Feuille 5 : Equations différentielles ordinaires (EDO)

On utilise l'abréviation EC pour équation caractéristique.
Penser à chercher, dès le début, une éventuelle solution particulière évidente pour l'équation avec second membre.
Chaque solution trouvée peut être l'occasion d'étudier une fonction ou une famille de fonctions jusqu'au tracé de son graphe.

Exercice 0 - EDO à variables séparables

On laisse le soin , à l'étudiant(e) de les inventer à partir de la feuille de TD 3, exercices 6,7,8,9,10,... par exemple : Résoudre

$$x' \cancel{y'} - \frac{e^y . \ln x}{(x+1)^2(e^{2y}+1)} = 0$$

a été énoncé à partir des intégrales I_4 de l'ex. 6 et I_1 de l'ex. 7 .

Exercice A - EDO linéaire du 1^{er} ordre : $y' + yP(x) = Q(x)$

On résoudra les EDO suivantes :

1) $y'(x^2+1) - y + 1 = 0$ 2) $-x\frac{y'}{2} = y + x(1+\ln x)$ 3) $-\frac{y'}{3} + 2xy + x = 0$ 4) $y' = y(\tan x) + 1$

5) $x^3 + y - xy' = 0$ 6) $y' + \frac{y}{x^2} = e^{1/x}$ 7) $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$ 8) $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

9) $y' + y\ cotan\ x = 2e^{\cos x}$ 10) $y' - y\tan x = e^x$ 11) $y' = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 12) $(x^2+1)y' + 2xy = 4x$

13) $y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 1$ 14) $xy' - (1+2x)y = -x^2e^x$ 15) $y' + \frac{3xy}{x^2-1} = -\frac{x^3}{(x^2-1)^{3/2}}$

Exercice B - EDO linéaire du $2^{ème}$ ordre à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = f(x)$

B-1 : 'Sans second membre' : f(x)=0

Avec les 5 équations suivantes, on verra défiler, divers cas pour l'EC :

- deux racines réelles distinctes dont une nulle
- deux racines réelles distinctes différentes de 0
- deux racines complexes (conjuguées, bien sûr)
- une racine réelle double
- deux racines imaginaires pures

1) Résoudre les équations suivantes :

a) $y'' + 3y' = 0$ *b)* $y'' + 2y' - 3y = 0$ *c)* $y'' + 4y' + 13y = 0$

d) $y'' - 4y' + 4y = 0$ *e)* $y'' + 9y = 0$

2) Le problème inverse est rarement posé, mais c'est un bon entrainement : écrire l'EDO linéaire du $2^{ème}$ ordre à coefficients constants sans second membre qui a pour solution réelle :

a) $y_o(x) = k_1 \sin(2x + k_2)$ *b)* $y_o(x) = e^{-3x}(k_1 + k_2x)$ *c)* $y_o(x) = e^{7x}(k_1 \cos x + +k_2 \sin x)$

d) $y_o(x) = k_1e^{8x} + k_2e^{-5x}$ *e)* $y_o(x) = k_1 + k_2e^{-3x}$ où k_1 et k_2 sont des réels quelconques

B-2 : Second membre = polynôme=e^{0x}.polynôme

Aux équations homogènes précédentes, on associe maintenant un second membre en forme de polynôme. L'étape de recherche de la GSSM (solution générale de l'EDO sans second membre) est donc déjà faite en B1). "Il ne reste plus qu'à" trouver une PASM (solution particulière de l'équation avec second membre) , puis à tenir compte d'éventuelles conditions initiales.

Résoudre les équations suivantes :

1a) $y'' + 3y' = x + 8$ satisfaisant aux conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = \dfrac{50}{9}$

Comment se comporte cette solution, à l'ordre 1, quand $x \to 0$? Quand $x \to +\infty$?

1b) $y'' + 3y' = x + 8$ satisfaisant aux conditions $y(0) = 0$ et $y(1) = \dfrac{49}{18}$

2) $y'' + 2y' - 3y = x + 8$

3) $y'' + 4y' + 13y = 13x^2 + 8x + 2$ satisfaisant aux conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$

4) Trouver la solution de $y'' + 4y' + 229y = \dfrac{229}{2}$ qui satisfait à $y(0) = \dfrac{3}{2}$ et $y'(0) = -2$

Préciser les régimes transitoire et permanent de cette solution.

5) On peut montrer que l'EDO $y'' - 4y' + 4y = x$ et l'EDO $y'' - 4y' + 4y = 8$ admettent respectivement pour solution générale $Y_1(x) = e^{2x}(k_1 + k_2 x) + \dfrac{x+1}{4}$ et $Y_2(x) = e^{2x}(k_1 + k_2 x) + 2$ où k_1 et k_2 sont des constantes réelles quelconques.. En déduire sans calcul la solution générale de $y'' - 4y' + 4y = 8 + x$

B-3 : Second membre $=e^{\lambda x}$.polynôme où $\lambda \neq 0$

Résoudre :

1) $y'' + 3y' = e^{-3x}(-12x + 1)$ 2) $y'' + 4y' + 13y = e^{-3x}(20x - 14)$

B-4 : Second membre = $e^{\lambda x}\cos(\beta x + \phi)$

Résoudre :

1a) $y'' + 4y' + 13y = 145\cos(2x)$ 1b) $y'' + 4y' + 13y = 290\sin(2x)$

1c) $y'' + 4y' + 13y = 145[\cos(2x) - 2\sin(2x)]$

2a) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$ 2b) $y'' - 4y' + 13y = e^{3x}\cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$

3) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos(3x + \dfrac{\pi}{4})$

4) $y'' - 4y' + 13y == e^{3x}\cos(2x + \dfrac{\pi}{4}) + e^{2x}\left[x + \cos(3x + \dfrac{\pi}{4})\right]$

Exercice C - Oral VETO (V.O.)

C-1) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

C-2) Résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $k(x)y_0(x)$ où y_0 est la solution de l'ESSM

Exercice D - Intégrale et EDO

Déterminer la fonction f réelle continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$. Pour cela

1. Poser $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ et calculer $g'(x)$ et $g(0)$.
2. En déduire, par intégration par parties, que $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x g(t)dt$
3. Poser $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ et calculer $h'(x)$ et $h(0)$.
4. Quelle EDO vérifie la fonction h ? Résoudre cette EDO.
5. En déduire la fonction f cherchée.

