
Intégrales curvilignes et de surfaces

Fabrice Dodu

FORMATION CONTINUE : DUT+3

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES : INSA TOULOUSE

2000-2001

Version 1.0

Sommaire

I	Le cours	6
1	Intégrales curvilignes	8
1.1	Notions sur les arcs paramétrés	9
1.1.1	Définition	10
1.1.2	Premières définitions et propriétés	11
1.1.3	Arcs orientés	12
1.1.4	Points particuliers et tangente	14
1.1.5	Longueur d'un arc	15
1.2	Circulation d'un champ de vecteurs	16
1.2.1	Définition	17
1.2.2	Calcul pratique	18
1.2.3	Champ dérivant d'un potentiel	20
1.2.4	Formule de Green-Riemann	22

2	Intégrales de surfaces	24
2.1	Notions sur les surfaces paramétrés	25
2.1.1	Définition	26
2.1.2	Définition : plan tangent	27
2.1.3	Aire d'une surface non plane	30
2.2	Flux d'un champ de vecteurs	32
2.2.1	Flux et intégrale de surface	33
2.3	Théorèmes intégraux	35
2.3.1	Théorème de Stokes	36
2.3.2	Théorème d'Ostrogradski	37

II Les annexes 39

A	Les exemples	40
A.1	Exemples du chapitre 1	42
A.1.1	Arc paramétré dans le plan	42
A.1.2	Arc paramétré dans le plan	43
A.1.3	Arc paramétré dans l'espace	44
A.1.4	Orientation et tangente	45
A.1.5	Circulation d'un champ de \mathbb{R}^3	46
A.2	Exemples du chapitre 2	47
A.2.1	La sphère	47
A.2.2	Le parapluie de Whitney	48

A.2.3	Equation cartésienne d'une surface	49
A.2.4	Equation cartésienne du plan tangent	50
B	Les exercices	51
B.1	Exercices du chapitre 1	53
B.1.1	Points simples et multiples	53
B.1.2	Périmètre du cercle	54
B.1.3	Longueur d'un arc défini par une équation cartésienne $y = f(x)$	55
B.1.4	Travail sur une demi-ellipse	56
B.1.5	Travail sur une helice	57
B.1.6	Travail d'un champ dérivant d'un potentiel	58
B.1.7	Exercice : premier bilan	59
B.1.8	Calcul d'aire d'une surface plane	60
B.1.9	Exercice : second bilan	61
B.2	Exercices du chapitre 2	62
B.2.1	Plan tangent à une surface définie par son équation cartésienne	62
B.2.2	Aire d'un cylindre	63
B.2.3	Flux à travers une surface	64
B.2.4	Exercice : premier bilan	65
B.2.5	Application à la formule de Stokes	66
B.2.6	Application à la formule d'Ostrogradski	67
B.2.7	Exercice difficile : pour le plaisir...	68

C	Les documents	70
C.1	Documents du chapitre 1	71
C.1.1	Masse d'un fil	71
C.1.2	Rappels de calcul vectoriel	72
C.2	Documents du chapitre 2	75
C.2.1	Règle du tire-bouchon de Maxwell	75

Première partie

Le cours

Afin de simplifier la compréhension du cours, nous ne considèrerons que des espaces vectoriels normés E réels de dimension 2 ou 3, supposés munis de leur structure affine naturelle. Ainsi les éléments de E seront appelés *vecteurs* s'ils sont considérés comme des éléments de l'espace vectoriel E , et *points* s'ils sont considérés comme des éléments de l'espace affine E .

Notation. On notera indifféremment $x = (x_1, \dots, x_n)$ ou $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur $x \in E$ ($n=2$ ou 3).

Si $x, y \in E$ alors

$$\text{a) } x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

$$\text{b) } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\text{c) si } n = 3, \quad x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

1 Intégrales curvilignes

1.1	Notions sur les arcs paramétrés	9
1.2	Circulation d'un champ de vecteurs	16

1.1 Notions sur les arcs paramétrés

1.1.1	Définition	10
1.1.2	Premières définitions et propriétés	11
1.1.3	Arcs orientés	12
1.1.4	Points particuliers et tangente	14
1.1.5	Longueur d'un arc	15

Définition*Exemples :*

exemple A.1.1

exemple A.1.2

exemple A.1.3

notion clé :

*Arc paramétré***Définition 1.**

Soit E un espace vectoriel normé (e.v.n.) de dimension 2 ou 3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. Un arc paramétré γ de classe C^k est une application de classe C^k de I dans E notée γ

$$\gamma \begin{cases} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{cases} .$$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ (resp. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$) est un arc paramétré de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3).

$\gamma(I)$ est appelé **support de l'arc paramétré**.

Premières définitions et propriétés

Exercices :
[exercice B.1.1](#)

notion clé :
Points et arcs

Définition 2.

m est appelé **point simple** de $\gamma(I)$ si il existe un unique $t_m \in I$ tel que $m = \gamma(t_m)$.

Un point **multiple** est un point qui n'est pas simple.

Définition 3.

Un arc est dit **simple** si tous les points sont simples (i.e. si γ est injective).

Définition 4.

Un arc est dit **fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 5.

Un arc fermé est dit **fermé simple** si I est de la forme $[a, b]$ (fermé borné), $\gamma(a) = \gamma(b)$ et la restriction de γ à l'intervalle $[a, b[$ est injective.

Arcs orientés

notion clé :
Arcs équivalents

Dans les exemples A.1.1 et A.1.2, les supports des deux arcs paramétrés sont les “mêmes”. Mathématiquement, on traduit ce constat par la définition suivante

Définition 6.

Soient (I, γ) et (J, δ) deux arcs paramétrés.

On dit que les deux arcs sont **C^k –équivalents** si

i) γ et δ sont de classe C^k .

ii) Il existe une bijection $\theta : I \rightarrow J$ de classe C^k ainsi que sa réciproque telle que $\gamma = \delta \circ \theta$.

θ est appelé **changement de paramètre**.

Remarque 1.1. θ est donc nécessairement strictement monotone car est bijectif.

Définition 7.

On appelle **arc géométrique de classe C^k** l'ensemble des arcs paramétrés **C^k –équivalents**.

On le note Γ .

Les représentants de Γ sont appelés **arcs paramétrés admissibles** (ou représentations admissibles).

Définition 8.

Soit Γ un arc géométrique de classe C^k $k \geq 1$.



Soit $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2$ donc il existe θ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \theta$ donc $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(\theta(t)) \theta'(t)$.

On dit que γ_1 et γ_2 sont de **même sens** (ou **positivement C^k -équivalents**) si $\theta'(t) > 0$, et de **sens contraire** (ou **non-positivement C^k -équivalents**) si $\theta'(t) < 0$.

On note $\Gamma_+ = \{(I, \gamma) \in \Gamma \text{ tel que } \gamma \text{ est positivement } C^k\text{-équivalent}\}$.

On note $\Gamma_- = \{(I, \gamma) \in \Gamma \text{ tel que } \gamma \text{ est non-positivement } C^k\text{-équivalent}\}$.

Remarque 1.2. θ étant strictement monotone, il suffit de vérifier le signe de θ' pour un point quelconque de I .

Lemme 1.1.

Pour qu'un arc géométrique admette deux orientations, il suffit qu'il possède au moins deux points simples.



Points particuliers et tangente

Exemples :
[exemple A.1.4](#)

Définition 9.

Soit γ une paramétrisation de Γ arc géométrique de classe C^k , ($k \geq 0$).

- i) Un point simple $m = \gamma(t_m)$ de $\gamma(I)$ est dit **régulier** si $\gamma'(t) \neq 0$.
 L'arc γ est régulier si tous ces points simples sont réguliers.
- ii) Un point simple $m = \gamma(t_m)$ de $\gamma(I)$ est dit **stationnaire** si $\gamma'(t) = 0$.

Remarque 1.3. Ces définitions sont indépendantes du choix de la paramétrisation.

Définition 10.

On appelle **tangente** au point m la droite passant par m et de vecteur directeur $\gamma'(t_m)$.

Définition 11.

