = \int x(s) h_{(t, \omega)}^*(s) ds, \quad (1.43)$$

avec tous les éléments d'une famille de signaux élémentaires $h_{(t, \omega)}(s) = h(s - t)e^{i\omega s}e^{-it\omega/2}$ tous déduits par une translation en temps et en fréquence d'un signal de référence $h(t)$.

• Inversion de la FCT

À temps et fréquence continus, la famille sur laquelle on projette, dispose de suffisamment d'éléments pour que l'on puisse revenir au signal par la recombinaison suivante :

$$x(s) = \iint F(t, \omega) h_{(t, \omega)}(s) \frac{dtd\omega}{2\pi}. \quad (1.44)$$

Si $h(t)$ est une fenêtre réelle, on peut séparer les termes d'amplitude et de phase comme suit

$$x(s) = \iint |F(t, \omega)| h(s - t) e^{i(\varphi(t, \omega) + \omega s - t\omega/2)} \frac{dtd\omega}{2\pi} \quad (1.45)$$

ce qui montre que le signal résulte de l'intégrale double d'une fonction dont les oscillations sont réglées par la phase $\varphi(t, \omega)$ de la FCT. Sous certaines conditions de variation relative des termes d'amplitude et de phase, il existe pour ce genre d'intégrale, une méthode de calcul approchée, dite

de la *phase stationnaire*⁷ (voir, par exemple, [92]): si le module de l'intégrande varie lentement par rapport à la phase (condition que nous supposons vérifiée), alors ses valeurs alternativement positives puis négatives vont se compenser quand on en fait la somme, à l'exception des points où la phase stationne, c'est-à-dire

$$\partial_t(\varphi(t, \omega) + \omega s - t\omega/2) = 0 \quad (1.46a)$$

$$\partial_\omega(\varphi(t, \omega) + \omega s - t\omega/2) = 0. \quad (1.46b)$$

• *Phase stationnaire et opérateur de réallocation*

Pour la clarté de l'exposé, nous nous placerons dans la situation la plus simple où il existe un unique point stationnaire (t_s, ω_s) qui vérifie les équations précédentes. Après développement des éqs. (1.46) et compte tenu des relations (1.32) qui lient la phase $\varphi(t, \omega)$ aux opérateurs de réallocation du spectrogramme, on déduit que ces derniers doivent respecter au point (t_s, ω_s) les deux conditions suivantes :

$$\hat{\omega}(t_s, \omega_s) - \omega_s = 0 \quad (1.47a)$$

$$\hat{t}(t_s, \omega_s) = s. \quad (1.47b)$$

L'équation précédente signifie que le point stationnaire associé à l'évaluation approchée de $x(s)$ est celui — éq. (1.47b) — qui vient se réallouer au temps s , — éq. (1.47a) — tout en restant à la même fréquence. Ceci est illustré schématiquement en Fig. 1.4.

• *Reconstruction approchée*

Dans le cas d'un unique point stationnaire où, de plus, la matrice dérivée seconde de la phase de l'intégrande $\partial_{(t, \omega)}^2(\varphi(t, \omega) - t\omega/2)$ est non dégénérée, l'intégrale double (1.45) s'écrit sous forme approchée [92] :

$$x(s) = 2\pi i |\det \partial_{(t, \omega)}^2(\varphi(t, \omega) - t\omega/2)(t_s, \omega_s)|^{-1/2} F(t_s, \omega_s) h_{(t_s, \omega_s)}(s). \quad (1.48)$$

Cette équation montre que la reconstruction approchée du signal peut être conduite seulement avec les quelques valeurs de la FCT prises aux points du plan temps-fréquence où le vecteur de réallocation respecte la condition (1.47). Cela met en évidence l'importance de ces derniers pour la description temps-fréquence du signal.

Le seul obstacle à la mise en œuvre de la formule de reconstruction approchée (1.48) est l'évaluation numérique du déterminant

$$\det \partial_{(t, \omega)}^2(\varphi - t\omega/2) = \partial_t^2 \varphi \partial_\omega^2 \varphi - (\partial_{t, \omega}^2 \varphi - 1/2)^2. \quad (1.49)$$

Il est possible de passer outre cette difficulté en calculant les dérivées successives de la phase $\varphi(t, \omega)$ en fonction de différentes FCT⁸ selon le même principe qu'en Sect. (1.2.2). Le déterminant (1.49) s'obtient alors par

$$\det \partial_{(t, \omega)}^2(\varphi - t\omega/2) = \text{Im}\{f^{th}\} \text{Im}\{f^{dh}\} - (\text{Re}\{f^{tdh}\})^2, \quad (1.50)$$

7. Nous nous intéresserons en détail à l'approximation de phase stationnaire au chapitre 4. L'annexe D y est d'ailleurs totalement consacrée, mais uniquement pour le calcul approché d'intégrales simples. L'argument de phase stationnaire invoqué ici pour les intégrales doubles est celui qui est communément admis, bien que nous le sachions critiquable (cf. Annexe D).

8. Nous éluderons la démonstration de l'éq. (1.50).

une combinaison de six FCT (trois si la fenêtre est gaussienne), du signal, chacune associée à une fenêtre différente

$$f^{th}(t, \omega) = \left(\frac{F^{th}}{F^h} \right)^2 (t, \omega) - \frac{F^{t^2h}}{F^h} (t, \omega) \quad (1.51)$$

$$f^{dh}(t, \omega) = \left(\frac{F^{dh/dt}}{F^h} \right)^2 (t, \omega) - \frac{F^{d^2h/dt^2}}{F^h} (t, \omega) \quad (1.52)$$

$$f^{tdh}(t, \omega) = \frac{F^{th} F^{dh/dt}}{(F^h)^2} (t, \omega) - \frac{F^{tdh/dt}}{F^h} (t, \omega). \quad (1.53)$$

Pour reconstruire le signal, il n'est donc pas nécessaire de disposer de toute la FCT, que l'on sait par ailleurs très redondante, pour revenir au signal. Il suffit de restreindre la FCT aux points stationnaires : cette description temps-fréquence parcimonieuse du signal est en fait identique au “squelette” proposé par les méthodes de “arête et squelette” [33] que nous présenterons plus en détail en Sect. 1.4. Bien qu'ils aboutissent à une même description du signal, il est important de signaler que le raisonnement fait ici et celui employé par les méthodes “arête et squelette” sont différents : on procède ici aussi à l'application de l'argument de phase stationnaire, mais pas sur les mêmes quantités (cf. Sect. 1.4). En ce qui concerne l'algorithme de reconstruction du signal, celui que nous décrivons et celui des méthodes “arête et squelette” diffèrent totalement aussi bien dans l'idée que dans leur mise en œuvre.

Il est entendu que nous ne proposons ici aucun critère de validité de l'approximation faite ici, ce qui serait pourtant nécessaire. En particulier, il serait intéressant de savoir, à fenêtre $h(t)$ fixée, pour quelle classe de signaux, les termes d'amplitude et de phase de l'intégrande dans l'éq. (1.45) respectent les conditions nécessaires à l'approximation de phase stationnaire.

Reconstruction de la transformée de Fourier du signal

Les conditions (1.47) font apparaître une dissymétrie entre les variables temps et fréquence. Ceci est dû au fait que l'on veuille reconstruire le signal dans son extension temporelle. On peut penser au cas dual de la reconstruction de la transformée de Fourier du signal qui s'écrit

$$X(\xi) = \iint F(t, \omega) H_{(t, \omega)}(\xi) \frac{dt d\omega}{2\pi}, \quad (1.54)$$

où la famille de signaux élémentaires se déduit de $H(\omega)$ par $H_{(t, \omega)}(\xi) = H(\xi - \omega) e^{-i\xi t} e^{it\omega/2}$.

Si $h(t)$ est à symétrie hermitienne ($H(\omega)$ est réelle), on peut alors suivre le même raisonnement pour obtenir une reconstruction approchée de $X(\xi)$. Cette fois, les points stationnaires sont ceux qui vérifient

$$\hat{\omega}(t_s, \omega_s) = \xi \quad (1.55a)$$

$$\hat{t}(t_s, \omega_s) - t_s = 0. \quad (1.55b)$$

Ce sont donc maintenant les points — éq. (1.55b) — qui viennent se réallouer à la fréquence ξ — éq. (1.55a) — tout en restant au même instant (cf. Fig. 1.4).

Reconstruction de la transformée de Fourier fractionnaire du signal

On peut encore généraliser le processus en essayant d'obtenir la reconstruction approchée de la transformée de Fourier fractionnaire d'angle α (dans $]-\pi, \pi[$) du signal $x(t)$, définie par

$$X^{(\alpha)}(\xi) = \frac{e^{i(\alpha-\pi/2)/2}}{\sqrt{\sin \alpha}} \int x(s) \exp\left(\frac{i}{\sin \alpha} \left(\frac{s^2}{2} \cos \alpha - s\xi + \frac{\xi^2}{2} \cos \alpha\right)\right) ds \quad (1.56)$$

si α est différent de 0 ou π . Pour $\alpha = 0$, cette transformation est l'identité $X^0(\xi) = x(\xi)$. La transformée de Fourier d'angle $\alpha = \pi/2$ est la transformée de Fourier au sens classique $X^{\pi/2}(\xi) = X(\xi)$. La transformée de Fourier fractionnaire est reliée de manière biunivoque au signal (dans $L^2(\mathbb{R})$).