Exercice E - Application à la physique (facultatif)

Dans ce qui suit, x est un déplacement par rapport à l'équilibre, fonction du temps t ; reconnaître les situations physiques décrites par ces équations et les résoudre.

1) $\ddot{x} = 0$

2) $m\ddot{x} = mg$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = 0$

3) $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = v_0$ (poser $\tau = m/\gamma$)

4) $m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x}$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = 0$

5) $m\ddot{x} = -Cx$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = 0$ (poser $\omega_0^2 = C/m$)

6) $m\ddot{x} = -Cx - \gamma\dot{x}$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = 0$ discuter les diverses situations

7) $m\ddot{x} = -Cx - \gamma\dot{x} + F_0\sin(\Omega t)$ avec $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = 0$ discuter les diverses situations

Exercice F - Espace de phase (pas explicitement au programme)

Soient les EDO $5y' + 2y = 0$ $y' = y(1-y)$

D-1) Tracer la courbe orientée donnant y' en fonction de y
D-2) En déduire le comportement asymptotique des solutions
D-3) On pourra toujours vérifier en résolvant courageusement ces EDO

Exercice G -EDO non linéaires se ramenant à une EDO linéaire du 1^{er} ordre : équation de Bernoulli : $y' + yP(x) = M(x)y^\alpha$ (pas explicitement au programme)

1) $(x^2+1)y' - 2y = -2\sqrt{y}$ 2) $xy' = y + x.y^3(1+\ln x)$ 3) $y' + 2xy + x.y^4 = 0$

4) $y' = y\dfrac{\tan x}{3} + \dfrac{1}{3y^2}$ 5) $(x^3+y^3) - 3xy^2y' = 0$

$\boxed{\text{TD 5}}$ Correction

Exo : 0

$$\frac{dx}{dy} - \frac{e^y \ln x}{(x+1)^2(e^{2y}+1)} = 0$$

$\Rightarrow$ on sépare les x et les y $\Rightarrow$ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^y \ln x}{(x+1)^2(e^{2y}+1)}$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{\ln x} dx = \frac{e^y dy}{(e^{2y}+1)}$$

Ce sont 2 intégrales qu'on a calculé au TD3

$$\frac{1}{2}\ln(1+e^{2y}) = -\frac{\ln x}{x+1} - \ln x + \ln(x+1) + \text{Cste} \qquad \text{Cste} = D$$

$$\Rightarrow (1+e^{2y})^2 = \frac{(x+1)\times e^D}{x^{\frac{x+2}{x+1}}} \Rightarrow e^{2y} = \frac{(x+1)^{1/2} e^{D/2}}{x^{(x+2)/2(x+1)}} - 1 \qquad \boxed{y = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{(x+1)^{1/2} e^{D/2}}{x^{\frac{(x+2)}{(2x+2)}}} - 1\right)}$$

Exo A

① On tente de séparer les variables : $y'(x^2+1) - y + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(x^2+1) = y - 1$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{y-1} = (x^2+1)^{-1} dx$ (les variables sont séparées !!!)

On peut donc intégrer à gauche et à droite indépendamment

$\displaystyle\int \frac{dy}{y-1} = \int (x^2+1)^{-1} dx \Rightarrow \ln(y-1) = \text{Arctan}\, x + C$ $\quad C$ = constante (définie par les conditions initiales !)

$\Rightarrow \boxed{y = De^{\text{Arctan}x} + 1}$ avec $D = \text{cste} = e^C$

On procède toujours de cette façon lorsque l'on peut séparer les variables

② On sépare les variables : $-\dfrac{xy'}{2} = y + x(1+\ln x)$

$\Rightarrow -\dfrac{x\,dy}{2dx} - y = x(1+\ln x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = -2(1+\ln x)$

On ne peut pas séparer les variables $\Rightarrow$ on résoud : $\begin{cases} \text{- équation sans } 2^{\text{nd}} \text{ membre} \to \text{solut° générale} \\ \text{- " avec " } \hookrightarrow \text{solut° particul.} \end{cases}$

- $\dfrac{dy_0}{dx} + \dfrac{2}{x}y_0 = 0$ (solution générale de l'équat° ss 2^{nd} membre)

  Ici les variables peuvent être séparées $\dfrac{dy_0}{y_0} = -\dfrac{2dx}{x}$

  On intègre $\displaystyle\int \frac{dy_0}{y_0} = \int -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln y_0 = -2\ln x + C \Rightarrow \underline{y_0 = Dx^{-2}}$

- $\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{2}{x}y_1 = -2(1+\ln x)$ (1) (solut° particulière de l'équat° avec 2^{nd} membre)

On pose y_1 de la forme $y_1 = D(x)x^{-2}$ (on prend y_0 et on dit que D dépend de x)

$\dfrac{dy_1}{dx} = D'(x)x^{-2} + D(x)(-2x^{-3}) \Rightarrow$ on réécrit l'équat° (1)

$$D'(x)x^{-2} + D(x)(-2x^{3}) + \frac{2}{x}D(x)x^{-2} = -2(1+\ln x)$$

$\Rightarrow D'(x)x^{-2} = x(1+\ln x) \Rightarrow D'(x) = -2x^2 - 2x^2\ln x \Rightarrow$ on intègre : $D(x) = \dfrac{-2x^3}{3} - 2\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$

On intègre par parties : $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = 1/x \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$D(x) = -\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^3}{3}\ln x + \frac{2x^3}{9} = -\frac{4x^3}{9} - \frac{2}{3}x^3 \ln x$$

(On ne tient pas compte de la constante d'intégrat° car elle s'ajoute à D dans l'équat° finale)

$$y_1(x) = D(x)x^{-2} = -\frac{4x}{9} - \frac{2x}{3}\ln x$$

• La solution générale de l'équation avec 2nd membre s'écrit

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Dx^{-2} - \frac{4x}{9} - \frac{2x}{3}\ln x$$

$$\boxed{y(x) = \frac{D}{x^2} - \frac{4x}{9} - \frac{2x}{3}\ln x}$$

③ $-\frac{y'}{3} + 2xy + x = 0 \Rightarrow -\frac{y'}{3} + x(2y+1) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x(2y+1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{2y+1} = 3x\,dx \Rightarrow$ variables séparées !!! on intègre