Soit (I, γ) un arc régulier.

On appelle **vecteur tangent unitaire** la quantité $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

$T(t)$ est dirigé dans le sens de l'orientation de l'arc (I, γ) .

Longueur d'un arc

Exercices :
[exercice B.1.2](#)
[exercice B.1.3](#)

Documents :
[document C.1.1](#)

notion clé :
Longueur d'un arc

Définition 12.

Soit (I, γ) un arc paramétré de classe C^k , ($k \geq 1$).

On appelle longueur de l'arc γ , le réel positif noté L_γ défini par

$$L_\gamma(I) = \left| \int_I \|\gamma'(t)\| dt \right| \tag{1.1}$$

En particulier, si (I, γ) est un arc paramétré de \mathbb{R}^2 alors

$$L_\gamma(I) = \left| \int_I \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2} dt \right|$$

De même, si (I, γ) est un arc paramétré de \mathbb{R}^3 alors

$$L_\gamma(I) = \left| \int_I \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + (\gamma'_3(t))^2} dt \right|$$

1.2 Circulation d'un champ de vecteurs

1.2.1	Définition	17
1.2.2	Calcul pratique	18
1.2.3	Champ dérivant d'un potentiel	20
1.2.4	Formule de Green-Riemann	22

Définition

Exemples :
exemple A.1.5

Documents :
document C.1.2

notion clé :
*Champ de vecteurs et
circulation*

Définition 13.

*Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$; espace affine réel de dimension fini attaché à un espace vectoriel E .
Un champ de vecteurs sur \mathcal{A} est une application de \mathcal{A} dans \mathcal{E} .*

Remarque 1.4. *l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\sin(x) \cos(y), x^2)$ est un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 .*

Définition 14.

Soient V un champ de vecteur continu sur \mathcal{A} et $(I = [a, b], \gamma)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k tel que $\gamma([a, b]) \subset \mathcal{A}$.

*On appelle **circulation** ou (**travail**) de V relative à γ , le réel défini par*

$$\int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (1.2)$$

Calcul pratique*Exercices :*

exercice B.1.4

exercice B.1.5

notion clé :

Calcul du travail d'un champ de force

Point de vue physique

Soient $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$ deux points de \mathbb{R}^3 et $V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un champ de vecteur.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Alors $\int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ est le **travail total** produit par le champ de force V lorsque une particule se déplace du point A au point B le long de la trajectoire paramétrée par γ et ce travail est noté

$$\begin{aligned} W_{\widehat{AB}}(V) &= \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \end{aligned}$$

Rappel : $W_{\widehat{AB}}(V) = -W_{\widehat{BA}}(V)$

Méthodologie : calculer le travail de V le long du segment curviligne \widehat{AB} (donc orienté).

1. a) Déterminer une paramétrisation $([a, b], \gamma)$ de l'arc orienté.



- b) Vérifier si cette paramétrisation est compatible avec l'orientation imposée par l'énoncé.
- c) Si la paramétrisation est compatible avec l'orientation alors

$$W_{\widehat{AB}}(V) = \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (1.3)$$

- d) Si la paramétrisation n'est pas compatible alors

$$W_{\widehat{AB}}(V) = - \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (1.4)$$

- e) Calculer une intégrale simple.
2. En utilisant la seconde formule, il suffit simplement d'“ intégrer ” la forme différentielle

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$



Champ dérivant d'un potentiel

Exercices :
[exercice B.1.6](#)
[exercice B.1.7](#)

notion clé :
Potentiel et travail

Définition 15.

*Soit U un champ de vecteur continûment dérivable.
 On dit que U **dérive d'un potentiel** f si $U = \nabla f$.*

Remarque 1.5. *Si U dérive d'un potentiel alors $\text{rot } U = \text{rot } (\nabla f) = 0$ d'après le document [C.1.2](#).*

Théorème 1.1.

Soit U un champ de vecteur dérivant d'un potentiel f .

Alors, on a :

$$W_{\widehat{AB}}(U) = f(B) - f(A)$$

Démonstration.

On suppose que la paramétrisation $\left([a, b], \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \right)$ est compatible avec l'orientation du segment curviligne \widehat{AB} . Comme $U = \nabla f$, on a d'après la formule (1.3),



$$\begin{aligned}
U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\
&= \frac{df}{dt}(x(t), y(t), z(t))
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
W_{AB}^{\curvearrowright}(U) &= \int_a^b \frac{df}{dt}(x(t), y(t), z(t))dt \\
&= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

■

Remarque 1.6.

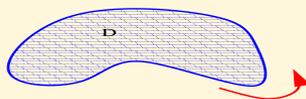
- i) Si U dérive d'un potentiel alors son travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A vers B .
- ii) Si la courbe est fermée alors son travail est nul (car $A = B$).



**Formule de
Green-Riemann**

Exercices :
[exercice B.1.8](#)
[exercice B.1.9](#)

notion clé :
*Green-Riemann, Calcul
d'aire*

La formule de Green-Riemann permet de ramener, dans certains cas, une intégrale double en une intégrale curviligne sur la courbe qui délimite le domaine d'intégration.Figure 1.1 – Domaine D et sa frontière orientée Γ_+ **Théorème 1.2.**

Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par Γ_+ un arc géométrique simple fermé orienté dans le sens direct (figure 1.1). Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 sur D .



Alors, on a

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\Gamma_+} P dx + Q dy \quad (1.6)$$

Lemme 1.2. Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 .

$$\text{Aire de } D = \iint_D dx dy \quad (1.7)$$

$$= \int_{\Gamma_+} x dy \quad (1.8)$$

$$= - \int_{\Gamma_+} y dx \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} x dy - y dx \quad (1.10)$$

Démonstration.

On obtient ces résultats en posant $P(x, y) = y, Q(x, y) = 0$ ou $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$ dans la formule (1.6). ■



2 Intégrales de surfaces

2.1	Notions sur les surfaces paramétrés	25
2.2	Flux d'un champ de vecteurs	32
2.3	Théorèmes intégraux	35

2.1 Notions sur les surfaces paramétrés

2.1.1	Définition	26
2.1.2	Définition : plan tangent	27
2.1.3	Aire d'une surface non plane	30

Définition

Exemples :
exemple A.2.1
exemple A.2.2
exemple A.2.3

notion clé :*Nappe et surface*

\mathcal{E} est un espace affine de dimension 3 attaché à l'espace vectoriel E . On identifie \mathcal{E} à E par le choix d'une origine.

De la même manière que pour les arcs paramétrés, on définit la notion de nappe paramétrée comme suit

Définition 16.

Soit D un domaine (i.e. on peut mesurer son aire qui est supposée finie) de \mathbb{R}^2 .

Une **nappe paramétrée** de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 0$) de \mathcal{E} est une application de classe \mathcal{C}^k :
 $\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}$.

On appelle **surface** l'image par Φ de D et notée $\Sigma = \Phi(D)$.

Définition : plan tangent

Exemples :
[exemple A.2.4](#)

Exercices :
[exercice B.2.1](#)

Documents :
[document C.2.1](#)

notion clé :

Plan tangent et vecteur normal

Définition 17.

Soit Σ une surface définie par une paramétrisation $\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}$ différentiable en (u_0, v_0) .

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = \Phi_1(u, v) \\ y = \Phi_2(u, v) \\ z = \Phi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

Si les vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants,

alors il existe un plan P_{M_0} tangent à la surface Σ en $M_0 = \Phi(u_0, v_0)$ qui est caractérisé par

$$P_{M_0} = \left\{ M \in \mathcal{E}, P = \Phi(u_0, v_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot (v - u_0) \right\}$$



Remarque 2.1. P est paramétré par le développement d'ordre 1 de Φ en (u_0, v_0) .

Définition 18. (Avec les notations de la définition 17).

La **normale à la surface** au point M est la droite affine passant par ce point et perpendiculaire au plan tangent.

Un **vecteur directeur** est

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Un **vecteur directeur unitaire** est

$$n = \frac{N}{\|N\|} \quad (2.2)$$

Remarque 2.2.