Le paramètre α permet de passer continûment de l'axe des temps à l'axe des fréquences. On peut associer à chaque transformée fractionnaire la droite $D^{(\alpha)}$ du plan temps-fréquence qui passe par l'origine et fait un angle α avec l'axe des temps. On peut voir $D^{(\alpha)}$ comme un axe gradué par la variable ξ ($\alpha = 0$: l'axe des temps, $\alpha = \pi/2$: l'axe des fréquences).

La reconstruction de $X^{(\alpha)}(\xi)$ se fait par la somme double

$$X^{(\alpha)}(\xi) = \iint F(t, \omega) H_{(t, \omega)}^{(\alpha)}(\xi) \frac{dt d\omega}{2\pi}, \quad (1.57)$$

des éléments de la famille de projection, qui dépendent de manière compliquée du signal de référence $H^{(\alpha)}(\xi)$:

$$H_{(t, \omega)}^{(\alpha)}(\xi) = H^{(\alpha)}(\xi - (t \cos \alpha + \omega \sin \alpha)) \exp i \left(\frac{t\omega}{2} + \xi(-t \sin \alpha + \omega \cos \alpha) + \frac{\cos \alpha}{2} (t^2 \sin \alpha - 2t\omega \cos \alpha - \omega^2 \sin \alpha) \right), \quad (1.58)$$

pondérés par la valeur de la FCT correspondante.

Si $H^{(\alpha)}(\xi)$ est réelle (ce qui est, par exemple, vrai si $h(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}$, quelque soit l'angle α) alors on peut appliquer la même procédure que pour les deux calculs précédents. Les points où la phase de l'intégrande est stationnaire, obéissent aux deux relations suivantes

$$\hat{\omega}(t, \omega) - \xi \sin \alpha + \cos \alpha (t \sin \alpha - \omega \cos \alpha) = 0 \quad (1.59a)$$

$$\hat{t}(t, \omega) - \xi \cos \alpha - \sin \alpha (t \sin \alpha - \omega \cos \alpha) = 0, \quad (1.59b)$$

qui se traduisent sur les opérateurs de réallocation par

$$(\hat{\omega}(t_s, \omega_s) - \omega_s) \cos \alpha - (\hat{t}(t_s, \omega_s) - t_s) \sin \alpha = 0 \quad (1.60a)$$

$$\hat{t}(t_s, \omega_s) \cos \alpha + \hat{\omega}(t_s, \omega_s) \sin \alpha = \xi. \quad (1.60b)$$

Ces deux relations signifient géométriquement que les points stationnaires sont ceux qui — éq. (1.60b) — viennent se réallouer au point d'abscisse ξ dans le système de coordonnées définies sur $D^{(\alpha)}$, et — éq. (1.60a) — parallèlement à cet axe (le point doit se déplacer sans changer de coordonnée sur l'axe dual $D^{(\alpha+\pi/2)}$). Ceci est illustré en Fig. 1.4.

On peut, à l'aide de ces résultats, généraliser les méthodes “arête et squelette” à des directions obliques dans le plan temps-fréquence en suivant la même démarche à savoir la restriction de la FCT aux points stationnaires. Cela a déjà été proposé pour $\alpha = \pi/2$ (transformée de Fourier classique) dans [52]. Il paraît naturel de dire que, pour garantir une description parcimonieuse fidèle du signal (et corrélativement, pour disposer d'une bonne reconstruction du signal), on a intérêt à considérer, selon la nature du signal, une direction plutôt qu'une autre. Il serait intéressant alors de savoir quelle direction principale choisir pour un signal donné.

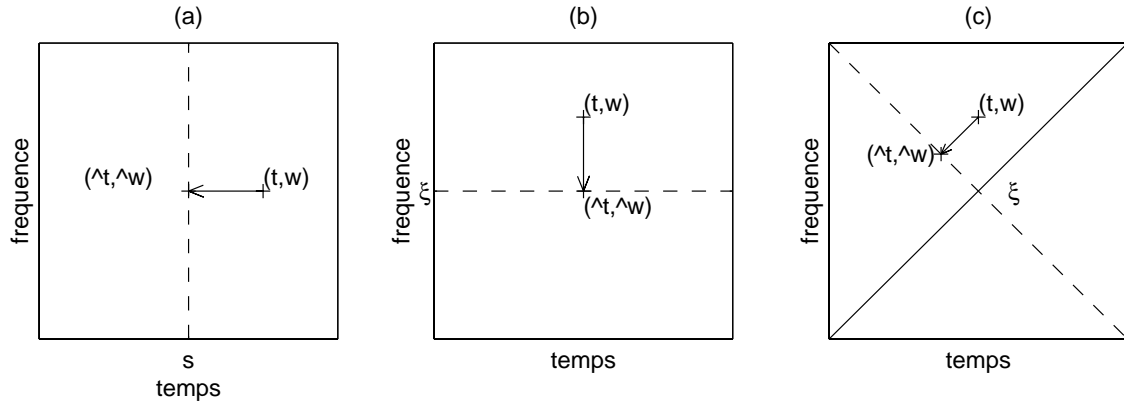


FIG. 1.4 – **Vecteurs de réallocation aux points pertinents pour l'approximation de phase stationnaire.** Cette figure décrit la configuration que doit respecter les opérateurs de réallocation $(\hat{t}, \hat{\omega})$, pour que le point (t, ω) où ils sont calculés soit un point stationnaire (cf. Sect. 1.2.3), i.e., un point pertinent pour l'approximation de phase stationnaire. Le vecteur de réallocation est indiqué par une flèche. **(a)** Reconstruction approchée du signal $x(t)$ au temps $t = s$. Le vecteur de réallocation indiqué sur la figure respecte les conditions (1.47), le point (t, ω) est donc un point stationnaire. **(b)** Reconstruction approchée de la transformée de Fourier du signal $X(\omega)$ à la fréquence $\omega = \xi$. Le vecteur de réallocation indiqué sur la figure valide les conditions (1.55). **(c)** Reconstruction approchée de la transformée de Fourier fractionnaire du signal $X^{(\alpha)}(\omega)$ ($\alpha = \pi/4$) pour $\omega = \xi$. Le vecteur de réallocation présenté ici respecte les conditions (1.60).

1.2.4 Opérateur de réallocation et changement d'échelle

Nous précisons ici une propriété dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants. Il s'agit d'établir la relation entre le champ de vecteur de réallocation du spectrogramme du signal dilaté d'un facteur λ avec celui du spectrogramme du signal calculé avec une fenêtre comprimée par le même rapport.

Soit $x_\lambda(t) = \sqrt{\lambda}x(\lambda t)$ la version dilatée (si $\lambda < 1$) ou comprimée (si $\lambda > 1$) du signal $x(t)$. Un changement de variable $u = \lambda s$ dans la définition de la FCT (1.3) de $x_\lambda(t)$

$$F_{x_\lambda}^h(t, \omega) = e^{it\omega/2} \sqrt{\lambda} \int x(u) h^* \left(\frac{u}{\lambda} - t \right) e^{-i\omega u/\lambda} \frac{du}{\lambda} \quad (1.61)$$

nous permet de transformer une dilatation sur le signal par une compression sur la fenêtre

$$F_{x_\lambda}^h(t, \omega) = F_x^{h_1/\lambda}(\lambda t, \omega/\lambda). \quad (1.62)$$

Pour les opérateurs de réallocation, on utilise la formulation (1.32) en fonction de la phase de la FCT dans laquelle on insère le résultat précédent

$$\hat{t}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \frac{t}{2} - \partial_\omega \left(\arg F_x^{h_1/\lambda}(\lambda t, \omega/\lambda) \right) \quad (1.63)$$

$$\hat{\omega}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \frac{\omega}{2} + \partial_t \left(\arg F_x^{h_1/\lambda}(\lambda t, \omega/\lambda) \right). \quad (1.64)$$

Le développement des dérivées partielles suivi d'une factorisation adéquate

$$\hat{t}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda t}{2} - \partial_\omega \left(\arg F_x^{h_1/\lambda} \right)(\lambda t, \omega/\lambda) \right) \quad (1.65)$$

$$\hat{\omega}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \lambda \left(\frac{\omega/\lambda}{2} + \partial_t \left(\arg F_x^{h_1/\lambda} \right)(\lambda t, \omega/\lambda) \right) \quad (1.66)$$

conduit au résultat suivant :

$$\hat{t}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \hat{t}_x^{h_1/\lambda}(\lambda t, \omega/\lambda)/\lambda \quad (1.67)$$

$$\hat{\omega}_{x_\lambda}^h(t, \omega) = \lambda \hat{\omega}_x^{h_1/\lambda}(\lambda t, \omega/\lambda). \quad (1.68)$$

Les champs de vecteurs de réallocation $S_{x_\lambda}^h(t, \omega)$ et de $S_x^{h_1/\lambda}(t, \omega)$ sont donc identiques à condition de regarder un des champs dans un système de coordonnées anamorphosé puis de faire porter l'anamorphose sur le champ lui-même.