$\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \frac{3x^2}{2} + C \Rightarrow 2y+1 = De^{3x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{D}{2}e^{3x^2} - \frac{1}{2}}$

④ $y' = y\tan x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\tan x = 1 \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - y_0\tan x = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \tan x\, dx \Rightarrow \ln y_0 = -\ln\cos x + C \Rightarrow y_0 = \frac{D}{\cos x}$

• $\frac{dy_1}{dx} - y_1\tan x = 1 \Rightarrow$ on assume $y_1 = \frac{D(x)}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{D'(x)\cos x + D(x)\sin x}{\cos^2 x}$

↳ $\frac{D'(x)\cos x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow D'(x) = \cos x \Rightarrow D(x) = \sin x$ $\quad y_1(x) = \tan x$

$$\boxed{y(x) = \frac{D}{\cos x} + \tan x}$$

⑤ $x^3 + y - xy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - \frac{y_0}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y_0 = \ln x + C \Rightarrow y_0 = Dx$

• $\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x} = x^2 \Rightarrow$ on assume $y_1 = D(x)x \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)x + D(x)$

↳ $D'(x)x = x^2 \Rightarrow D'(x) = x \Rightarrow D(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y_1(x) = \frac{x^3}{2}$

$$\boxed{y(x) = Dx + \frac{x^3}{2}}$$

⑥ $y' + \frac{y}{x^2} = e^{1/x} \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} + \frac{y_0}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \ln y_0 = \frac{1}{x} + C \Rightarrow y_0 = De^{1/x}$

• $\frac{dy_1}{dx} + \frac{y_1}{x_2} = e^{1/x}$ On assume $y_1(x) = D(x)e^{1/x} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)e^{1/x} + D(x)e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

↳ $D'(x)e^{1/x} = e^{1/x} \Rightarrow D'(x) = 1 \Rightarrow D(x) = x \Rightarrow y_1(x) = xe^{1/x}$

$$\boxed{y(x) = (D+x)e^{1/x}}$$

⑦ $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3}y = 1 \Rightarrow$ variables non séparables ②

• $\frac{dy_0}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3}y_0 = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{2}{x^3}dx + \frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln y_0 = \frac{1}{x^2} + 3\ln x + C'$

$\Rightarrow y_0 = De^{1/x^2}x^3$

• $\frac{dy_1}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3}y_1 = \cancel{x^3}1$ on assume $y_1 = D(x)e^{1/x^2}x^3 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)e^{1/x^2}x^3 + D(x)\left(-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}x^3 + e^{1/x^2}3x^2\right)$

$\hookrightarrow D'(x)e^{1/x^2}x^3 + \cancel{D(x)\left(-2e^{1/x^2} + 3x^2e^{1/x^2}\right) + \frac{(2-3x^2)}{x^3}D(x)x^3e^{1/x^2}} = x^3$

$\Rightarrow D'(x)e^{1/x^2}x^3 = 1 \Rightarrow D'(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} \Rightarrow D(x) = -e^{-1/x^2} \Rightarrow y_1 = -x^3e^{2/x^2}$

$$\boxed{y(x) = x^3e^{1/x^2}\left(D - e^{-1/x^2}\right)}$$

⑧ $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2 \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - \frac{y_0}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y_0 = Dx$

• $\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x} = x^2 + 3x - 2$ on assume $y_1 = D(x)x \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)x + D(x)$

$\hookrightarrow D'(x) = x + 3 - \frac{2}{x} \Rightarrow D(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x \Rightarrow y_1 = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 + Dx - 2x\ln x}$$

⑨ $y' + y\,\mathrm{cotan}\,x = 2e^{\cos x} \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} + y_0\,\mathrm{cotan}\,x = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow \ln y_0 = -\ln\sin x + C \Rightarrow y_0 = D\cancel{x}\,1/\sin x$

• $\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{\cos x}{\sin x} = 2e^{\cos x}$ on assume $y_1 = D(x)\cancel{x}\,1/\sin x \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)\cancel{x}\,1/\sin x + D(x)\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$

$\hookrightarrow D'(x)\cancel{x}\,1/\sin x = 2e^{\cos x} \Rightarrow D'(x) = 2\sin x\,e^{\cos x} \Rightarrow D(x) = -2e^{\cos x} \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{\sin x}e^{\cos x}$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sin x}\left(D - 2e^{\cos x}\right)}$$

⑩ $y' - y\tan x = e^x \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - y_0\tan x = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow \ln y_0 = -\ln(\cos x) + C' \Rightarrow y_0 = \frac{D}{\cos x}$

• $\frac{dy_1}{dx} - y_1\tan x = e^x$ on assume $y_1 = \frac{D(x)}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{D'(x)\cos x + D(x)\sin x}{\cos^2 x}$

$\hookrightarrow \frac{D'(x)}{\cos x} = e^x \Rightarrow D'(x) = \cos x\,e^x$ $\begin{cases} u = \cos x \\ v' = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} u' = -\sin x \\ v = e^x \end{cases}$ $D(x) = \cos x\,e^x + \int \sin x\,e^x dx$

$u = \sin x$ $u' = \cos x$
$v' = e^x$ $v = e^x$

$= \sin x\,e^x - \underbrace{\int \cos x\,e^x dx}_{D(x)}$

$2D(x) = (\cos x + \sin x)e^x \Leftarrow$

$\hookrightarrow y_1(x) = \frac{e^x}{2}(1 + \tan x)$

$$\boxed{y(x) = \frac{D}{\cos x} + \frac{e^x}{2}(1 + \tan x)}$$

⑪ $y' = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} + \frac{y_0}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \ln y_0 = +\frac{1}{x} + C \Rightarrow \underline{y_0 = De^{1/x}}$

• $\frac{dy_1}{dx} + \frac{y_1}{x^2} = -\frac{1}{x^3}$ on assume $y_1(x) = D(x)e^{1/x} \Rightarrow \frac{dy_1(x)}{dx} = D'(x)e^{1/x} + D(x)e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\hookrightarrow D'(x)e^{1/x} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow D'(x) = -\frac{e^{-1/x}}{x^3}$