- a) De la même manière que pour la tangente d'un arc géométrique, il existe deux vecteurs normaux à une surface $N(u, v)$ et $-N(u, v)$.
- b) L'orientation de la surface est déterminée par un champ continu de normales qui induisent ainsi une face pour la surface. Un paramétrage de la surface sera



compatible avec l'orientation si la normale qu'il génère coïncide avec le choix de la normale fixant l'orientation. Pour une surface fermée, on considère le champ de normales "sortant". (Voir Document [C.2.1](#)).



Aire d'une surface non plane

Exercices :
[exercice B.2.2](#)

 notion clé :

Aire d'une surface non plane

 On a vu (formule (1.7)) que si la surface D est plane (par exemple dans le plan xOy) alors son aire est définie par

$$\text{Aire de } D = \iint_D dx dy \quad (2.3)$$

 Soit maintenant une surface Σ (non plane) alors son aire est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.1.
Soit Σ une surface non plane définie par une paramétrisation Φ différentiable $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Notons T_u et T_v les vecteurs définis par

$$T_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$



Alors l'aire de Σ vaut

$$\text{Aire de } \Sigma = \int_{\Delta} \|T_u(u, v) \wedge T_v(u, v)\| \, dudv \quad (2.4)$$



2.2 Flux d'un champ de vecteurs

2.2.1 Flux et intégrale de surface 33

Flux et intégrale de surface

Exercices :
[exercice B.2.3](#)
[exercice B.2.4](#)

notion clé :
Flux, intégrale de surface

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est fondamental dans diverses domaines. Pour différencier un flux "rentrant" d'un flux "sortant", l'orientation de la surface Σ est fondamentale.

Définition 19.

Soient Σ_+ une surface orientée régulière et Φ une paramétrisation de $\Sigma = \Phi(\Delta)$.
 Soit V un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 continu.

On appelle **flux du champ** V à travers Σ_+ , le nombre noté $\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma$ et défini par

$$\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma = \iint_{\Delta} V(\Phi(x, y)) \cdot n(x, y) \, dx \, dy \quad (2.5)$$

où n est le champ de normale unitaire défini en (2.2).

Lemme 2.1.

Soit Σ une surface définie par l'équation $\{z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ où f est différentiable.



Alors le flux de V à travers Σ_+ est

$$\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma = \varepsilon \iint_D V(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) dx dy \quad (2.6)$$

où $\varepsilon = 1$ si le vecteur normal est orienté vers les z croissants, $\varepsilon = -1$ sinon.



2.3 Théorèmes intégraux

2.3.1	Théorème de Stokes	36
2.3.2	Théorème d'Ostrogradski	37

Théorème de Stokes

Exercices :
[exercice B.2.5](#)

notion clé :
Stokes

Théorème 2.2.

Soient Σ_+ une surface orientée par le choix d'un champ de normales et Γ_+ le bord fermé de Σ_+ , orienté de manière cohérente avec Σ_+ (règle du tire-bouchon de Maxwell (figure 2.1)).

Soit V un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 continument différentiable, de composantes respectives V_1, V_2 et V_3 .

Alors le flux du rotationnel de V à travers la surface Σ_+ est égal à la circulation de V le long de l'arc Γ_+ i.e

$$\iint_{\Sigma_+} \operatorname{rot} V \cdot d\sigma = \int_{\Gamma_+} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz \quad (2.7)$$

Théorème d’Ostrogradski

Exercices :
[exercice B.2.6](#)
[exercice B.2.7](#)

notion clé :
Ostrogradski, volume

Théorème 2.3.

Soit \mathcal{V} un domaine de \mathbb{R}^3 limité par une surface fermée Σ_+ orientée vers l’ “ extérieur ” de \mathcal{V} .

Soit V un champ de vecteurs de classe C^1 .

Alors l’intégrale de la divergence de V dans \mathcal{V} est égale au flux de V à travers la surface Σ_+ i.e.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} V \, dx dy dz = \iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma \tag{2.8}$$

Lemme 2.2. *(Avec les notations précédentes)*

$$\operatorname{Volume}(\mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz = \iint_{\Sigma_+} z dx dy$$

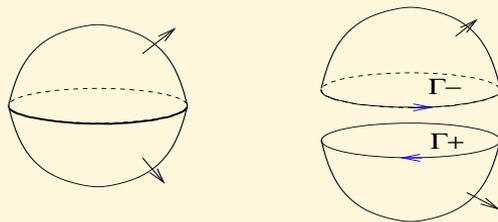


Figure 2.1 – Règle du tire-bouchon de Maxwell

Deuxième partie

Les annexes

Annexe A

Les exemples

Table des exemples

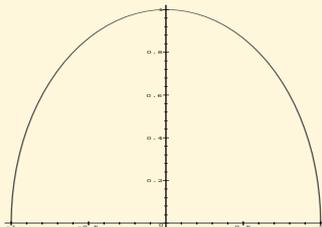
A.1 :	Exemples du chapitre 1	42
Exemple A.1.1 :	Arc paramétré dans le plan	42
Exemple A.1.2 :	Arc paramétré dans le plan	43
Exemple A.1.3 :	Arc paramétré dans l'espace	44
Exemple A.1.4 :	Orientation et tangente	45
Exemple A.1.5 :	Circulation d'un champ de \mathbb{R}^3	46
A.2 :	Exemples du chapitre 2	47
Exemple A.2.1 :	La sphère	47

Exemple A.2.2 :	Le parapluie de Whitney	48
Exemple A.2.3 :	Equation cartésienne d'une surface	49
Exemple A.2.4 :	Equation cartésienne du plan tangent	50

A.1 Exemples du chapitre 1

Exemple A.1.1 Arc paramétré dans le plan

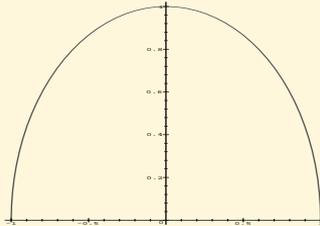
$$I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$$



[Retour au grain ▲](#)

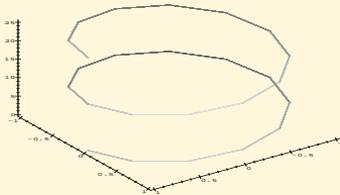
Exemple A.1.2 Arc paramétré dans le plan

$$I = [-1, 1], \quad \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.1.3 Arc paramétré dans l'espace

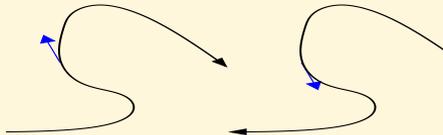
$$I = [0, 4\pi], \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$$



[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.1.4 Orientation et tangente

Suivant le choix de l'orientation de l'arc, on obtient deux vecteurs tangents de sens opposé.



[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.1.5 Circulation d'un champ de \mathbb{R}^3

Soit $V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un champ de vecteur de \mathbb{R}^3 .
Soit $(I = [a, b], \gamma)$ un arc paramétré par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Alors la circulation de V relative à γ est

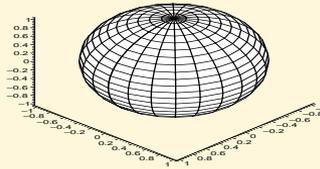
$$\begin{aligned}\int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_a^b V(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt\end{aligned}$$

[Retour au grain ▲](#)

A.2 Exemples du chapitre 2

Exemple A.2.1 La sphère

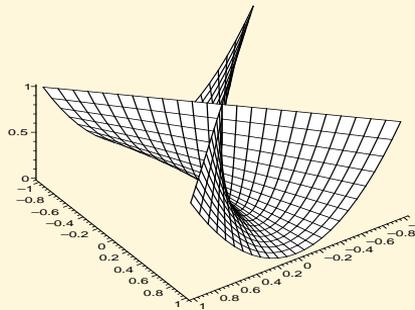
$$D = \{(u, v), 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\} \quad \text{avec } \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = a \sin(u) \cos(v) \\ y = a \sin(u) \sin(v) \\ z = a \cos(u) \end{pmatrix}$$