1.3 La réallocation du scalogramme

Le scalogramme $S_x^\psi(a, b) = |T_x^\psi(a, b)|^2$ est l'équivalent dans la classe affine du spectrogramme dans la classe de Cohen. Il s'obtient par un lissage de la distribution de Wigner-Ville du signal

$$S_x^\psi(a, b) = \iint W_x(s, \xi) W_\psi \left(\frac{s-b}{a}, a\xi \right) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (1.69)$$

avec un noyau qui est lui-même la distribution de Wigner-Ville du signal de référence qu'utilise la transformée linéaire qui lui est associée à savoir l'ondelette $\psi(t)$. Nous rappelons que la particularité du lissage affine nous oblige à faire intervenir un opérateur supplémentaire en fréquence que l'on convertit ensuite en échelle

$$\hat{b}_x^\psi(a, b) = \frac{1}{S_x^\psi(a, b)} \iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (1.70)$$

$$\hat{\omega}_x^\psi(a, b) = \frac{1}{S_x^\psi(a, b)} \iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} \quad (1.71)$$

$$\hat{a}_x^\psi(a, b) = \omega_0 / \hat{\omega}_x^\psi(a, b) \quad (1.72)$$

en utilisant la fréquence centrale du noyau qui, dans le cas du scalogramme, est aussi celle de l'ondelette (d'énergie unité) $\omega_0 = \int \xi |\Psi(\xi)|^2 d\xi / (2\pi)$.

Pour les mêmes raisons que pour le spectrogramme, la forme spécifique du noyau de lissage du scalogramme va induire des propriétés spécifiques sur ses opérateurs de réallocation.

1.3.1 Relation avec la phase de la transformée en ondelettes

Similairement à la Sect. 1.2.1, une reformulation des opérateurs de réallocation à l'aide de FCT ou de transformées analogues (faite en Annexe B) aboutit aux deux équations suivantes : pour l'opérateur en temps d'une part (équ. (B.10))

$$\iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = \text{Re} \left\{ T_x^{\psi*}(a, b) \int s x(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\}, \quad (1.73)$$

et celui en fréquence d'autre part (équ. (B.16))

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = -\frac{1}{a} \text{Im} \left\{ T_x^{\psi*}(a, b) \int x(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\}. \quad (1.74)$$

On note $\psi_a(t) = \psi(t/a)/\sqrt{a}$ la famille des ondelettes utilisée. Il n'est plus possible d'écrire explicitement \hat{b}_x^ψ comme la dérivée de la phase de $T_x^\psi(a, b)$ et donc comme un retard de groupe comme c'était le cas pour le spectrogramme. Néanmoins, l'équation suivante

$$\hat{b}_x^\psi(a, b) = \text{Re} \left\{ \frac{\int s x(s) \psi_a^*(s-b) ds}{\int x(s) \psi_a^*(s-b) ds} \right\}, \quad (1.75)$$

montre qu'il s'interprète comme un temps moyen du signal vu à travers l'ondelette $\psi_a(t)$ (celle-ci étant abusivement considérée comme une densité de probabilité).

En revanche, on peut faire apparaître explicitement dans l'éq. (1.74) la dérivée de la phase de la transformée en ondelettes

$$\hat{\omega}_x^\psi(a, b) = \partial_t \arg \left\{ \int x(s) \psi_a^*(s-b) ds \right\}, \quad (1.76)$$

qui est donc homogène à une fréquence instantanée du signal filtré dans la bande de fréquence déterminée par $\psi_a(t)$. Dans ce cadre, $\hat{a}_x^\psi(a, b)$ peut être décrit en tant qu'*échelle instantanée* définie comme le rapport de la fréquence centrale ω_0 par la fréquence instantanée.

1.3.2 Formulation à l'aide de quotients de transformées en ondelettes, application à la mise en œuvre

Des formulations qui permettent le calcul efficace des opérateurs de réallocation existent également pour le scalogramme. Celles-ci ont été mises en évidence pour les scalogrammes à base d'ondelettes prenant la forme d'une sinusoïde multipliée par une enveloppe (comme l'ondelette de Morlet que nous verrons plus loin) dans [5]. D'autres obtenues dans [40] convenant à toutes les ondelettes feront l'objet de cette section.

On fait apparaître dans l'éq. (1.73) la transformée en ondelettes avec $t\psi(t)$

$$\iint s W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = b S_x^\psi(a, b) + \operatorname{Re} \left\{ T_x^{t\psi}(a, b) T_x^{\psi*}(a, b) \right\}, \quad (1.77)$$

et dans l'éq. (1.74) celle d'ondelette $d\psi/dt$

$$\iint \xi W_x(s, \xi) W_\psi\left(\frac{s-b}{a}, a\xi\right) \frac{ds d\xi}{2\pi} = -\frac{1}{a} \operatorname{Im} \left\{ T_x^{d\psi/dt}(a, b) T_x^{\psi*}(a, b) \right\}. \quad (1.78)$$

Trois transformées en ondelettes suffisent donc au calcul des opérateurs de réallocation dans la mesure où ils se mettent sous la forme des quotients suivants :

$$\hat{b}_x^\psi(b, a) = b + a \operatorname{Re} \left\{ \frac{T_x^{t\psi}}{T_x^\psi} \right\} \quad \hat{a}_x^\psi(b, a) = -\frac{a\omega_0}{\operatorname{Im} \left\{ T_x^{d\psi/dt} / T_x^\psi \right\}}. \quad (1.79)$$

Le nombre de transformées se réduit à deux pour l'ondelette de Morlet

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \lambda^{-1/2} e^{-t^2/(2\lambda^2) + i\omega_0 t}, \quad (1.80)$$

puisque l'on a, similairement à la fenêtre gaussienne pour le spectrogramme :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{\lambda^2} t\psi(t) + i\omega_0 \psi(t). \quad (1.81)$$

Des simplifications existent également pour un autre type d'ondelette, dite de Klauder. Nous le verrons en Sect. 2.2.

• Algorithme rapide pour la réallocation du scalogramme

Dans le cadre temps-échelle discret, les calculs des trois transformées en ondelettes $T_x^\psi(a, b)$, $T_x^{t\psi}(a, b)$ et $T_x^{d\psi/dt}(a, b)$ peuvent être accomplis efficacement [2, 41] par l'utilisation des algorithmes rapides issus de la théorie de la multirésolution [29]. Nous proposons dans [2, 41] un algorithme d'évaluation de chacune de ces transformées en ondelettes sur une grille quasi-continue avec des ondelettes *splines*. Une seule multirésolution suffit au calcul des trois transformées en ondelettes. Par ailleurs, les ondelettes *splines* présentent deux avantages :

- au sein de l'unique multirésolution, on construit trois bancs de filtres associés aux trois ondelettes. Avec ce type d'ondelette, ils se déduisent très simplement les uns des autres.
- Il n'existe pas nécessairement de multirésolution associée à toutes les ondelettes. En effet, l'ondelette doit satisfaire certaines conditions. Une solution consiste à trouver une ondelette respectant ces conditions, en restant proche (au sens de la norme L^2 par exemple) de l'ondelette avec laquelle on désire analyser le signal. Les ondelettes *splines* définissent un vaste ensemble qui s'avère être un cadre naturel et efficace pour ce genre d'approximation.

On obtient finalement un algorithme assez flexible (grille quasi-continue, large choix d'ondelette) au coût de calcul réduit (en $O(NM)$, avec N nombre d'échantillons du signal et M , nombre d'échelles sélectionnées, au lieu de $O(N^2M)$ pour une mise en œuvre standard) ce qui permet l'utilisation de la réallocation pour des signaux de grandes tailles.

1.4 Une famille de méthodes autour d'une même idée

Nous présentons ici quatre méthodes aux objectifs analogues à celui de la réallocation :

- i. l'analyse spectrale différentielle [46, 62],
- ii. la densité de fréquence instantanée [43],
- iii. les méthodes “arête et squelette” [33],
- iv. la méthode du “squeezing” [72, 30].

Chacune d'entre elles se trouve impliquée plus ou moins fortement dans un problème spécifique (traitement de la parole, analyse de signaux musicaux, détection de modulations de fréquence . . .), mais finalement, ce sont les mêmes quantités mathématiques qui sont utilisées, seul leur emploi diffère selon le cas.

Nous commencerons par une présentation de leur principe en insistant sur les justifications des choix effectués. Nous ferons ensuite une comparaison entre ces quatre méthodes ajoutées à la réallocation selon trois critères choisis pour mettre en lumière leurs principales différences. Ce sera l'occasion de tests communs sur quelques signaux.

Un travail similaire a été fait dans [73] ou plus succinctement dans [30]. Mais, celui qui est présenté ici, qui est la contribution principale de ce chapitre, se singularise des précédents pour deux raisons :

1. les liens que l'on peut tisser entre toutes ces méthodes y sont présentés clairement dans un formalisme unique,
2. les tests faits sur des signaux communs montrent l'intérêt et les limitations de chaque méthode.