On pose $\begin{cases} x = 1/X \\ dx = -1/X^2 dX \end{cases}$ $D(x) = \int -\frac{e^{-1/x}}{x^3} dx$ $\begin{cases} u = X & u' = 1 \\ v' = e^{-X} & v = -e^{-X} \end{cases}$

$D(X) = \int Xe^{-X} dX$

$D(X) = -Xe^{-X} + \int e^{-X} dX = -Xe^{-X} - e^{-X}$

$D(x) = -\frac{1}{x}e^{-1/x} - e^{-1/x}$

$\hookrightarrow y_1(x) = -\frac{1}{x} - 1$

$$\boxed{y(x) = De^{1/x} - \frac{1}{x} - 1}$$

⑫ $(x^2+1)y' + 2xy = 4x \Rightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx} = 2x(2-y) \Rightarrow \frac{dy}{2-y} = \frac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow$ variables séparées

$\Rightarrow -\ln(2-y) = \ln(x^2+1) + C \Rightarrow \frac{1}{2-y} = D(x^2+1) \Rightarrow \boxed{y = 2 - \frac{1}{D(x^2+1)}}$

⑬ $y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 1 \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - \frac{2x-1}{x^2}y_0 = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{2x-1}{x^2}dx \Rightarrow \ln y_0 = 2\ln x + \frac{1}{x} + C \Rightarrow y_0 = De^{1/x}x^2$

• $\frac{dy_1}{dx} - \frac{2x-1}{x^2}y_1 = 1$ on assume $y_1 = D(x)e^{1/x}x^2 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)e^{1/x}x^2 + D(x)\left(2xe^{1/x} + x^2e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right)$

$\hookrightarrow D'(x)e^{1/x}x^2 = 1 \Rightarrow D'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \Rightarrow D(x) = e^{-1/x} \Rightarrow y_1(x) = x^2$

$$\boxed{y(x) = x^2\left(De^{1/x} + 1\right)}$$

⑭ $xy' - (1+2x)y = -x^2e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1+2x}{x}y = -xe^x \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} - \frac{1+2x}{x}y_0 = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \left(\frac{1}{x} + 2\right)dx \Rightarrow \ln y_0 = \ln x + 2x + C \Rightarrow y_0 = Dxe^{2x}$

• $\frac{dy_1}{dx} - \frac{1+2x}{x}y_1 = -xe^x$ on assume $y_1 = D(x)xe^{2x} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)xe^{2x} + D(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)$

$\hookrightarrow D'(x)xe^{2x} = -xe^x \Rightarrow D'(x) = -e^{-x} \Rightarrow D(x) = e^{-x} \Rightarrow \underline{y_1(x) = xe^x}$

$$\boxed{y(x) = (De^x + 1)xe^x}$$

⑮ $y' + \frac{3xy}{x^2-1} = -\frac{x^3}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow$ variables non séparables

• $\frac{dy_0}{dx} + \frac{3x}{x^2-1}y_0 = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{3x}{x^2-1}dx \Rightarrow \ln y_0 = -\ln(x^2-1) \times \frac{3}{2} + C \Rightarrow \underline{y_0 = D(x^2-1)^{-3/2}}$

• $\frac{dy_1}{dx} + \frac{3x}{x^2-1}y_1 = -\frac{x^3}{(x^2-1)^{3/2}}$ on assume $y_1 = D(x)(x^2-1)^{-3/2} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = D'(x)(x^2-1)^{-3/2} + 2xD(x)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2-1)^{-5/2}$

$\hookrightarrow D'(x)(x^2-1)^{-3/2} = -\frac{x^3}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow D'(x) = -x^3 \Rightarrow D(x) = -\frac{x^4}{4} \Rightarrow \underline{y_1 = \frac{-x^4}{4}(x^2-1)^{-3/2}}$

$$\boxed{y(x) = (x^2-1)^{-3/2}\left(D - \frac{x^4}{4}\right)}$$

Exo B

B-1 1 a) $y'' + 3y' = 0$

Equation du 2nd ordre sans second membre : on pose que la solut° y_0 est de la forme $y_0 = e^{kx}$, on dérive et on remplace dans l'équation :

$\frac{dy_0}{dx} = ke^{kx}$ et $\frac{d^2y_0}{dx^2} = k^2e^{kx} \Rightarrow k^2e^{kx} + 3ke^{kx} = 0 \Rightarrow k^2 + 3k = 0$

qui est l'équation caractéristique. On cherche k_1 et k_2 : $k(k+3) = 0$

$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -3 \end{cases}$. la solution finale est une combinaison de k_1 et k_2

que l'on écrit $y_0(x) = Ce^{k_1x} + De^{k_2x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = C + De^{-3x}}$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad y_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

$y_0 = e^{kx} \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow$

$\boxed{y_0 = Ce^{x} + De^{-3x}}$

c) $y'' + 4y' + 13y = 0 \quad k^2 + 4k + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2 \Rightarrow y_{1,2} = -2 \pm 3i$

$y_0 = e^{-2x}\left(Ce^{3ix} + De^{-3ix}\right)$ que l'on peut réécrire $\boxed{y_0 = Ae^{-2x}\cos(3x + B)}$

d) $y'' - 4y + 4y = 0 \quad k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0$

$\boxed{y_0 = (C + xD)e^{2x}}$

e) $y'' + 9y = 0 \Rightarrow k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i \quad \boxed{y_0 = Ce^{3ix} + De^{-3ix} = A\cos(3x + B)}$

2 a) $y_0(x) = k_1 \sin(2x + k_2) \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ $\quad (A = k_1$ et $B = k_2)$

avec les notations précédentes : $y_0(x) = A\sin(2x + B) \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \alpha + i\omega = 2i \\ k_2 = \alpha - i\omega = -2i \end{cases}$

Equation du 2nd ordre sans 2nd membre, à coef constant donc de la forme

$a\frac{d^2y_0}{dx^2} + b\frac{dy_0}{dx} + cy_0 = 0$ $\quad \begin{cases} y_0 = Ce^{2ix} + De^{-2ix} \\ \frac{dy_0}{dx} = 2iCe^{2ix} - 2iDe^{-2ix} \\ \frac{d^2y_0}{dx^2} = -4Ce^{2ix} - 4De^{-2ix} \end{cases}$