[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.2.2 Le parapluie de Whitney

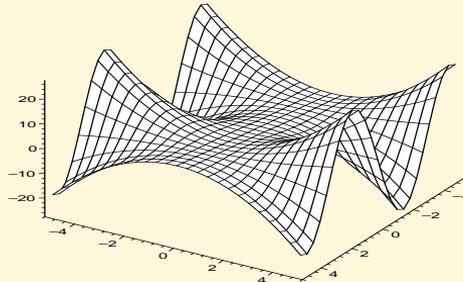
$$D = [-1, 1]^2 \quad \text{avec } \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u \\ z = v^2 \end{pmatrix}$$



[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.2.3 Equation cartésienne d'une surface

$$D = [-5, 5]^2 \quad \text{avec } \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{où } f(x, y) = x + y^2 \sin(x).$$



[Retour au grain ▲](#)

Exemple A.2.4 Equation cartésienne du plan tangent

Notons f , g et h les coordonnées de Φ dans un repère affine fixé de \mathcal{E} .
Alors l'équation cartésienne de P dans ce repère est

$$\begin{vmatrix} x - f(u_0, v_0) & y - g(u_0, v_0) & z - h(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

[Retour au grain ▲](#)

Annexe B

Les exercices

Table des exercices

B.1 :	Exercices du chapitre 1	53
Exercice B.1.1 :	Points simples et multiples	53
Exercice B.1.2 :	Périmètre du cercle	54
Exercice B.1.3 :	Longueur d'un arc défini par une équation cartésienne $y = f(x)$	55
Exercice B.1.4 :	Travail sur une demi-ellipse	56
Exercice B.1.5 :	Travail sur une helice	57
Exercice B.1.6 :	Travail d'un champ dérivant d'un potentiel	58
Exercice B.1.7 :	Exercice : premier bilan	59

Exercice B.1.8 :	Calcul d'aire d'une surface plane	60
Exercice B.1.9 :	Exercice : second bilan	61
B.2 :	Exercices du chapitre 2	62
Exercice B.2.1 :	Plan tangent à une surface définie par son équation cartésienne	62
Exercice B.2.2 :	Aire d'un cylindre	63
Exercice B.2.3 :	Flux à travers une surface	64
Exercice B.2.4 :	Exercice : premier bilan	65
Exercice B.2.5 :	Application à la formule de Stokes	66
Exercice B.2.6 :	Application à la formule d'Ostrogradski	67
Exercice B.2.7 :	Exercice difficile : pour le plaisir...	68

B.1 Exercices du chapitre 1

Exercice B.1.1 Points simples et multiples

Tracer les arcs paramétrés suivants, quels sont les points multiples (si ils existent) ?

- a) $([0, 2\pi], \gamma)$ où $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
- b) $([0, 4\pi], \gamma)$ où $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos(t), 2 + \frac{1}{2} \sin(t))$.
- c) $([0, +\infty[, \gamma)$ où $\gamma(t) = (t, t^2)$.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.1.2 Périmètre du cercle

Calculer le périmètre d'un cercle de centre l'origine et de rayon R .

[Retour au grain ▲](#)

[Solution : à regarder en dernier !!](#)

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Exercice B.1.3 Longueur d'un arc défini par une équation cartésienne $y = f(x)$

Calculer la longueur du segment curviligne d'équation $y = f(x)$ entre les abscisses x_a et x_b .

Application : calculer la longueur de l'arc de chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$ pour $x \in [0, a]$.

[Retour au grain ▲](#)

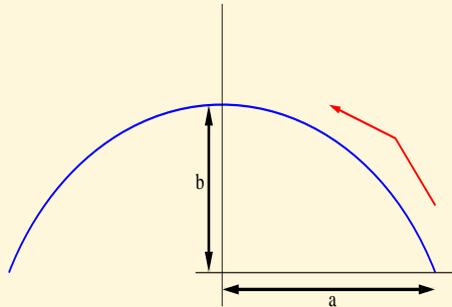
[Solution : à regarder en dernier !!](#)

[Aide 1](#)

Exercice B.1.4 Travail sur une demi-ellipse

Calculer le travail du champ de force $V(x, y) = (y^2, x^2)$ le long de la demi-ellipse supérieure orientée Γ_+

1. la formule $\int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.
2. la formule $\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$.



[Retour au grain ▲](#)

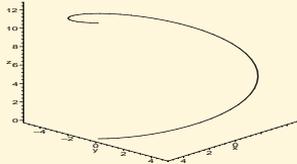
Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Exercice B.1.5 Travail sur une helice

Soit le champ de vecteur $V(x, y, z) = (x + z, y^2, x)$. Calculer le travail de V sur l'arc orienté \widehat{AB} de l'hélice dont la paramétrisation est $x(t) = R \cos(t)$, $y(t) = R \sin(t)$, $z(t) = at$ avec $A = (R, 0, 0)$, $B = (R, 0, 2\pi a)$.

On utilisera la formule $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$



[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.1.6 Travail d'un champ dérivant d'un potentiel

Soit V un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 de composantes respectives

$$P(x, y, z) = xy, \quad Q(x, y, z) = \alpha x^2 + z, \quad R(x, y, z) = y.$$

1. Calculez la divergence de V .
2. A quelle condition V dérive-t-il d'un potentiel ?
3. Calculer le gradient de la fonction f définie par $f(x, y, z) = \frac{yx^2}{2} + yz + C$ (C étant une constante arbitraire).
4. En déduire le travail de V le long du segment orienté \widehat{OA} où $O = (0, 0, 0)$ et $A = (1, 1, 1)$.

[Retour au grain ▲](#)

-
- Question 1 [Aide 1](#)
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)
Question 3 [Aide 1](#)
Question 4 [Aide 1](#)

Exercice B.1.7 Exercice : premier bilan

On considère une particule qui se déplace dans le champ de force $V(x, y) = (x - ay, 3y - 2x)$.

- Calculer le travail reçu par la particule en fonction de a .
 - si elle se déplace sur le segment rectiligne \widehat{OA} avec $O = (0, 0)$, $A = (2, 4)$.
 - si elle se déplace de O à A en suivant le trajet $\widehat{OA'A}$ où A' est la projection de A sur l'axe des abscisses.
 - si elle se déplace de O à A en suivant le trajet $\widehat{OA''A}$ où A'' est la projection de A sur l'axe des ordonnées.
Conclusion ?
- Calculer en fonction de a le travail de la particule qui parcourt une fois, dans le sens trigonométrique le périmètre du cercle de centre O et de rayon 2.
- Pour quelle valeur de a le champ de force V dérive-t-il d'un potentiel f ? Déterminer $V(x, y)$. Que peut-on dire alors des travaux calculés précédemment ?

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.1.8 Calcul d'aire d'une surface plane

Calculez l'aire D délimitée par l'ellipse Γ_+ d'équation $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = b \sin(t)$ en utilisant

a) $\int_{\Gamma_+} x dy.$

b) $-\int_{\Gamma_+} y dx.$

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.1.9 Exercice : second bilan

Soit V le champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 de composantes respectives notées $P(x, y) = -yx^2$ et $Q(x, y) = xy^2$.

On définit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2y < 0\}$. Notons Γ_+ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

a) faire une figure représentant D .

b) calculer $\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$.

c) calculer $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$

d) Conclusion.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

B.2 Exercices du chapitre 2

Exercice B.2.1 Plan tangent à une surface définie par son équation cartésienne

En vous inspirant de l'exemple [A.2.4](#), déterminer l'équation cartésienne du plan tangent P à la surface Σ si celle-ci est définie par la paramétrisation suivante $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.2.2 Aire d'un cylindre

Soit Σ la surface définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 - 2ax = 0, 0 < z < h\}$.

- Représenter Σ .
- Calculer son aire.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.2.3 Flux à travers une surface

Soit V le champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 défini par $V(x, y, z) = \left(xz, z, \frac{-z^2}{2}\right)$. Soit Σ la surface définie par l'équation $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, un champ de vecteurs normaux étant orientée vers les z croissants.