1.4.1 Principe

Précisons à nouveau quelques notations qui nous seront utiles par la suite, comme celle de la FCT $F(t, \omega)$:

$$F(t, \omega) = \int x(s) h_{(t, \omega)}^*(s) ds, \quad (1.82)$$

où $h_{(t, \omega)}(s) = h(s - t) e^{i\omega s} e^{-it\omega/2}$. Rappelons également les éqs. (1.32), établies en Sect. 1.2.1, qui précisent comment, à partir de la représentation polaire de la FCT, $F(t, \omega) = |F(t, \omega)| \exp(i\varphi(t, \omega))$, on déduit les opérateurs de réallocation :

$$\hat{t}(t, \omega) = t/2 - \partial_\omega \varphi \quad \hat{\omega}(t, \omega) = \omega/2 + \partial_t \varphi. \quad (1.83)$$

Toutes les méthodes que nous allons présenter, utilisent (parfois implicitement) un modèle pour le signal. On le qualifie généralement de *formantique* (ou de “modulation model”) en traitement de la parole. Le signal y est décrit par une somme de signaux modulés en amplitude et en fréquence

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) \exp(i\theta_n(t)) + b(t), \quad (1.84)$$

sous des hypothèses de variations lentes (i) des enveloppes $A_n(t)$ par rapport à leur phase respective $\theta_n(t)$ et (ii) de la fréquence instantanée $\omega_n(t) = \dot{\theta}_n(t)$ soit :

$$\left| \frac{\dot{A}_n(t)}{A_n(t)} \right| \ll \left| \dot{\theta}_n(t) \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\dot{\theta}_n^2(t)} \right| \ll 1, \quad (1.85)$$

où “ $\dot{}$ ” et “ $\ddot{}$ ” désignent les dérivées premières et secondes respectivement.

Ces deux hypothèses contraignent le signal à certains types de non stationnarité, nommément les dérives lentes de fréquence. On accepte les signaux de régimes transitoires (forte variation d’amplitude et de fréquence) à condition qu’ils se déroulent lentement. On peut dire que le signal défini comme tel, est faiblement non stationnaire. Si $N = 1$, on dit également que le signal $x(t)$ se situe dans la limite *asymptotique* (en temps) ou qu’il est un signal asymptotique [33]. On inclut dans $b(t)$ (que l’on supposera toujours négligeable) les erreurs de modélisation et le bruit d’observation.

Idéalement, on aimerait décrire le signal dans le plan temps-fréquence par la collection des lignes de fréquence instantanée $\omega_n(t)$, le long desquelles on pourrait suivre l’évolution de l’amplitude $A_n(t)$ (ou de l’énergie $A_n^2(t)$). Il s’agit pour toutes les méthodes présentées ici d’obtenir une telle représentation du signal et ce, en mettant l’accent sur le contraste et l’acuité finale du résultat.

Notons que ce que propose C. Berthomier dans [12] peut être vu comme un précurseur à toutes ces techniques (réallocation comprise) : il suggère de mêler l’utilisation de la fréquence instantanée et une mesure énergétique locale pour construire une représentation conjointe en temps et fréquence du signal.

Analyse spectrale différentielle

• Contexte

L’analyse spectrale différentielle a été appliquée aux signaux de sonars animaux (chauve-souris) [45] et plus conséquemment au traitement de la parole [62].

• Problème posé

On se propose de faire le suivi des variations de la fréquence du signal observé dans une bande fréquentielle donnée et ce le plus finement possible [46].

• Solution envisagée

En limitant le modèle (1.84) à $N = 1$, le signal se simplifie en $x(t) = A(t) \exp(i\theta(t))$. La méthode s’appuie sur l’introduction de deux quantités moyennes [46] d’une part $\bar{\omega}(t)$, la pulsation moyenne du signal dans un voisinage du temps t (défini par la fenêtre $h(t)$) telle que, pour une fréquence ω donnée,

$$\int \exp \{ i(\bar{\omega}(t)s + \theta_0) \} h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds = \int \exp(i\theta(s)) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds, \quad (1.86)$$

et d’autre part $\bar{A}(t)$, l’amplitude moyenne du signal dans le même voisinage :

$$\bar{A}(t) \int \exp \{ i(\bar{\omega}(t)s + \theta_0) \} h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds = \int A(s) \exp(i\theta(s)) h^*(s - t) e^{-i\omega s} ds. \quad (1.87)$$

Notons bien que, si $2\pi/\omega$ correspond à la (pseudo-)période du signal autour du temps t alors les eqs. (1.86) et (1.87) sont des égalités écrites sur le premier terme (le “fondamental”) de développements en série de Fourier.

On en déduit une approximation locale du signal :

$$x(t) \approx \bar{A}(t) \exp i(\bar{\omega}(t)t + \theta_0). \quad (1.88)$$

Il s'agit alors de faire une estimation des quantités moyennes $\bar{\omega}(t)$ et $\bar{A}(t)$ du signal à partir de la FCT. Pour ce faire, on simplifie le membre de gauche de l'éq. (1.87), et on reconnaît la FCT du signal dans son membre de droite

$$F(t, \omega) = \bar{A}(t) H^*(\Delta\omega(t)) e^{i(\Delta\omega(t)t + t\omega/2 + \theta_0)}, \quad (1.89)$$

où $\Delta\omega(t) = \bar{\omega}(t) - \omega$.

Si $H(\omega)$ est réelle ($h(t)$ est à symétrie hermitienne), on obtient (en prenant le module) pour l'amplitude

$$\bar{A}(t) = \frac{|F(t, \omega)|}{H(\Delta\omega(t))}, \quad (1.90)$$

et (en dérivant la phase) pour la pulsation

$$\partial_t \varphi(t, \omega) = t d\Delta\omega/dt + \Delta\omega(t) + \omega/2, \quad (1.91)$$

équation, qui en recourant aux hypothèses faites sur le signal ($d\Delta\omega/dt$ faible), conduit à

$$\Delta\omega(t) = -\frac{\omega}{2} + \partial_t \varphi(t, \omega), \quad (1.92)$$

ou bien avec les relations (1.83) à :

$$\Delta\omega(t) = \hat{\omega}(t, \omega) - \omega. \quad (1.93)$$

L'équation (1.93) établit clairement le lien entre l'analyse spectrale différentielle et la méthode de réallocation. La différence de fréquence $\Delta\omega(t)$ n'est autre que l'opérateur de déplacement en fréquence de la réallocation. On sait, par ailleurs, que cet opérateur est relié à la fréquence instantanée du signal filtré par l'analyse de Fourier à court-terme (cf. éq. (1.34)). Le principe de l'analyse spectrale différentielle est donc de calculer la fréquence instantanée du signal sélectionné dans une bande de fréquence pour en mesurer finement les fluctuations autour de la fréquence centrale d'analyse.

On déduit de (1.88), (1.90) et (1.93), l'approximation locale du signal en fonction de la FCT et de l'opérateur de réallocation en fréquence :

$$x(t) = \frac{|F(t, \omega)|}{H(\hat{\omega}(t, \omega) - \omega)} \exp \{i(\hat{\omega}(t, \omega)t + \theta)\}. \quad (1.94)$$

Remarque 1.1. Pour des raisons de coût de calcul, on choisit une fenêtre $h(t)$ rectangulaire. Dans ce cas, la FCT peut se calculer récursivement et l'opérateur de réallocation $\hat{\omega}(t, \omega)$ admet une forme très simple⁹. Notons enfin que la fréquence centrale ω est *a priori* arbitraire. Cependant l'approximation (1.94) sera d'autant meilleure que la fenêtre d'observation est centrée sur la fréquence "principale" (i.e., correspondant à la pseudo-période) du signal.

9. Si $h(t) = 1_T(t)$ est une fenêtre rectangulaire, de largeur T centrée sur 0 alors sa dérivée est égale à la somme de deux distributions de Dirac : $dh/dt = -\delta(t + T/2) + \delta(t - T/2)$. La FCT du signal $x(t)$ de fenêtre dh/dt s'écrit donc simplement comme la différence du signal pris à deux instants distants de T (à un terme de phase près). Ceci conduit à une économie considérable de calcul lors de la mise en œuvre de éq. (1.38) pour l'évaluation de $\hat{\omega}(t, \omega)$ mais au prix de la pauvreté de l'analyse spectrale faite par la fenêtre rectangulaire.

- *Représentation graphique proposée*

Les choix d’affichage faits sont surprenants et s’expliquent sûrement par les limitations des moyens informatiques de l’époque. On choisit de montrer pour une fréquence ω (i.e., fréquence centrale d’analyse) donnée (ASD) :

- la phase de la FCT $\varphi(t, \omega)$ (on pratique une régression linéaire pour trouver la fréquence $\bar{\omega}(t)$),
- la proportion d’énergie dans la bande analysée $R(t, \omega) = |F(t, \omega)|^2 / \int |F(t, \omega)|^2 d\omega / (2\pi)$.

Densité de fréquence instantanée

- *Contexte*

Le contexte d’application de la densité de fréquence instantanée [43] est celui du traitement (analyse) de la parole, et plus spécifiquement celui de la localisation et du suivi de formant. L’auteur n’admet pas de modèle explicite sur le signal mais les seuls exemples traités dans [43] entrent dans le cadre du modèle formantique (1.84).