$\Rightarrow -4a + 2ib + c = 0$ $\quad$ chaque terme est solut° de l'E.D

$\begin{cases} 4a = c \\ b = 0 \end{cases}$

On choisit par exemple $a = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y_0}{dx^2} + 4y_0 = 0}$

(on aurait pu prendre n'importe quel "a" !

b) $y_0(x) = e^{-3x}(A + Bx) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \omega = 0 \end{cases}$

$\frac{dy_0}{dx} = -3Ae^{-3x} + Be^{-3x} - 3Bxe^{-3x}$ $\quad \frac{d^2y_0}{dx^2} = 9Ae^{-3x} + 9Bxe^{-3x} - 6Be^{-3x}$

$(-6B + 9A + 9Bx)a + [(B - 3A) - 3Bx]b + (A + Bx)c = 0$

$\begin{cases} -6Ba + 9Aa + Bb - 3Ab + Ac = 0 \\ 9Bxa - 3Bxb + Bxc = 0 \end{cases}$ $\quad \rightarrow \boxed{\frac{d^2y_0}{dx^2} + 6\frac{dy_0}{dx} + 9y_0 = 0}$

$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ A(9a - 3b + c) + B(-6a + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + c - 3b = 0 \\ -6a + b = 0 \end{cases} \begin{cases} c = 9a \\ b = 6a \end{cases}$

(c) $y_0(x) = e^{7x}(k_1 \cos x + k_2 \sin x)$ $\quad \alpha = 7 \quad \omega = 1$

$r_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ sont tous 2 solutions de l'equation caractéris-
-tiques (qui nous permet de trouver les valeurs de a, b et c).

$a r_1^2 + b r_1 + c = 0$ (avec r_1, ça donnerait les 2 m̂ equat°s avec r_2)

$a(\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega) + b(\alpha + i\omega) + c = 0$

en remplaçant α et ω par leur valeur et en considerant $Re(\,) = Im(\,) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 48a + 7b + c = 0 \\ 14a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -14a \\ c = 50a \end{cases}$

$$\boxed{\frac{d^2 y_0}{dx^2} - 14 \frac{dy_0}{dx} + 50 y_0 = 0}$$

(d) $y_0(x) = k_1 e^{8x} + k_2 e^{-5x}$ $\quad r_1 = 8 \quad r_2 = -5 \quad (\omega = 0)$ Là, il faut utiliser les 2 solut°s !

$a r_{1,2}^2 + b r_{1,2} + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 25a - 5b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 39a + 13b = 0 \\ 25a - 5b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = -40a \end{cases}$

$$\boxed{\frac{d^2 y_0}{dx^2} - 3 \frac{dy_0}{dx} - 40 y_0 = 0}$$

(e) $y_0(x) = k_1 + k_2 e^{-3x} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow a r_{1,2}^2 + b r_{1,2} + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a - 3b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b = 3a$

$$\boxed{\frac{d^2 y_0}{dx^2} + 3 \frac{dy_0}{dx} = 0}$$

(B-2) Avec 2nd membre de la forme $e^{0x} P(x)$

(1) Recherche de la solut° particulière (la solut° générale sans 2nd membre est donnée avant)

(a) $y'' + 3y' = x + 8$

solution générale de l'equat° ss 2nd membre : $y_0(x) = C + De^{-3x}$
$\Rightarrow e^{0x}$ est solution donc $y_1(x) = Q(x)$ avec Q de degré le degré de P + 1 $\Rightarrow Q(x) = ax^2 + bx + c$

$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 2ax + b \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2a + 3(2ax + b) &= x + 8 \\ 6ax + 2a + 3b &= x + 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/6 \\ b = 23/9 \end{cases}$

$y(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{23}{9}x + \underbrace{c + C}_{=E} + De^{-3x}$

$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{23}{9}x + E + De^{-3x}$
$y'(x) = x + \frac{23}{9} + E + De^{-3x}(-3)$

$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow E + D = 0 \\ y'(0) = \frac{50}{9} \Rightarrow \frac{23}{9} + E - 3D = \frac{50}{9} \end{cases}$ $\quad E = -D \quad 4E = \frac{27}{9} = 3 \quad E = \frac{3}{4}$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{23}{9}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-3x}}$$

$y'(x) = x + \frac{23}{9} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}e^{-3x}$

$\begin{cases} \lim_{x \to 0} y'(x) = \frac{200}{36} = \frac{50}{9} \\ \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty \end{cases}$

① $y'' + 3y' = x + 8$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = \frac{49}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E + D = 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{23}{9} + E + De^{-3} = \frac{49}{18} \end{cases}$

$\begin{cases} E = -D \\ \frac{49}{18} + E(1 - e^{-3}) = \frac{49}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ D = 0 \end{cases}$ $\boxed{y(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{23}{9}x}$

② $y'' + 2y' - 3y = x + 8$

- solut° de l'equation générale sans 2^{nd} membre : $y_0(x) = Ce^{x} + De^{-3x}$

0 n'est pas solution de l'E.C donc $y_1(x) = (ax + b)e^{0x} = ax + b$

$\hookrightarrow (e^{0x})$

- $\frac{dy_1}{dx} = a \Rightarrow 2a - 3ax - 3b = x + 8 \Rightarrow \begin{cases} -3ax = x \\ 2a - 3b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/3 \\ b = -26/9 \end{cases}$

$y_1 = -\frac{x}{3} - \frac{26}{9}$ $\boxed{y(x) = Ce^{x} + De^{-x} - \frac{x}{3} - \frac{26}{9}}$

③ $y'' + 4y' + 13y = 13x^2 + 8x + 2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$

- solut° générale de l'équation sans 2^{nd} membre : $y_0(x) = e^{-2x}(Ce^{3ix} + De^{-3ix})$

0 (venant de e^{0x}) n'est pas solution de l'EC donc $y_1(x) = ax^2 + bx + c$

$\left.\begin{matrix} \frac{dy_1}{dx} = 2ax + b \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = 2a \end{matrix}\right\}$ $2a + 8ax + 4b + 13ax^2 + 13bx + 13c = 13x^2 + 8x + 2$