- Représenter Σ et son orientation.
- Calculer le flux du champ V à travers la surface orientée.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.2.4 Exercice : premier bilan

Calculer le flux du champ vectoriel $V(x, y, z) = (y, x, y + z)$ à travers le triangle $\Sigma = \{2x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$; la normale étant orientée vers les z croissants.

[Retour au grain ▲](#)

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Exercice B.2.5 Application à la formule de Stokes

Soit Σ_+ le cône d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z > 0$ orienté vers le haut.
Soit le champ vectoriel de \mathbb{R}^3 défini par $V(x, y, z) = (-y, x, 1 + x + y)$

1. Calculer le flux du rotationnel de V à travers Σ_+ .
2. Retrouver le résultat en appliquant la formule de Stokes.

[Retour au grain ▲](#)

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Exercice B.2.6 Application à la formule d'Ostrogradski

Calculer le flux du champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 défini par $V(x, y, z) = (0, 0, z)$ à travers la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

Exercice B.2.7 Exercice difficile : pour le plaisir...

Théorème B.1. (Avec les notations du théorème 2.2).

Si Σ est une surface **fermée**, alors on a

$$\iint_{\Sigma_+} \text{rot } V \cdot d\sigma = 0$$

On va vérifier ce théorème sur le cas suivant.

Soient le cône Σ^1 paramétrisé par $\Phi^1 : (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \begin{pmatrix} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{pmatrix}$ et Γ_+^1 son bord orienté

dans le sens trigonométrique.

a) Tracer Σ^1 .

b) Déterminer une normale de Σ_+^1 et vérifier si celle-ci correspond avec l'orientation de Γ_+^1

c) Soit V le champ de vecteur défini par $V(x, y, z) = (yz, -xz, 0)$.

Déterminer sa circulation le long de Γ_+^1 et le flux de $\text{rot } V$ à travers Σ_+^1 .

d) Soit Σ^2 la surface paramétrée par $\Phi^2 : (\theta, \rho) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \begin{pmatrix} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une normale de Σ_+^2 et vérifier si celle-ci correspond avec l'orientation de Γ_+^1 .



e) Soit Σ la surface fermée définie par $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$. D'après le théorème précédent, le flux du rotationnel de V à travers cette surface est nul. Tracer Σ et vérifier par le calcul.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)



Annexe C

Les documents

Table des documents

C.1 :	Documents du chapitre 1	71
Document C.1.1 :	Masse d'un fil	71
Document C.1.2 :	Rappels de calcul vectoriel	72
C.2 :	Documents du chapitre 2	75
Document C.2.1 :	Règle du tire-bouchon de Maxwell	75

C.1 Documents du chapitre 1

Document C.1.1 Masse d'un fil

Cours :

[Longueur d'un arc](#)

La masse d'un fil (de section constante) de longueur l et de masse linéique ρ (masse par unité de longueur) vaut $m = \rho l$. Malheureusement, si le fil n'est pas de section constante alors la masse linéique ρ n'est plus constante et est une fonction d'un paramètre t .

Notons (I, γ) un arc géométrique dont le support $\gamma(I)$ “ modélise ” notre fil, alors on admettra que

$$m = \left| \int_I \rho(t) \|\gamma'(t)\| dt \right|$$

Document C.1.2 Rappels de calcul vectoriel

Cours :

[Champ de vecteurs et
circulation](#)

[Potentiel et travail](#)

Dans toute la suite, on supposera que Ω est un ouvert de l'espace affine euclidien de dimension $n = 3$.

Définition 20.

Soit f une fonction de Ω dans \mathbb{R} différentiable.

On appelle **gradient** de f , le champ de vecteur noté ∇f et défini par $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$

Définition 21.

Soit V un champ de vecteur de \mathbb{R}^3 dont les composantes P, Q, R sont des applications différentiables dans Ω .

On appelle **rotationnel** de V , le champ de vecteur noté $\text{rot } V$ et défini par

$$\text{rot } V(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Si V est un champ de vecteur de \mathbb{R}^2 , on définit son rotationnel par



$$\text{rot } V(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y).$$

Définition 22.

Soit V un champ de vecteur de \mathbb{R}^3 dont les composantes P, Q, R sont des applications différentiables dans Ω . On appelle **divergence** de V , la fonction noté $\text{div } V$ et défini par

$$\text{div } V(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \quad (\text{C.1})$$

PETIT FORMULAIRE

Soient c une constante, f, g deux fonctions différentiables sur Ω , U et V deux champs de vecteurs continument différentiables sur Ω .

Alors, on a :

i) $\nabla(cf) = c\nabla f.$

ii) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$

iii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$

iv) $\text{rot}(cU) = c \text{rot } U.$

v) $\text{rot}(U + V) = \text{rot } U + \text{rot } V.$

vi) $\text{div}(cU) = c \text{div } U.$

vii) $\text{div}(U + V) = \text{div } U + \text{div } V.$



viii) $\operatorname{div}(V) = 0 \Leftrightarrow V = \operatorname{rot} U.$

ix) $\operatorname{rot}(V) = 0 \Leftrightarrow V = \nabla f.$



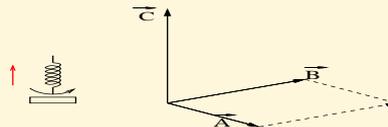
C.2 Documents du chapitre 2

Document C.2.1 Règle du tire-bouchon de Maxwell

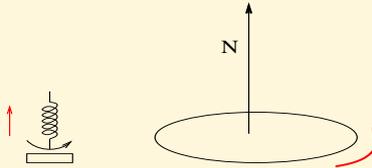
Cours :

[Plan tangent et vecteur normal](#)

Le sens de \vec{C} est le sens de progression du tire bouchon de Maxwell dont le manche subirait la petite rotation qui amène \vec{A} sur \vec{B} .



Si le contour est orienté comme ci-dessous, alors \vec{n} a le sens de progression du tire bouchon de Maxwell dont le manche tournerait dans le sens choisi.



Entrées canoniques

Le gras indique un grain où le concept est défini ;
l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple,
le gras italique à un document, et le romain à un grain où
le concept est mentionné.

A

Aire d'une surface non plane	30
Arc paramétré	10
Arcs équivalents	12

C

Calcul du travail d'un champ de force	18
Champ de vecteurs et circulation	17, 72

F

Flux, intégrale de surface	33
----------------------------------	-----------

G

Green-Riemann, Calcul d'aire	22
------------------------------------	-----------

L

Longueur d'un arc	15, 71
-------------------------	---------------

N

Nappe et surface	26
------------------------	-----------

O

Ostrogradski, volume	37
----------------------------	-----------

P

Plan tangent et vecteur normal	27, 75
Points et arcs	11
Potentiel et travail	20, 72

R

Régulier, stationnaire, tangente	14
--	-----------

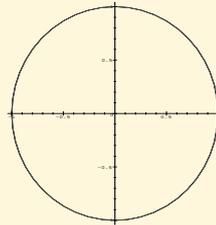
S

Stokes	36
--------------	-----------

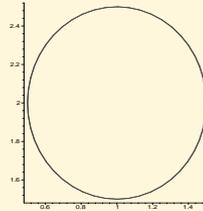
Solution de l'exercice B.1.1

L'arc paramétré de l'exercice B.1.1 est

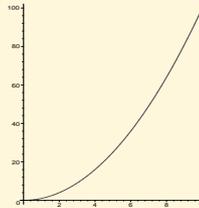
- a) un cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru une fois donc $(1, 0)$ est un point multiple.
C'est un arc fermé.



- b) un cercle de centre $(1,2)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru deux fois donc tous les points sont multiples.



c) un parabole d'équation $y = t^2$, $t > 0$ qui est un arc simple.



[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.2

1. une paramétrisation possible est $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} \\ &= \sqrt{R^2} \\ &= R \end{aligned}$$

$$3. L_\gamma([0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Exercice B.1.2

Etape 1 : on détermine une paramétrisation du cercle.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Exercice B.1.2

Etape 2 : on calcule $\|\gamma'(t)\|$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Exercice B.1.2

Etape 3 : on applique la formule générale (1.1).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.3

Une paramétrisation possible est : $t \in [x_a, x_b]$, $\gamma(t) = (t, f(t))$.