- *Problème posé*

La méthode se fonde sur une analogie avec le système auditif (moins élaborée que celle faite dans [30] que nous examinerons plus loin). L’observation des systèmes auditifs semblent montrer que le traitement du son par l’oreille interne (la membrane basilaire en particulier) s’apparente (aux basses fréquences essentiellement) au passage du signal reçu dans un banc de filtres proche de celui utilisé pour calculer la FCT (et plus fidèlement encore de la transformée en ondelettes, voir plus loin). Pour le traitement (analyse et reconnaissance) de la parole, il s’avère donc important d’abandonner une description spectrale utilisant l’énergie seulement et de prendre aussi en compte l’information de phase. Ceci amène l’auteur à faire une nouvelle interprétation de la FCT inspirée par “l’image d’un groupe de fibres nerveuses adjacentes toutes verrouillées sur une seule et même fréquence”.

- *Solution envisagée*

On calcule la FCT pour M valeurs de la fréquence $\omega_m = \{m\Delta\omega\}_{m=1..M}$ séparées d’un pas d’échantillonnage $\Delta\omega$ donné. On obtient alors M signaux $y_m(t) = F(t, \omega_m)$ qui sont similaires à ceux qui sont observés sur les nerfs auditifs au départ de la membrane basilaire. On se propose de regrouper tous les signaux $y_m(t)$ qui ont la même fréquence instantanée et de placer cette information dans une matrice DFI(t, ω). On procède de la manière suivante : à un temps t fixé, on incrémente DFI(t, ω_n) à chaque occurrence d’une valeur de $\hat{\omega}(t, \omega_m)$ dans $[\omega_n - \Delta\omega/2, \omega_n + \Delta\omega/2]$ et ce pour toutes les valeurs de m et de n . La quantité DFI(t, ω_n) que nous calculons est au final égale au nombre de signaux $y_m(t)$ qui ont approximativement au temps t la même fréquence instantanée ω_n . On normalise ensuite DFI(t, ω_m) à la norme $L^1(\mathbb{R})$ unité. On obtient donc un histogramme empirique qui s’assimile à une densité (de probabilité) de fréquence instantanée.

Il est important de remarquer que la fréquence instantanée du signal $y_m(t)$ est égale à la valeur de l’opérateur de réallocation en fréquence $\hat{\omega}(t, \omega_m)$ selon l’éq. (1.34). Cela montre que la densité de fréquence instantanée et la réallocation s’appuient sur une communauté d’idée : on pourrait définir la densité de fréquence instantanée comme le résultat de l’action de l’opérateur de réallocation en fréquence sur une matrice temps-fréquence uniformément remplie de 1 (suivie d’une normalisation en norme $L^1(\mathbb{R})$).

- *Représentation graphique proposée*

On affiche simplement DFI(t, ω) en niveau de gris.

“Arête et squelette” ou “ridge and skeleton”

Cette méthode est certainement la plus élaborée d’entre toutes. Elle est issue de la collaboration de nombreuses personnes, majoritairement de l’“école marseillaise”.

• Contexte

Les méthodes “arête et squelette” ont été utilisées pour le traitement de signaux musicaux [33, 32, 53], la détection et la caractérisation de modulations de fréquence [20].

• Problème posé

Le problème posé est celui de l’extraction et de la caractérisation de signaux modulés en amplitude et en fréquence dans la limite asymptotique.

• Solution envisagée

Cette méthode a été essentiellement considérée dans le plan temps-échelle et pour la transformée en ondelettes, mais elle est également valable pour la FCT. L’idée est de tirer profit du cadre asymptotique pour faire l’approximation de phase stationnaire de la FCT. On en déduit une représentation temps-fréquence simplifiée et non redondante du signal (le *squelette*) à partir de la restriction de la FCT à certaines lignes importantes du plan temps-fréquence (les *arêtes*).

Pour présenter les choses, il est plus simple de considérer que le signal $x(t) = A(t)e^{i\theta(t)}$ et la fenêtre $h(t)$ (réelle) sont deux signaux asymptotiques, i.e., obéissent au modèle (1.84), bien que cette hypothèse soit irréaliste en ce qui concerne la fenêtre. En effet, la nature “à court terme” de la fenêtre est totalement antagoniste avec les contraintes du modèle (1.84). Nous ne décrivons pas le cas (traité dans [33]) plus raisonnable mais plus compliqué, où le signal est asymptotique et la fenêtre gaussienne, puisqu’il mène aux mêmes résultats.

La FCT du signal mis sous la forme

$$F(t, \omega) = \int A(s)h(s-t)e^{i(\theta(s)-\omega s+t\omega/2)} ds \quad (1.95)$$

peut être clairement vue comme une intégrale oscillante qu’il est possible d’évaluer par l’approximation de phase stationnaire [92] (déjà évoquée précédemment en Sect. 1.2.3 et détaillée en Annexe D). Cela consiste à approcher la FCT $F(t, \omega)$ par la valeur de l’intégrande (moyennant une correction de module et de phase) aux points où la phase de celle-ci est stationnaire :

$$\partial_s (\theta(s) - \omega s + t\omega/2) = 0. \quad (1.96)$$

Supposons qu’il existe un seul point $t_s(t, \omega)$ qui vérifie l’éq. (1.96), on a alors en ce point

$$\dot{\theta}(t_s(t, \omega)) = \omega. \quad (1.97)$$

L’hypothèse d’unicité du point stationnaire que nous venons de faire, signifie donc que la fréquence instantanée du signal $\omega = \dot{\theta}(t)$ associée à une fréquence ω donnée, un et un seul instant t .

Dans l’approximation de la FCT [92]

$$F(t, \omega) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\theta}(t_s)|}} e^{i \operatorname{sgn}\{\ddot{\theta}(t_s)\} \pi/4} x(t_s) h(t_s - t) e^{i(-\omega t_s + t\omega/2)}, \quad (1.98)$$

(nous avons retiré la dépendance de $t_s = t_s(t, \omega)$ en t et ω pour simplifier la lecture), on voit clairement que certains points stationnaires sont plus importants que d’autres. En particulier, les points qui

vérifient $t_s(t, \omega) = t$ puisqu'ils permettent de relier directement la FCT au point (t, ω) à la valeur du signal en t . L'ensemble de ces points définit une courbe dans le plan temps-fréquence que l'on appelle l'*arête*. Qui plus est, la pertinence de l'arête pour la description du signal se trouve confirmée par d'autres arguments. En effet, il est simple de montrer que l'équation de cette courbe est simplement celle de la ligne de fréquence instantanée $\omega = \dot{\theta}(t)$ du signal. De plus, l'arête dessine un chemin particulier sur le module de la FCT. À t fixé, l'éq. (1.98) montre que si $h(t)$ est maximum en 0 alors le point $t_s(t, \omega) = t$ indique le maximum de $|F(t, \omega)|$ (si on néglige l'influence de la dérivée seconde au dénominateur). L'arête est donc la ligne qui relie tous les maxima (calculés à t constant) de $|F(t, \omega)|$.

En pratique, l'extraction de l'arête gagne en précision si on utilise la phase de la FCT, $F(t, \omega)$, qui vérifie selon

$$\varphi(t, \omega) = \theta(t) - \frac{\omega t}{2}, \quad (1.99)$$

aux points de l'arête selon l'éq. (1.98). De la dérivation de l'équation précédente et avec l'éq. (1.97), on déduit

$$\partial_t \varphi(t, \omega) = \omega/2, \quad (1.100)$$

qui se réécrit aussi :

$$\hat{\omega}(t, \omega) - \omega = 0. \quad (1.101)$$

On fait donc ici la connexion entre les méthodes “arête et squelette” et la réallocation puisque les points de l'arête sont les points où la réallocation est stationnaire en fréquence. Notons que cette propriété est conservée lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'asymptotisme sur la fenêtre [33].

Il est alors naturel de proposer l'algorithme à point fixe suivant pour la recherche des points de l'arête : on se place à un temps t , on initialise la recherche à une fréquence ω_0 arbitraire et on itère la procédure

$$\omega_{n+1} = \hat{\omega}(t, \omega_n), \quad (1.102)$$

jusqu'à convergence, c'est-à-dire $\omega_{n+1} \approx \omega_n$ (point fixe). Le point (t, ω_{n+1}) fait alors partie de l'arête. Autrement dit, cet algorithme répète le processus de réallocation en fréquence jusqu'à convergence vers un point où la réallocation est stationnaire.

• Description graphique proposée

La représentation finale que l'on donne du signal est la restriction $\text{SKE}(t, \omega)$ de la FCT à son arête. Elle définit ce que l'on appelle le *squelette*. Pour tout $(t, \omega = \dot{\theta}(t))$ situé sur l'arête,

$$\text{SKE}(t, \omega) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\theta}(t)|}} e^{i \text{sgn}\{\ddot{\theta}(t)\} \pi/4} x(t) h(0) e^{-it\omega/2}. \quad (1.103)$$

Le squelette $\text{SKE}(t, \omega)$ est nul en tout autre point.

Méthode du “squeezing”

• Contexte

La méthode du “squeezing” [30, 72] a été utilisée en traitement de la parole (suivi de formant pour la reconnaissance de locuteur).

• *Problème posé*

La méthode du “squeezing” s’appuie en première approximation (comme la densité de fréquence instantanée) sur une analogie avec le système auditif. Les observations montrent en fait que la membrane basilaire (organe de perception de l’oreille interne) effectue une opération analogue à celle d’un banc de filtres passe-bande dont les fréquences centrales graduent logarithmiquement la bande de fréquence audible. Cela correspond [30] à ce que fait la transformée en ondelettes, ce qui justifie son utilisation pour le traitement de la parole.