$\begin{cases} 13ax^2 = 13x^2 \\ 8ax + 13bx = 8x \\ 2a + 4b + 13c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

$y_1(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} y(x) = e^{-2x}(Ce^{3ix} + De^{-3ix}) + x^2 \\ \frac{dy(x)}{dx} = -2e^{-2x}(Ce^{3ix} + De^{-3ix}) + e^{-2x}(3iCe^{3ix} - 3iDe^{-3ix}) + 2x \end{cases}$

CI : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + D = 0 \\ -2(C+D) + 3iC - 3iD = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + D = 0 \\ C - D = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -i/2 \\ D = i/2 \end{cases}$

$\boxed{y(x) = \frac{ie^{-2x}}{2}\left(e^{-3ix} - e^{3ix}\right) + x^2}$

④ $y'' + 4y' + 229y = \frac{229}{2}$ avec $y(0) = 3/2$ $y'(0) = -2$

- $y_0(x)$: $r^2 + 4r + 229 = 0$ $r_{1,2} = -2 \pm 15i$ $y_0(x) = e^{-2x}(Ce^{15ix} + De^{-15ix})$
- $y_1(x) = a$ (puisque 0 n'est pas solution) $a = \frac{1}{2} = y_1(x)$

$\begin{cases} y(x) = e^{-2x}(Ce^{15ix} + De^{-15ix}) + 1/2 \\ \frac{dy(x)}{dx} = -2e^{-2x}(Ce^{15ix} + De^{-15ix}) + e^{-2x}(15iCe^{15ix} - 15iDe^{-15ix}) \end{cases}$

CI : $\begin{cases} C + D = 0 \\ -2(C+D) + 15i(C - D) = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} C + D = 0 \\ C - D = \frac{2i}{15} \end{cases}$

$C = i/15$ $D = -i/15$

$\boxed{y(x) = \underbrace{\frac{ie^{-2x}}{15}}_{\text{transitoire}}\underbrace{\left(e^{15ix} - e^{-15ix}\right)}_{2i\sin 15x} + \underbrace{1/2}_{1/2}}$ $\Rightarrow$ permanent

⑤ Si $\begin{cases} y''-4y'+4y = x \\ y''-4y'+4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = e^{2x}(k_1+k_2x) + \frac{x+1}{4} \\ y(x) = e^{2x}(k_1+k_2x) + 2 \end{cases}$

equations — solutions — la somme des solut^os particul.

Alors $y''-4y'+4y = x+8$ admet comme solution $\frac{x+1}{4} + 2$ (particulière)

$$y(x) = e^{2x}(k_1+k_2x) + \frac{x+9}{4}$$

B-3

① $y''+3y' = e^{-3x}(-12x+1)$ $\qquad y_0(x) = C+De^{-3x}$ (Rappel)

L'argument de l'exponentiel est le même donc il est solution (simple) de l'EC. $\Rightarrow$ y_1 est de la forme $y_1(x) = (ax^2+bx+c)e^{-3x}$

$$y_1'(x) = -3e^{-3x}(ax^2+bx+c) + e^{-3x}(2ax+b)$$

$$y_1'(x) = e^{-3x}(-3ax^2+(-3b+2a)x-3c+b)$$

$$y_1''(x) = -3e^{-3x}(-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c) + e^{-3x}(-6ax+2a-3b)$$

$$y_1''(x) = e^{-3x}(+9ax^2(9b-6a-6a)x+2a-6b+9c)$$

$\Rightarrow \begin{cases} 9b-12a-9b+6a = -12 \\ 2a-6b+9c-9c+3b = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ $\quad \boxed{y_1(x) = (2x^2+x)e^{-3x}}$

⚠ $y(x) = y_0(x)+y_1(x)$

② $y''+4y'+13y = e^{-3x}(20x-14)$ $\quad \begin{cases} y_0(x) = Ae^{-2x}\cos(3x+B) \\ y_0(x) = Ce^{(-2+3i)x} + De^{(-2-3i)x} \end{cases}$

L'argument de l'expo n'est pas le même, donc il n'est pas solution de l'EC $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{-3x}(ax+b) \\ y_1'(x) = -3e^{-3x}(ax+b) + e^{-3x}(a) = e^{-3x}(-3ax+a-3b) \\ y_1''(x) = -3e^{-3x}(-3ax+a-3b) + e^{-3x}(-3a) = e^{-3x}(+9ax-6a-3b) \end{cases}$$

On injecte dans l'ED $\Rightarrow$

$$e^{-3x}(9ax-6a-3b) + e^{-3x}(-12ax+4a-12b) + e^{-3x}(13ax+13b) = e^{-3x}(20x-14)$$

$\Rightarrow \begin{cases} 9ax-12ax+13ax = 20x \\ -6a-3b+4a-12b+13b = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

$$\boxed{y_1(x) = e^{-3x}(2x+5)}$$

~~B-1~~

~~① $y''+4y'+13y = 145\cos(2x)$~~ $\quad$ ~~$\begin{cases} y_0(x) = Ce^{(-2+3i)x} + De^{(-2-3i)x} \\ y_0(x) = Ae^{-2x}\cos(3x+B) \end{cases}$~~

~~$y_1(x) = a\cos(2x) = ae^{2ix} + ae^{-2ix}$~~

~~pas le même a sous cosinus donc~~ ~~1 polynome adm 0~~ ~~1 des 2 solut^os~~

~~$-4a+4\times 2ia+13a = 145$~~ $\Leftarrow$ ~~$\frac{dy_1(x)}{dx} = 2iae^{2ix}$~~ ~~$\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} = -4ae^{2ix}$~~

B-4

① ⓐ $y'' + 4y' + 13y = 145\cos 2x$ → de la forme $E(x)e^{\lambda x}\cos(\beta x + \phi)$ avec $\begin{cases}\lambda = 0\\ \beta = 2\end{cases}$

$y_0 = Ae^{-2x}\cos(3x + B)$

$y_1(x)$ de la forme $y_1(x) = e^{\lambda x}(G(x)\cos\beta x + H(x)\sin\beta x)$

λ et β ne sont pas solutions donc $\Rightarrow$ $H(x)$ et $G(x)$ de degrés 0 (comme 145)

$$\begin{cases} y_1(x) = a\cos 2x + b\sin 2x \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \\ \dfrac{d^2y_1(x)}{dx^2} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x \end{cases}$$