On calcule $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (f'(t))^2}$ et la longueur est donc

$$\left\| \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \right\|$$

Application : $f(x) = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$.

$$\begin{aligned} L_\gamma([0, a]) &= \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx \\ &= \int_0^a a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right) dx \\ &= a \operatorname{sh}(1) \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Exercice B.1.3

Paramétrer ce segment curviligne et appliquer la formule générale (1.1).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 1, Exercice B.1.4

Une paramétrisation de l'ellipse (complète) est $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 1, Exercice B.1.4

Une paramétrisation de la demi-ellipse est $t \in [0, \pi]$, $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$.

En $t = 0$, on est au point $(a, 0)$ et en $t = \pi$, on se trouve au point $(-a, 0)$, la paramétrisation est donc compatible avec l'orientation de l'énoncé.

Calculez $V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Rappel si $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 alors $X \cdot Y$ est un scalaire qui vaut

$$X \cdot Y = X_1 Y_1 + X_2 Y_2$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, question 1, Exercice B.1.4

On a : $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

$$V(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = V(a \cos(t), b \sin(t)) = (b^2 \sin(t)^2, a^2 \cos(t)^2).$$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Par définition du produit scalaire entre les vecteurs V et γ' , on obtient

$$\begin{aligned} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (b^2 \sin(t)^2, a^2 \cos(t)^2) \cdot (-a \sin(t), b \cos(t)) \\ &= -ab^2 \sin(t)^3 + a^2b \cos(t)^3 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Il reste à intégrer cette dernière expression entre 0 et π .

Utilisez les formules de Moivre pour linéariser $\sin(t)^3$ et $\cos(t)^3$.

Formules de Moivre

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$(e^{it})^n = e^{nit}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, question 1, Exercice B.1.4

On va linéariser $\sin(t)^3$ en utilisant les formules de Moivre :

$$\begin{aligned}\sin(t)^3 &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i} \left(e^{3it} - 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} - e^{-3it} \right) \\ &= \frac{-1}{4} \left[\frac{(e^{3it} - e^{-3it}) - (3e^{it} - 3e^{-it})}{2i} \right] \\ &= \frac{-1}{4} (\sin(3t) - 3 \sin(t))\end{aligned}$$

En faisant de même pour $\cos(t)^3$, on obtient :

$$\cos(t)^3 = \frac{1}{4} (\cos(3t) + 3 \cos(t))$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\int_0^\pi V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^\pi \left[\frac{ab^2}{4} (\sin(3t) - 3 \sin(t)) + \frac{a^2b}{4} (\cos(3t) + 3 \cos(t)) \right] dt \\ &= \frac{ab^2}{4} \left(\left[\frac{-\cos(3t)}{3} \right]_0^\pi + 3 \left[\cos(t) \right]_0^\pi \right) + \frac{a^2b}{4} \left(\left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^\pi + 3 \left[\sin(t) \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{-4ab^2}{3}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2, Exercice B.1.4

On a vu à la précédente question qu'une paramétrisation admissible de Γ_+ est $t \in [0, \pi]$, $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$.

Donc chaque point M d'abscisse x et d'ordonnée y parcourt cet arc.

Exprimez x et y en fonction de t , puis déterminez la différentielle dx et dy .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 2, Exercice B.1.4

On a : $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = b \sin(t)$. Leurs différentielles respectives sont donc

$$dx = -a \sin(t)dt$$

$$dy = b \cos(t)dt$$

Calculer $\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy$ où P (resp. Q) désigne la première (resp. seconde) composante du champ V .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, question 2, Exercice B.1.4

On a : $P(x, y) = y^2$ et $Q(x, y) = x^2$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy &= \int_{\Gamma_+} y^2 dx + x^2 dy \\ &= \int_0^\pi \left(-a(b \sin(t))^2 \sin(t) + (a \cos(t))^2 b \cos(t) \right) dt\end{aligned}$$

On retrouve bien sûr la même intégrale que précédemment.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.5

La paramétrisation est $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), at)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et est bien compatible avec l'orientation ($\gamma(0) = A$ et $\gamma(2\pi) = B$).

On a : $dx = -R \sin(t)dt$, $dy = R \cos(t)dt$, $dz = a dt$ et on obtient

$$\begin{aligned} W_{\widehat{AB}}(V) &= \int_0^{2\pi} \left[(R \cos(t) + at) (-R \sin(t)) + R^2 \sin(t)^2 R \cos(t) + (R \cos(t)) a \right] dt \\ &= -aR \int_0^{2\pi} t \sin(t) dt \end{aligned}$$

On intègre par parties $\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$ en posant $f(t) = t$ et $g'(t) = \sin(t)$.

On obtient donc

$$W_{\widehat{AB}}(V) = 2\pi aR$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 1, Exercice B.1.6

On applique la formule (C.1) et on obtient

$$\operatorname{div} V(x, y, z) = y$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2, Exercice B.1.6

V dérive d'un potentiel si et seulement si $\text{rot } V = 0$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 2, Exercice B.1.6

$$\operatorname{rot} V(x, y, z) = (0, 0, x(2\alpha - 1))$$

$$\text{Donc } \operatorname{rot} V = 0 \implies \alpha = \frac{1}{2}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il existe une fonction g telle que $V = \nabla g$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 3, Exercice B.1.6

$$\nabla f(x, y, z) = \left(yx, z + \frac{x^2}{2}, y \right)$$

Donc on a $\nabla f = V$

[Retour à l'exercice ▲](#)

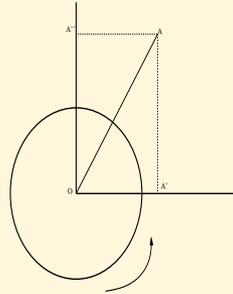
Aide 1, question 4, Exercice B.1.6

Comme V dérive du potentiel f , d'après la relation (1.5) son travail le long d'un arc orienté \widehat{OA} vaut

$$\begin{aligned}W_{\widehat{OA}}(V) &= f(A) - f(O) \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.7



1. a) on choisit une paramétrisation du segment \widehat{OA} , par exemple $t \in [0, 2]$, $\gamma(t) = (t, 2t)$. Comme cette paramétrisation est compatible avec l'orientation (de O vers A) alors on applique la formule (1.3) et on a $W_{\widehat{OA}}(V) = \int_0^2 V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.
Calculons $V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

$$\begin{aligned}
V(\gamma(t)) &= V(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\
&= V(t, 2t) \\
&= (t - 2at, 3 * 2t - 2t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (t - 2at) * (1) + (3 * 2t - 2t) * (2) \\
&= t - 2at + 8t \\
&= 9t - 2at
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer une fonction (en la variable t) élémentaire.

$$\begin{aligned}
W_{\widehat{OA}}(V) &= \int_0^2 (9t - 2at) dt \\
&= 18 - 4a
\end{aligned}$$

b) On calcule le travail sur l'arc orienté $\widehat{OA'A} = \widehat{OA'} \cup \widehat{A'A}$. On doit donc déterminer les paramétrisations des arcs $\widehat{OA'}$ et $\widehat{A'A}$.