Malheureusement, une telle décomposition est très redondante. O. Ghitza propose dans [44] un algorithme de compression de l’information dont la méthode du “squeezing” va s’inspirer. Le principe de cet algorithme est le suivant :

- en sortie de chaque filtre du banc, on récupère un signal oscillant. On sélectionne ce signal autour d’un temps t fixé au moyen d’une fenêtre,
- et dans ce voisinage, on compte le nombre de ses passages à un seuil (fronts montants) qui sont séparés d’une certaine période T .
- On stocke ce nombre dans la matrice $EIH(t, T)$.
- On recommence l’opération pour toutes les valeurs possibles (à l’intérieur de la fenêtre d’observation) de la période T .

On obtient ainsi une description du signal nommée E.I.H. (“Ensemble Interval Histogram”) à deux dimensions que l’on peut voir comme une représentation temps-fréquence dans la mesure où T^{-1} joue le rôle d’une fréquence instantanée.

On se propose d’utiliser ces idées pour faire une modification non-linéaire de la transformée en ondelettes.

• *Solution envisagée*

La méthode du “squeezing” a été uniquement formulée pour la transformée en ondelettes (pour les raisons évoquées ci-dessus). Pour l’homogénéité de cette section, nous étendrons cette formulation à la FCT.

Dans le cas où $x(t) = A \exp(i\omega_0 t)$, on aimerait comprimer (“to squeeze”) l’information (à la manière de Ghitza) contenue dans la FCT pour qu’elle se restreigne à son minimum. La FCT de $x(t)$ s’écrit

$$F(t, \omega) = H^*(\omega_0 - \omega) e^{it(\omega_0 - \omega/2)}. \quad (1.104)$$

Cette FCT $F(t, \omega)$, vue comme une fonction de t uniquement (ω fixé), est un signal dont les oscillations harmoniques sont régulières et directement reliées à ω_0 . Cela suggère de réaffecter $F(t, \omega)$ à la fréquence $(\omega/2 - i(\partial_t F/F)(t, \omega))$ puisque cette quantité est uniformément égale à ω_0 . En procédant de la sorte, on obtient une nouvelle représentation temps-fréquence $SQU(t, \omega)$ du signal égale à 0 partout, excepté sur la ligne $\omega = \omega_0$. On admet que la compression ainsi faite est raisonnablement effective pour les signaux respectant le modèle (1.84).

Le lien qui unit la méthode du “squeezing” et la réallocation est clair puisque l’on utilise finalement l’opérateur de réallocation en fréquence, vu la relation

$$\hat{\omega}(t, \omega) = \frac{\omega}{2} + \text{Im} \left\{ \frac{\partial_t F}{F} \right\} (t, \omega) \quad (1.105)$$

(la partie réelle de $\partial_t F/F$ est nulle). Formulé autrement, la méthode du “squeezing” effectue la réallocation (en fréquence uniquement) de la valeur complexe de la FCT.

- *Description graphique proposée*

La réallocation de $F(t, \omega)$ en module *et* phase (que l’on appelle *synchrosqueeze*)

$$\text{SQU}(t, \omega) = \int F(t, \xi) \delta(\hat{\omega}(t, \xi) - \omega) \frac{d\xi}{2\pi}, \quad (1.106)$$

a pour avantage de disposer d’une possibilité de retour (exact) au signal.

On peut néanmoins voir sur les quelques tests avec des signaux (réels) de parole [30] que réaffecter la valeur complexe $F(t, \omega)$ n’est pas la meilleure solution. On propose dans [30] toute une gamme de variantes basée sur des grandeurs (module de $F(t, \omega)$ seulement, avec pondération, . . .)    réallouer vers $(t, \hat{\omega}(t, \omega))$, desquelles on déduit autant de représentations temps-fréquence.

1.4.2 Comparatif

On se propose ici de faire une comparaison des méthodes présentées ci-dessus en trois points : les deux premiers concernent les implications du choix d’une méthode basée sur un ou sur deux opérateurs de réallocation en termes de *localisation* de la représentation et de possibilité de *reconstruction* du signal. Le dernier point concerne la *robustesse* de la représentation au bruit. Il est bien entendu que cette comparaison n’a rien de systématique mais qu’elle est simplement faite pour avoir une idée des différences entre les points de vues en lice.

Localisation

Dans l’ensemble des méthodes comparées, la capacité de localisation d’une représentation sur un signal donné est directement reliée au nombre et au type de l’opérateur de réallocation choisi.

- *Un opérateur de réallocation*

Il apparaît que les méthodes que nous venons de présenter qui utilisent, toutes, un seul opérateur de réallocation, sont intimement reliées à des hypothèses faites sur le signal. Si le signal s’écarte de ces hypothèses, i.e., ne respecte plus le modèle formantique (1.84), alors la représentation n’a plus de raison de continuer à fonctionner correctement et en particulier en termes de localisation.

Par exemple, la Fig. 1.5 illustre ce que donne chaque méthode pour un signal test dont la première partie est composée d’une fréquence pure (asymptotique en temps) et d’une impulsion (qui n’est pas asymptotique en temps). Toutes les méthodes utilisant un seul opérateur sont complètement aveugles décrivent bien la fréquence mais sont complètement aveugles à l’impulsion parce qu’elle ne répond pas au modèle de référence.

Remarque 1.2. On pourrait reformuler toutes ces méthodes en supposant que le signal vérifie le modèle dual (i.e., asymptotisme en fréquence) au modèle (1.84) :

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^N A_n(\omega) \exp(i\Theta_n(\omega)) + B(\omega), \quad (1.107)$$

où l’enveloppe $A_n(\omega)$ présente des variations lentes par rapport à la phase $\Theta_n(\omega)$, dont les variations sont elles-mêmes lentes. Nous serions alors amenés à n’utiliser qu’un seul opérateur à savoir $\hat{t}(t, \omega)$. La généralisation de la méthode “arête et squelette” à la classe duale des signaux asymptotiques en fréquence a été faite dans [52, 53].

Remarque 1.3. Comme on le remarque dans [43], la cécité des méthodes à un seul opérateur (en fréquence) à l'égard des impulsions est parfois utile. En traitement de la parole par exemple, la représentation se focalise sur les formants (harmoniques issus de la résonance du conduit vocal) et ignore les “pitches” (train d'impulsions émis par les cordes vocales), ce qui permet d'en faire l'analyse indépendamment.

Remarque 1.4. Notons la difficulté de lecture de l'analyse spectrale différentielle: il faut pouvoir interpréter plusieurs graphiques simultanément. On ne dispose donc pas de vision d'ensemble du signal. La fréquence locale du signal peut être estimée à l'aide d'une régression sur la phase (qui varie linéairement si le signal analysé est une fréquence constante) sur la période où la proportion d'énergie indique qu'un signal se trouve à proximité. En résumé, cette méthode est difficile d'emploi.

• Deux opérateurs de réallocation

La méthode de réallocation n'est pas reliée à un modèle implicite de signal. Grâce à ses deux opérateurs, la réallocation se localise (voir Fig. 1.5) à la fois en fréquence (sur la sinusoïde) et en temps (sur l'impulsion) mais également sur la modulation linéaire en deuxième partie du signal test. La Fig. 1.6 confirme cette assertion. Le signal est une fonction d'Hermite [50] qui n'appartient à aucun des deux modèles (ni asymptotisme en temps, ni en fréquence). La distribution de Wigner-Ville de ce signal est un “anneau” dans le plan temps-fréquence à l'intérieur duquel on trouve les interférences qui suivent également une symétrie sphérique. On constate clairement l'échec des méthodes à un seul opérateur: les méthodes “arête et squelette” font ressortir soit le demi-cercle inférieur, soit le demi-cercle supérieur selon l'endroit où on initialise l'algorithme à point fixe tandis que L'ASD, la DFI et la méthode du “squeezing” donnent des descriptions difficiles à lire. Par contre, le spectrogramme réalloué enfin se localise presque parfaitement sur toute la circonférence du cercle.

Remarque 1.5. La deuxième partie du signal test en Fig. 1.5 qui est une modulation linéaire de fréquence (chirp), nous fait voir qu'il existe deux sous-catégories parmi les méthodes à un opérateur: celles qui itèrent la réallocation et celles qui ne l'appliquent qu'une seule fois. On constate que l'on ne peut disposer de la localisation sur les chirps qu'à la condition d'itérer la réallocation comme le fait la méthode “arête et squelette”. Les trois autres méthodes (ASD, DFI et “Squeezing”) donnent une description floue du signal.

Reconstruction

Dans l'ensemble des méthodes comparées, la possibilité de reconstruction du signal à partir de la représentation est directement reliée au nombre et au type de l'opérateur de réallocation choisi.

Il n'existe pas à notre connaissance de formule de reconstruction pour des représentations réallouées quelle qu'elles soient avec deux opérateurs de réallocation. Par contre, employer un seul opérateur rend possible l'existence de la formule de reconstruction du signal mais n'est cependant pas suffisant.

• Lien au modèle

Le fait pour les méthodes basées sur un opérateur de réallocation de disposer d'un modèle sur le signal, permet d'en estimer les paramètres (la phase et l'amplitude) indépendamment.