$\Rightarrow -4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 8a\sin 2x + 8b\cos 2x + 13a\cos 2x + 13b\sin 2x = 145\cos 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 8b + 13a = 145 \\ -4b - 8a + 13b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{96}{13}b + 9a = 145 \\ b = 12/13\, a \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{145}{213}\cdot 13 \\ b = \frac{145}{213}\cdot 12 \end{cases}$

$$\boxed{y_1(x) = \frac{145}{213}(13\cos 2x + 12\sin 2x)}$$

ⓑ Idem avec $\begin{cases} -4a + 8b + 13a = 0 \\ -4b - 8a + 13b = 290 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -9/8\, a \\ 9b - 8a = 290 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 18 \\ a = -16 \end{cases}$

$$\boxed{y_1(x) = -16\cos 2x + 18\sin 2x}$$

ⓒ Combinaison linéaire $\boxed{y_1^c(x) = y_1^a(x) + y_1^b(x)/2}$

② ⓐ $y'' - 4y' + 13y = 10\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ → $10\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{4} - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)$

- solut° générale ss 2nd membre : $r^2 - 4r + 13 = 0$ $r_{1;2} = 2 \pm 3i$ $y_0(x) = Ae^{2x}\cos(3x + B)$
- solut° particulière :

Le second membre est de la forme $E(x)e^{\lambda x}\cos(\beta x + \phi)$ avec $\begin{cases} E(x) = 10 \\ \lambda = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Il n'est pas solut° de la forme $y_0(x)$

$\Rightarrow$ La solut° particulière est de la forme

$y_1(x) = e^{\lambda x}(G(x)\cos\beta x + H(x)\sin\beta(x))$ avec $\begin{cases} \beta = 2 \\ \lambda = 0 \\ H(x) = b \\ G(x) = a \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \\ \dfrac{d^2y_1(x)}{dx} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x \end{cases}$$

$\begin{cases} -4a + 8b + 13a = 5\sqrt{2} \\ -4b - 8a + 13b = -5\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 8b + 9a = 5\sqrt{2} \\ 9b - 8a = -5\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64b + 81b = 5(\sqrt{2})(8 - 9) \\ 81a - 64a = 5\sqrt{2}(9 - 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 145b = -5\sqrt{2} \\ 17a = 5\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} b = \frac{-5\sqrt{2}}{145} \\ a = \frac{5\sqrt{2}}{7} \end{cases}$

$$\boxed{y_1(x) = 5\sqrt{2}\left(\frac{\cos 2x}{7} - \frac{\sin 2x}{145}\right)}$$

ⓑ . solut° particulière : $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3x}(\cos(2x) - \sin 2x)$ pas solution de l'EC.

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{3x}(a\cos 2x + b\sin 2x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} = 3e^{3x}(a\cos 2x + b\sin 2x) + e^{3x}(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) = e^{3x}((3a + 2b)\cos 2x + (3b - 2a)\sin 2x) \\ \dfrac{d^2y_1(x)}{dx} = 3e^{3x}((3a + 2b)\cos 2x + (3b - 2a)\sin 2x) + e^{3x}((3a + 2b)2\sin x\,(\times -1) + (3b - 2a)(2)\cos 2x) \end{cases}$$

$= e^{3x}((3(3a + 2b) + 2(3b - 2a))\cos 2x + (3(3b - 2a) - 2(3a + 2b))\sin 2x)$

$= e^{3x}((5a + 12b)\cos 2x + (5b - 12a)\sin 2x)$

$\Rightarrow (5a + 12b)\cos 2x + (5b - 12a)\sin 2x - 4(3a + 2b)\cos 2x - 4(3b - 2a)\sin 2x + 13a\cos 2x + 13b\sin 2x$

$\Rightarrow \cos 2x(5a + 12b - 12a - 8b + 13a) + \sin 2x(5b - 12a - 12b + 8a + 13b) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x - \sin 2x)$

$$\begin{cases} 6a+4b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -4a+6b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+2b = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -2a+3b = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13b = \frac{\sqrt{2}}{4}(2-3) \\ 13a = \frac{\sqrt{2}}{4}(3+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{2}}{52} \\ a = \frac{5\sqrt{2}}{52} \end{cases}$$

$$\boxed{y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{52} e^{3x}\left(5\cos 2x - \sin 2x\right)}$$

③ solution particulière avec 2nd membre $e^{2x}\cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2x}(\cos 3x - \sin 3x)$

$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow$ solution de l'EC donc $y_1 = e^{2x}(H\cos 3x + G\sin 3x)$ avec

$\begin{cases} H = ax+b \\ G = cx+d \end{cases}$ $\quad y_1(x) = e^{2x}\left((ax+\cancel{b})\cos 3x + (cx+\cancel{d})\sin 3x\right)$

$$\frac{dy_1}{dx} = e^{2x}\left(2(ax+\cancel{b})\cos 3x + 2(cx+\cancel{d})\sin 3x + a\cos 3x + c\sin 3x - 3ax\sin 3x + 3cx\cos 3x\right)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = e^{2x}\left((2ax+a+3cx)\cos 3x + (2cx+c-3ax)\sin 3x\right)$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = e^{2x}\left((4ax+2a+6cx)\cos 3x + (4cx+2c-6ax)\sin 3x + (2a+3c)\cos 3x - (6ax+3a+9cx)\sin 3x + (2c-3a)\sin 3x + (6cx+3c-9ax)\cos 3x\right)$$

$$= e^{2x}\left((4ax+2a+6cx+2a+3c+6cx+3c-9ax)\cos 3x + (4cx+2c-6ax-6ax-3a-9cx+2c-3a)\sin 3x\right)$$

$$= e^{2x}\left((-5ax+4a+12cx+6c)\cos 3x + (-5cx+4c-12ax-6a)\sin 3x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{5ax}+\cancel{4a}+\cancel{12cx}+6c-\cancel{8ax}-\cancel{4a}-\cancel{12cx}+\cancel{13ax} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\cancel{5cx}+\cancel{4c}-\cancel{12ax}-6a-\cancel{8cx}-\cancel{4c}+\cancel{12ax}+\cancel{13cx} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\sqrt{2}}{12} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{12} \end{cases} \qquad \boxed{y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} x e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)}$$

④ $$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{52} e^{3x}(5\cos 2x - \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{12} x e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$$

(somme des 2 derniers résultats !!!)