Un paramétrage de l'arc $\widehat{OA'}$ compatible est $t \in [0, 2]$, $\gamma(t) = (t, 0)$. Le travail de V le long de $\widehat{OA'}$ est donc

$$\begin{aligned}
W_{\widehat{OA'}}(V) &= \int_0^2 V(t, 0) \cdot (1, 0) dt \\
&= \int_0^2 (t, -2t) \cdot (1, 0) dt \\
&= \int_0^2 t dt \\
&= 2
\end{aligned}$$

On fait de même sur l'arc $\widehat{A'A}$ avec la paramétrisation suivante (qui est compatible avec l'orientation de l'arc) $t \in [0, 4]$, $\gamma(t) = (2, t)$.

$$\begin{aligned}
W_{\widehat{A'A}}(V) &= \int_0^4 V(2, t) \cdot (0, 1) dt \\
&= \int_0^4 3t - 4 dt \\
&= 8
\end{aligned}$$

Donc le travail total de V pour aller de O à A' puis à A vaut

$$\begin{aligned}
 W_{\widehat{OA'A}}(V) &= W_{\widehat{OA'}}(V) + W_{\widehat{A'A}}(V) \\
 &= 2 + 8 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Remarque importante. On aurait pu choisir pour paramétrer l'arc orienté $\widehat{A'A}$ la paramétrisation suivante $t \in [-4, 0]$, $\alpha(t) = (2, -t)$ mais dans ce cas cette paramétrisation n'est pas compatible avec l'orientation de l'arc $\widehat{A'A}$ (on va de $\alpha(-4) = A$ à $\alpha(0) = A'$). Il suffit d'appliquer alors la formule (1.4). On obtient donc

$$\begin{aligned}
 W_{\widehat{A'A}}(V) &= - \int_{-4}^0 V(2, -t) \cdot (0, -1) dt \\
 &= - \int_{-4}^0 (3t + 4) dt \\
 &= -(-8) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Quelque soit la paramétrisation que vous choisissiez, vérifier toujours si celle-ci est compatible avec l'orientation imposé par l'exercice.

c) on fait de même en trouvant deux paramétrisations des arcs $\widehat{OA''}$ et $\widehat{A''A}$.

– arc $\widehat{OA''}$ paramétré par $t \in [0, 4]$, $\gamma(t) = (0, t)$.

$$W_{\widehat{OA''}}(V) = 24$$

– arc $\widehat{A''A}$ paramétré par $t \in [0, 2]$, $\gamma(t) = (t, 4)$.

$$W_{\widehat{A''A}}(V) = 2 - 8a$$

Le travail total vaut donc

$$W_{\widehat{OA''A}}(V) = 26 - 8a$$

Conclusion : le travail pour aller de O à A dépend du chemin suivi donc le champ de force V ne dérive pas en général d'un potentiel (remarque 1.6).

2. une paramétrisation du cercle orienté de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 2 est

$$t \in [0, 2\pi], \quad \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$$

Rappels :

$$- \int \cos(t)^2 dt = \frac{1}{2} (t + \cos(t) \sin(t)) + C.$$

$$- \int \sin(t)^2 dt = \frac{1}{2} (t - \cos(t) \sin(t)) + C.$$

$$- \int \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \sin(t)^2 + C.$$

$$\begin{aligned} W_{\text{Cercle}_+}(V) &= \int_0^{2\pi} V(2 \cos(t), 2 \sin(t)) \cdot (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4a \sin(t)^2 - 8 \cos(t)^2 + 8 \sin(t) \cos(t) \right) dt \\ &= 4a \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt - 8 \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt + 8 \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \\ &= 2a \left[t - \cos(t) \sin(t) \right]_0^{2\pi} - 4 \left[t + \cos(t) \sin(t) \right]_0^{2\pi} + 4 \left[\sin(t)^2 \right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi (a - 2) \end{aligned}$$

3. Deux méthodes possibles :

(a) Si V dérive d'un potentiel alors son travail est indépendant du chemin suivant et donc

$$\begin{aligned} W_{\widehat{OA''A}}(V) &= W_{\widehat{OA'A}}(V) \\ 26 - 8a &= 10 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

(b) Le rotationnel d'un champ $V(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ de \mathbb{R}^2 est

$$\text{rot } V = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y)$$

De plus V dérive d'un potentiel si $\text{rot } V = 0$ (Formule C.1.2).

Calculons $\text{rot } V = 2 - a$ et donc $a = 2$.

Dire que pour $a = 2$, V dérive d'un potentiel f équivaut à

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ V_2(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Calculons f .

$$\begin{cases} x - 2y = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & (1) \\ 3y - 2x = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & (2) \end{cases}$$

Intégrons (1) par rapport à x (y considéré comme une constante).

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + g(y) \text{ où } g(y) \text{ est une fonction en } y.$$

Intégrons (2) par rapport à y (x considéré comme une constante).

$f(x, y) = \frac{3y^2}{2} - 2xy + h(x)$ où $h(x)$ est une fonction en x .

donc on obtient $\frac{x^2}{2} - 2xy + g(y) = \frac{3y^2}{2} - 2xy + h(x)$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} g(y) = \frac{3y^2}{2} \\ h(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Donc

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{3y^2}{2} + C$$

Conclusion : si V dérive d'un potentiel, on a vu que son travail est indépendant du chemin (question 1) et si le chemin est fermé (cas du cercle) alors son travail est nul (remarque 1.6). On peut vérifier ce résultat numériquement avec

$$W_{\text{Cercle}_+}(V) = 4\pi(a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.8

a)

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_+} x dy &= \int_0^{2\pi} a \cos(t) (b \cos(t) dt) \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt \\ &= ab \left[\frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= ab\pi\end{aligned}$$

b)

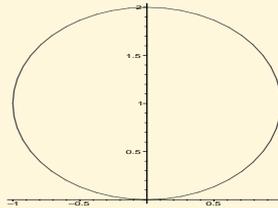
$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_+} y dx &= - \int_0^{2\pi} b \sin(t) (-a \sin(t) dt) \\ &= ab \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt \\ &= ab \left[\frac{t - \cos(t) \sin(t)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= ab\pi \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.1.9

a) $x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0.$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $A(0, 1)$ et de rayon 1. D est donc le disque de centre A et de rayon 1 privé de sa frontière.



b) Une paramétrisation admissible de Γ_+ est donc

$$t \in [0, 2\pi], \quad x(t) = \cos(t), \quad y(t) = 1 + \sin(t).$$

On obtient alors

$$dx = -\sin(t) dt$$

$$dy = \cos(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} - \left((1 + \sin(t)) \cos(t)^2 \sin(t) + \cos(t)^2 (1 + \sin(t))^2 \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos(t)^2 (1 + \sin(t)) (1 + 2 \sin(t)) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt + \int_0^{2\pi} 3 \cos^2(t) \sin(t) dt + \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(t) \sin^2(t) dt \\
&= \left[\frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[-\cos^3(t) \right]_0^{2\pi} \\
&\quad + \left[\frac{\cos(t) \sin(t) + t - 2 \sin(t) \cos^3(t)}{3} \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

c) On passe en coordonnée polaire et on obtient

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = 1 + \rho \sin(\theta) \end{cases} \text{ où } (\rho, \theta) \in \Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

On rappelle que le jacobien est $|J(\rho, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho$

Après calcul, on obtient $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$

Notons $f(x, y) = x^2 + y^2$ alors on a (voir Cours Intégrales Doubles)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) |J(\rho, \theta)| d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} f(\rho \cos(\theta), 1 + \rho \sin(\theta)) |J(\rho, \theta)| d\rho d\theta &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \cos^2(\theta) + (1 + \rho \sin(\theta))^2 \right) \rho d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\rho^3 + \rho + 2\rho^2 \sin(\theta) \right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^1 \left(2\pi (1 + \rho) + 2\rho^2 [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} \right) d\rho \\
&= \int_0^1 2\pi \left(\rho + \rho^3 \right) d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

d) Le résultat était bien sûr attendu. C'est la formule de Green-Riemann (formule 1.6).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.2.1

En supposant que f est différentiable en (x_0, y_0) , le plan tangent admet l'équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

soit en développant

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.2.2

a) $x^2 + y^2 - ax = (x - a)^2 + y^2 - a^2$.