C'est le cas

- pour l'analyse spectrale différentielle: on a déjà prouvé que la reconstruction approchée du signal était possible via l'éq. (1.94). Notons qu'il s'agit d'une reconstruction faite à partir de

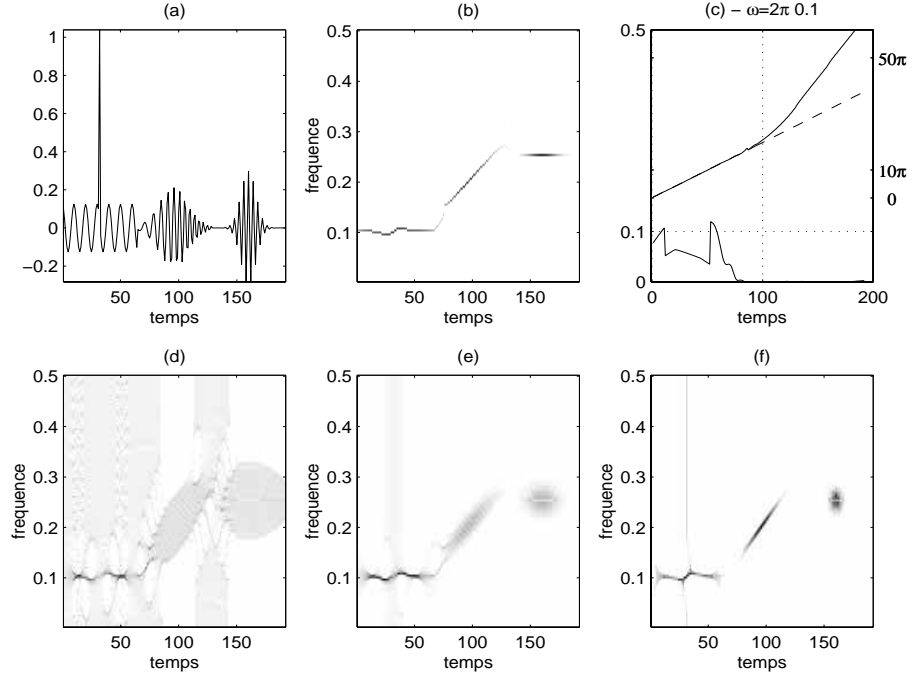


FIG. 1.5 – *Comparaison d’une famille de méthodes en relation avec la réallocation (signal sans bruit).* (a) le signal est divisé en trois parties : (i) une sinusoïde de fréquence égale à 0.1 à laquelle se superpose une impulsion au temps $t = 32$, (ii) un chirp linéaire d’enveloppe gaussienne, (iii) une gaussienne modulée (fréquence 0.25). (b) méthode “arête et squelette”, (c) analyse spectrale différentielle (la proportion d’énergie dans la bande d’analyse $R(t, \omega)$: axe de gauche, courbe du bas ; la phase de la FCT $\varphi(t, \omega)$: axe de droite, courbe du haut) avec en pointillé la régression linéaire dans la zone où $R(t, \omega)$ est non nul, (d) densité de fréquence instantanée, (e) méthode du “squeezing”, (f) spectrogramme réalloué.

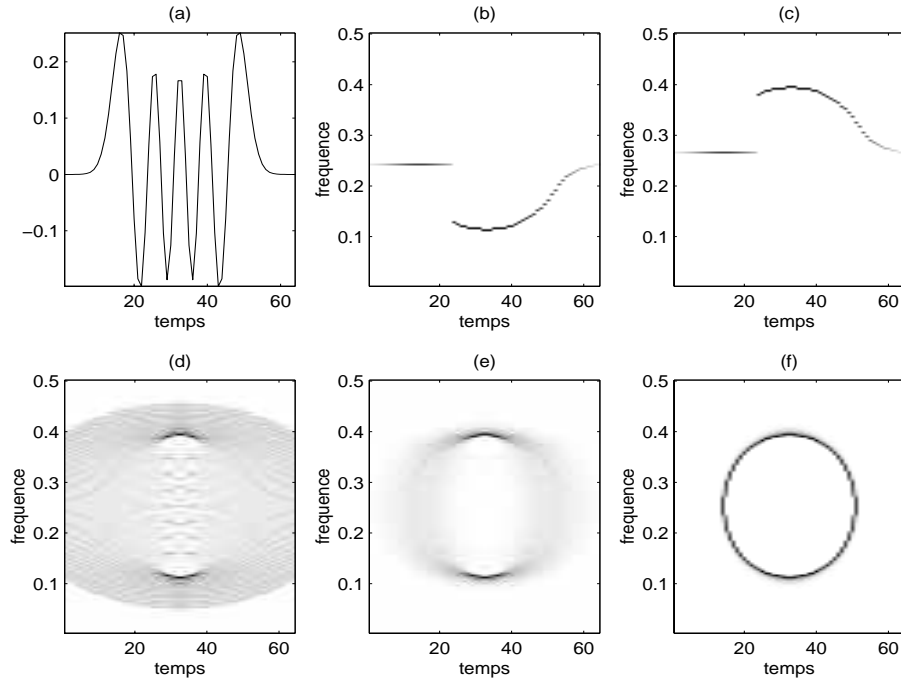


FIG. 1.6 – *Comparaison d’une famille de méthodes en relation avec la réallocation. (a) le signal est une fonction d’Hermite d’ordre 8, (b) méthode “arête et squelette”, initialisation $\omega_0 = 2\pi 0.15$, (c) méthode “arête et squelette”, initialisation $\omega_0 = 2\pi 0.3$, (d) densité de fréquence instantanée, (e) méthode du “squeezing”, (f) spectrogramme réalloué.*

paramètres extraits de la représentation et non pas de la représentation elle-même ce qui rend son utilisation moins aisée.

- et les méthodes “arête et squelette” : l’éq. (1.103) garantit une reconstruction directe du signal avec le squelette. L’arête étant connue, la dérivée seconde $\ddot{\theta}(t)$ peut alors être calculée puisqu’elle ne dépend que d’elle. On en déduit qu’à un temps t fixé et $\omega = \dot{\theta}(t)$ pointant sur l’arête :

$$x(t) \approx \sqrt{\frac{|\ddot{\theta}(t)|}{2\pi}} e^{-i \operatorname{sgn}\{\ddot{\theta}(t)\} \pi/4} \frac{\text{SKE}(t, \dot{\theta}(t))}{h(0)} e^{it\dot{\theta}(t)/2}. \quad (1.108)$$

Remarque 1.6. Il n’y a clairement pas de reconstruction possible à partir de la densité de fréquence instantanée, celle-ci faisant un oubli total de l’information d’amplitude.

• *Moins de non linéarité*

Une autre raison à la possibilité de reconstruction pour les méthodes à un opérateur est que la restriction à un seul opérateur introduit moins de non linéarité dans la représentation que l’utilisation des deux.

C’est pour cela que la méthode du “squeezing” et plus précisément du “synchrosqueezing” présente l’avantage de posséder une formule de reconstruction *exacte* du signal. Pour prouver son existence, on doit auparavant préciser quelques propriétés de la FCT.

Il n’est pas nécessaire d’utiliser une fenêtre identique à la fenêtre d’analyse $h(t)$ pour reconstruire le signal à partir de la FCT. Si on appelle $g(t)$ la fenêtre de reconstruction, l’égalité suivante est vraie

$$x(s) = \iint F(t, \omega) g_{(t, \omega)}(s) \frac{dt d\omega}{2\pi}. \quad (1.109)$$

(où $g_{(t, \omega)}(s) = g(s - t) e^{i\omega s} e^{-it\omega/2}$) à la condition

$$\int h(t) g^*(t) dt = 1. \quad (1.110)$$

Si on choisit pour $g(t) = \delta(t)$, une impulsion de Dirac alors la reconstruction est possible si $h(t)$ égale à 1 à l’origine. Selon l’éq. (1.109), le signal s’écrit alors comme la marginale en temps de la FCT :

$$x(s) = \int F(s, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.111)$$

Supposons que $h(t)$ vérifie la condition $h(0) = 1$. L’action du squeezing se résumant au déplacement en fréquence uniquement des valeurs de la FCT, alors à s fixé, $\text{SQU}(s, \cdot)$ et $F(s, \cdot)$ sont donc de somme identique ce qui prouve :

$$x(s) = \int \text{SQU}(s, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.112)$$

Le signal peut être reconstruit exactement par une marginalisation de la FCT modifiée par la méthode du “squeezing” à la condition que la fenêtre $h(t)$ soit égale à 1 en 0.

Méthode	Loc. fréq.	Loc. impuls.	Loc. chirps	Reconst. du signal
A. S. D.	✓			✓
D. F. I.	✓			
A. et S.	✓		✓	✓
“Squeezing”	✓			✓
Réallocation	✓	✓	✓	

TAB. 1.1 –

Cette table dresse un bilan, dans le cadre de la comparaison faite en Sect. 1.4, des propriétés dont disposent chacune des méthodes présentées en Sect. 1.4. Pour la signification des acronymes, voir le texte.

Robustesse au bruit

Pour finir la comparaison, on se propose d’évaluer la robustesse de chacune des méthodes au bruit. Il s’agit modestement en partant d’un exemple, de se faire une opinion sur les comportements typiques en présence de bruit de chacune d’entre elles. On précisera succinctement si des solutions ont été envisagées pour l’amélioration de la représentation des signaux bruités.

- *Un opérateur de réallocation*

Toutes ces méthodes utilisent le même opérateur de réallocation. La différence de sensibilité ne peut donc venir que de la manière de construire la représentation.

- *Analyse Spectrale Différentielle*

Si on analyse un signal dont la fréquence est constante dans la bande d’analyse, alors la mesure de la fréquence par régression locale de la phase (cf. Fig. 1.7) donne d’assez bons résultats. Si le signal n’est pas de fréquence constante (modulation linéaire de fréquence par exemple) alors il faut changer de méthode de régression (il faut ajuster une parabole). Il faut donc procéder au cas par cas. Pour des signaux réels, on ne dispose pas de démarche systématique.

- *Densité de fréquence instantanée*

Dans la représentation donnée par la densité de fréquence instantanée, le même poids est donné aux points où le module de la FCT $|F(t, \omega)|$ est petit ou grand. Dans le cas favorable où le bruit est de très faible amplitude, on va traiter avec une égale importance l’information portée par le bruit et celle portée par le signal. En résumé, des perturbations, même très faibles, vont aboutir à une représentation difficile à lire (cf. Fig. 1.7).

Une opération de post-lissage (passe-bas) [43] de $DFI(t, \omega)$ améliore le résultat mais pas de façon réellement convaincante.

- *Arête et squelette*

La concision de la description du signal fournie par le squelette fait sa force mais aussi sa faiblesse. La présence de bruit perturbe le déroulement de l’algorithme à point fixe. Cela pose la question de l’initialisation de cet algorithme : selon le choix du point de départ, on peut converger vers l’arête associée au signal, mais on risque également de finir sur une arête associée au bruit. Aux instants où la convergence est mauvaise, le squelette décrit le bruit et le signal est complètement oublié. C’est par exemple ce que l’on constate en Fig. 1.7 pour la dernière partie du signal : on ne converge pas vers la

fréquence centrale du logon gaussien mais vers un paquet d'énergie appartenant au bruit.

Ceci compromet l'utilisation du squelette pour des problèmes de détection ou d'estimation. Néanmoins, un algorithme robuste de recherche de l'arête a été proposé récemment [19, 18]. On recherche la courbe du plan temps-fréquence qui soit à la fois régulière et le long de laquelle l'intégrale de $|F(t, \omega)|$ est maximum. On résout ce compromis par la minimisation d'une énergie avec des méthodes de recuit simulé. L'algorithme donne de bons résultats pour la détection et la caractérisation de chirps [20].

– *Méthode du “squeezing”*

Le bruit perturbe la réallocation et modifie la manière dont sont réorganisées les valeurs de la FCT (complexes pour le synchrosqueeze). Deux valeurs de la FCT en opposition de phase peuvent venir se réallouer en un même point et ainsi se compenser totalement. S'il s'agit de deux valeurs associées au signal, de l'information importante est alors perdue.

Les auteurs proposent une solution intermédiaire qui donne de bons résultats sur des signaux de parole. Elle consiste à réallouer $(F(t, \omega) + |F(t, \omega)|)/2$ plutôt que $F(t, \omega)$. On perd, en contrepartie, la possibilité de reconstruction du signal.

• *Deux opérateurs de réallocation*

Une grande partie du document est consacrée à l'étude de la réallocation dans le cas des signaux bruités. Nous renvoyons donc le lecteur à la suite et en particulier à la Sect. 2.3 où l'on fait le calcul des densités de probabilité des opérateurs de réallocation.

Conclusion

Nous avons mis en évidence les liens étroits qui unissent les quatre méthodes présentées auxquelles s'ajoutent la réallocation. D'un point de vue pratique, il est raisonnable d'en écarter deux, en raison des faiblesses de la représentation proposée : l'analyse spectrale différentielle, pour sa difficulté d'utilisation et la densité de fréquence instantanée pour sa sensibilité particulière au bruit.

Il nous reste trois méthodes en lice qui ont chacune les points forts et leur talon d'Achille :

- la méthode “arête et squelette” qui possède de bonnes propriétés de localisation et la possibilité de reconstruction mais est peu robuste au bruit,
- la méthode du “squeezing” qui se localise parfaitement sur les fréquences uniquement, et qui dispose d'une formule de reconstruction exacte du signal,
- la méthode de la réallocation qui se localise sur n'importe quelle droite du plan temps-fréquence, mais pour laquelle on n'a pas de retour possible au signal.

1.5 Conclusion

On a introduit, dans ce chapitre, le principe de la réallocation, à la fois dans le contexte des distributions d'énergie quadratiques temps-fréquence (classe de Cohen) et temps-échelle (classe affine). Nous avons insisté sur le fait que la réallocation se fonde sur une règle générale que l'on peut envisager d'appliquer hors du cadre où elle a été définie.

Nous avons ensuite présenté quelques propriétés des distributions réallouées dont la plus importante est qu'elles donnent une solution acceptable au compromis de la présence d'interférences vs. la localisation sur les composantes du signal. Nous avons, à ce titre, vu que la localisation que l'on sait

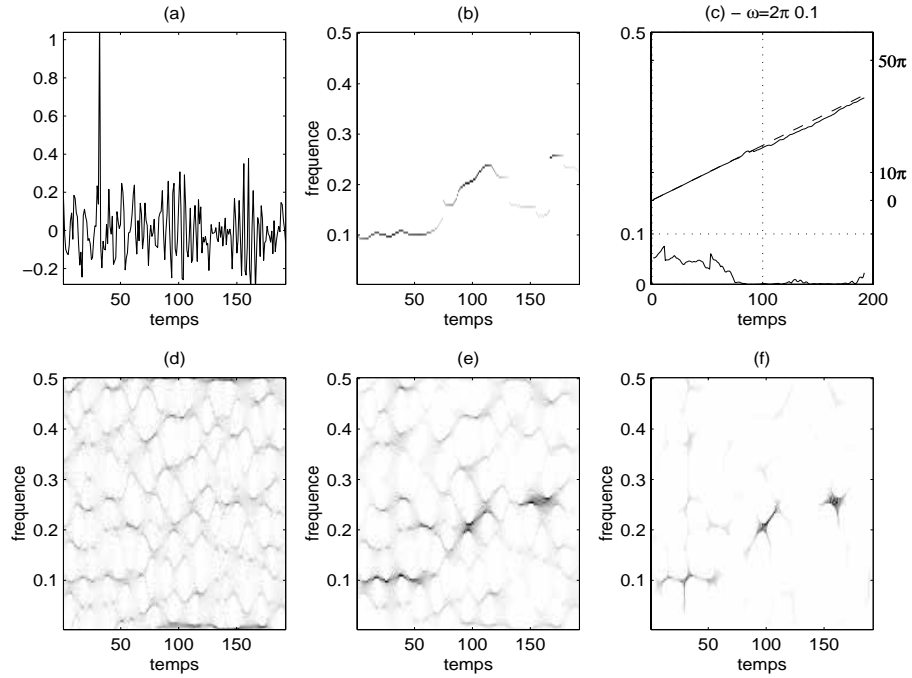


FIG. 1.7 – *Comparaison d’une famille de méthodes en relation avec la réallocation (signal bruité).* (a) le signal est celui présenté en Fig. 1.5 ajouté à un bruit blanc gaussien ($RSB = 2\text{dB}$), (b) méthode “arête et squelette”, (c) analyse spectrale différentielle (la proportion d’énergie dans la bande d’analyse $R(t, \omega)$: axe de gauche, courbe du bas ; la phase de la FCT $\varphi(t, \omega)$: axe de droite, courbe du haut) avec en pointillé la régression linéaire dans la zone où $R(t, \omega)$ est non nul, (d) densité de fréquence instantanée, (e) méthode du “squeezing”, (f) spectrogramme réalloué.

parfaite sur les modulations linéaires de fréquence d'enveloppe constante, continue à être effective, dans une certaine mesure, sur des modulations non linéaires de fréquence.

Nous nous sommes ensuite focalisés sur le spectrogramme et le scalogramme. Nous avons montré que, pour ces distributions, les opérateurs de réallocation peuvent se reformuler de différentes manières, chacune d'entre elles apportant un éclairage nouveau sur le processus de réallocation. En particulier, une formulation à base de quotient de FCT (resp. transformée en ondelettes) pour le spectrogramme (resp. scalogramme) permet une mise en œuvre efficace de la réallocation de cette distribution.

Enfin, ce chapitre se conclut par une mise en parallèle synthétique de quelques méthodes de description temps-fréquence du signal qui ont à voir avec la réallocation. Après avoir montré les liens théoriques qui unissent toutes ces méthodes, nous en avons fait la comparaison. On a pu apprécier le caractère crucial de l'utilisation de deux opérateurs pour la localisation de la représentation. En contrepartie, se limiter à un seul opérateur de réallocation permet de bénéficier de formule de reconstruction qui autorise un retour au signal. Ces formules ne sont pas disponibles dès que l'on utilise deux opérateurs (leur non existence n'a cependant pas été prouvée).