Σ est le cylindre dont la base (dans le plan xOy) est le cercle de centre $A(a, 0)$ de rayon a et de hauteur h . Ainsi, en coordonnée polaire, on obtient comme paramétrisation

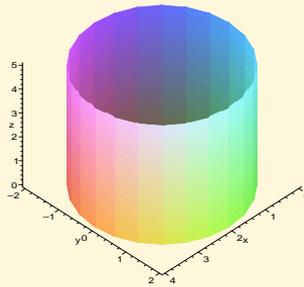


Figure C.1 – $a = 2, h = 5$

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = a(\cos(u) + 1) \\ y = a \sin(u) \\ z = v \end{pmatrix} \text{ où } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$$

b) On applique la formule (2.4) :

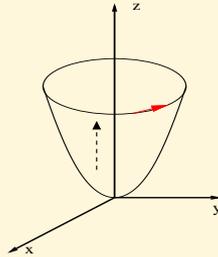
$$T_u(u, v) = \begin{pmatrix} -a \sin(u) \\ a \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \text{aire de } \Sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \|T_u(u, v) \wedge T_v(u, v)\| \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{(a \cos(u))^2 + (-a \sin(u))^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h a \, du \, dv \\ &= 2\pi a h \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.2.3



On applique la formule (2.6) avec $\varepsilon = 1$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$.

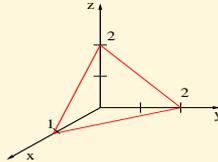
$$V(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) = -2x^2(x^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2) - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$$

On passe en coordonnée polaire $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ avec $(\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-2\rho^4 \cos(\theta)^2 - 2\rho^3 \sin(\theta) - \frac{\rho^4}{2} \right) \rho \, d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-2\rho^5 \cos(\theta)^2 - 2\rho^4 \sin(\theta) - \frac{\rho^5}{2} \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{3} \cos(\theta)^3 - \frac{2}{5} \sin(\theta) - \frac{1}{12} \right) d\rho d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Exercice B.2.4



Paramétrer la surface $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ ?? \end{pmatrix}$ où ?? est ...

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Exercice B.2.4

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 - 2x - y \end{pmatrix}$$

Calculer une normale (formule (2.1)) induite par cette paramétrisation et vérifié si sa directeur coïncide avec l'orientation imposée par l'énoncé.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Exercice B.2.4

$$N(x, y) = (1, 0, -2) \wedge (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$$

Sa directeur est compatible avec l'orientation de Σ . On normalise $n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{6}}N(x, y)$.

Il ne reste plus qu'à calculer $\frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\Sigma_+} (y, x, 2 - 2x) \cdot (2, 1, 1) \, dx \, dy$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Exercice B.2.4

On va fixé la première variable x qui d'après le dessin va de $x = 0$ à $x = 1$. Exprimer y en fonction de x (i.e. déterminer l'équation de la droite du plan xOy passant par le point $(1, 0)$ et le point $(0, 2)$).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Exercice B.2.4

Quand x parcourt l'intervalle $[0, 1]$, y parcourt l'intervalle $[0, 2 - 2x]$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2y + x + 2 - 2x) \, dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left[y^2 + (2-x)y \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left((2-2x)^2 + (2-x)(2-2x) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 (6x^2 + 8 - 14x) dx \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 1, Exercice B.2.5

Appliquer la formule (2.5) ou la formule (2.6), donc il faut

1. Déterminer une paramétrisation du cône Φ telle que $\text{cône} = \Phi(D)$.
2. Calculer un vecteur normal unitaire.
3. Calculer l'intégrale sur le domaine D .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 1, Exercice B.2.5

Le cône est défini à l'aide de l'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ donc une paramétrisation est $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ où $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Donc cône = $f(D)$ (formule (2.6)).

On sait qu'un vecteur normal unitaire est (formule (2.1)) alors $n = \left(\frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1 \right)$.

$$\text{rot } V(x, y, z) = (1, -1, 2)$$

Il reste donc à intégrer

$$\varepsilon \iint_D \text{rot } V(x, y, f(x, y)) \cdot n \, dx dy$$

On vérifie que D est le disque du plan xOy de centre O et de rayon 1 et $\varepsilon = 1$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, question 1, Exercice B.2.5

Pour intégrer $\iint_{\text{Disque}} \text{rot } V(x, y, f(x, y)) \cdot n \, dx dy$, paramétrer le disque en coordonnées polaire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, question 1, Exercice B.2.5

$$\begin{pmatrix} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } [\rho, \theta] \in]0, 1] \times [0, 2\pi].$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \iint_{\text{disque}} \text{rot } V(x, y, f(x, y)) \cdot n \, dx dy &= \iint_{\text{disque}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2 \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) - \sin(\theta) + 2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 \left([\sin(\theta)]_0^{2\pi} + [\cos(\theta)]_0^{2\pi} + 4\pi \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 4\pi \rho d\rho \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Le calcul de $\iint_{\text{disque}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ n'était pas nécessaire car cette fonction en la variable

x est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à la droite $x = 0$ donc

$$\iint_{\text{disque}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 0.$$

Il en est de même pour le terme $\iint_{\text{disque}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2, Exercice B.2.5

Quel est le bord orienté de Σ_+ :

ATTENTION : ne pas confondre avec le domaine D de f .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 2, Exercice B.2.5

Le bord de Σ_+ est le centre de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique dont une paramétrisation est $\gamma : t \in [0, 2\pi] \implies (x = \cos(t), y = \sin(t), z = 0)$.

Pour calculer la circulation de V le long de ce cercle, on peut utiliser les deux méthodes suivantes :

a) Calculer $V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ (formule (1.3)).

b) Calculer les différentielles dx , dy et dz (voir exercice B.1.4) et appliquer la formule

$$\int_{\widetilde{\text{Cercle}}} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz.$$

On utilise la méthode b).

$$dx = -\sin(t) dt$$

$$dy = \cos(t) dt$$

$$dz = 0$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\text{Cercle}}} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t) * (-\sin(t)) + \cos(t) * (-\cos(t)) + 0 \right) dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.2.6

On applique le théorème d'Ostrogradski (formule (2.8)). Les normales à la sphère sont supposées sortantes.

Notons \mathcal{V} la boule de centre O et de rayon 1.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_+} V \cdot d\sigma &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} V \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz \\ &= \text{Volume de la boule unité} \\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

Pour ceux qui ne connaissent pas le volume d'une boule :

il suffit de passer en coordonnée sphérique.

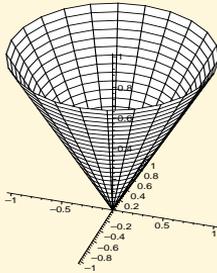
$$(\rho, \theta, \phi) \implies \begin{pmatrix} x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } (\rho, \theta, \phi) \in]0, 1] \times [0, \pi] \times]0, 2\pi[.$$

Le jacobien vaut $\det(J(\rho, \theta, \phi)) = \rho^2 \sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta, d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice B.2.7



- a)
- b) De par la paramétrisation Φ^1 , un vecteur normal est
- $$n^1 = \begin{pmatrix} -z \sin(\theta) \\ z \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos(\theta) \\ z \sin(\theta) \\ -z \end{pmatrix} \text{ qui ne correspond pas à l'orienta-}$$

tion de l'arc fermé Γ_+^1 paramétré par $\gamma^1 : \theta \in [0, 2\pi]$, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$

c)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+^1} V(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} (-\sin(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \cos(\theta)) d\theta \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

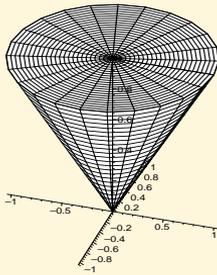
$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule de Stokes (2.6) (avec le signe $-$) car incompatibilité de l'orientation, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_+^1} \text{rot } V \cdot d\sigma &= - \int_{\Gamma_+^1} V(\gamma^1(\theta)) \cdot \gamma^{1'}(\theta) d\theta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

d) On paramétrise Σ^2 par $\gamma^2 : (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, $\begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une normale à Φ^2 est $n^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho \sin(\theta) \\ \rho \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$ qui correspond à l'orientation de l'arc fermé Γ_+^1 .



e)

Comme $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, on a alors d'après le théorème énoncé

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_+} \text{rot } V \cdot d\sigma &= \iint_{\Sigma_+^1} \text{rot } V \cdot d\sigma + \iint_{\Sigma_+^2} \text{rot } V \cdot d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_+^2} \operatorname{rot} V \cdot d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \operatorname{rot} V \left(\Phi^2(\rho, \theta) \right) \cdot n^2 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2\rho d\rho d\theta \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)