$\boxed{\text{Exo C}}$

C-1 $$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 - a + b(x^2+x) + c(x^2-x)}{x(x^2-1)}$$

$$= \frac{x^2(a+b+c) + x(b-c) - a}{x(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b-c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

C-2 $\quad x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x(x^2-1)}\, y = \frac{x}{(x^2-1)}$$

• solut° générale sans 2nd membre :

$$\frac{dy_0}{dx} + \frac{2}{x(x^2-1)}\, y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_0}{y_0} = -\frac{2}{x(x^2-1)}\,dx = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln y_0 = 2\ln x - \ln(x-1) - \ln(x+1) + C' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_0 = D\,\frac{x^2}{x^2-1}}$$

• solution particulière de l'equat° avec second membre

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{2}{x(x^2-1)}\, y_1 = \frac{x}{(x^2-1)}$$

On assume $y_1(x)$ est de la forme

$$y_1(x) = D(x) \times \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = D'(x)\,\frac{x^2}{x^2-1} + D(x)\left(\frac{(x^2-1)\times 2x - x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow D'(x)\,\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1} \qquad D'(x) = \frac{1}{x} \qquad D(x) = \ln x$$

$$\boxed{y_1(x) = \ln x\,\frac{x^2}{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,(D + \ln x)}$$

Exo D

① $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad g'(x) = f(x) \qquad g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

② $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt \qquad$ on pose $\begin{cases} u = x - t \\ v' = f(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -1 \\ v = g(t) \end{cases}$

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = [(x-t)g(t)]_0^x - \int_0^x -g(t)\,dt = 0 - x\underbrace{g(0)}_{=0} + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt$$

③ $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt \qquad h'(x) = g(x) \qquad h(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$

④ Dans l'énoncé, on a $\quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$

$$\Rightarrow g'(x) + \int_0^x g(t)\,dt = 1$$

$$\Rightarrow h''(x) + h(x) = 1$$

On pose $y_0(x) = e^{kx} \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i \qquad y_0(x) = Ce^{ix} + De^{-ix}$

Le 2nd membre est de la forme $e^{0x}P(x)$ avec $P(x) = 1 \qquad 0$ n'est pas solution

donc $y_1(x)$ de la forme $e^{0x}Q(x)$ avec $Q(x) = a \qquad y_1(x) = a = 1$

$$\boxed{y(x) = Ce^{ix} + De^{-ix} + 1} \;(= h(x))$$

⑤ $f(x) = h''(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = -Ce^{ix} - De^{ix}} \;(= -h(x))$

$\boxed{\text{Exo E}}$

① $\ddot{x} = 0$: mouvement à vitesse constante (MRU)

$\dot{x} = cste = A$ $\quad \boxed{x = At + B}$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
$\underline{x(t) = gt^2/2}$

② $m\ddot{x} = mg$: chute libre $\quad \dot{x} = gt + A \quad \boxed{x = \frac{1}{2}gt^2 + At + B}$

③ $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$: freinage

$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0$ on pose $x_0(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 m + \gamma\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{\gamma}{m} \end{cases}$

$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{+\lambda_2 t} = A + Be^{-\frac{\gamma t}{m}}$

$\begin{cases} x(0) = a = A + B & A = a + \frac{v_0 m}{\gamma} \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow -\frac{B\gamma}{m} = v_0 & B = -\frac{v_0 m}{\gamma} \end{cases}$

$$\boxed{x(t) = a + \frac{v_0 m}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right)}$$

④ $m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x}$: chute libre avec frottem[ts]

• $\ddot{x}_0 + \frac{\gamma}{m}\dot{x}_0 = g \quad x_0(t) = A + Be^{-\gamma t/m}$ (solut° générale sans 2nd membre)

• $\ddot{x}_1 + \frac{\gamma}{m}\dot{x}_1 = g$ on pose $x_1(t) = ax$ car g de la forme ge^{0t} et 0 est solut° de l'équation caractéristique

$\frac{dx_1(t)}{dt} = a \quad \frac{d^2x_1(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{m}a = g \quad a = \frac{gm}{\gamma}$

$x(t) = A + Be^{-\gamma t/m} + \frac{gm}{\gamma}t$

$x(0) = a \Rightarrow A + B = a$
$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{x(t) = a + \frac{gm}{\gamma}t}$$

⑤ $m\ddot{x} = -Cx$: oscillateur harmonique

$\ddot{x}_0 + \frac{c}{m}x_0 = 0$ on pose $x_0(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\pm ci}{m}$

$x_0(t) = Ae^{cit/m} + Be^{-cit/m}$

$\left.\begin{aligned} x(0) = a &\Rightarrow A + B = a \\ \dot{x}(0) = 0 &\Rightarrow \frac{Ac}{m}i - \frac{Bc}{m}i = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B = a/2$

$x_0(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\frac{ct}{m}} + e^{-i\frac{ct}{m}}\right)$

$$\boxed{x_0(t) = a\cos\left(\frac{ct}{m}\right)}$$

⑥ $m\ddot{x} = -Cx - \gamma\dot{x}$: oscillateur avec amortissement

$\ddot{x} + \frac{C}{m}x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0 \quad x_0(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{\gamma}{m} = 0$

$\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{\gamma}{m}$

$\left\{ \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4\gamma/m}}{2} \right.$

• si $c > 2\sqrt{\gamma m}$ alors amortissem[ts] dominant

$x_0(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$ $\quad \begin{cases} x(0) = a \\ A + B = a \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 = (A - B)\lambda \\ \Rightarrow A = B = a/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x_0(t) = \frac{a}{2}e^{\alpha t}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)}$

$$\boxed{x_0(t) = ae^{\alpha t}\operatorname{ch}(\omega t)}$$

λ_1 et $\lambda_2 < 0$ donc amortissement exponentiels dominé par λ_2

• Si $c < 2\sqrt{\gamma m}$ alors faible amortissement avec pseudo periode

Δ est négatif $\Rightarrow$ $\Delta = i^2\left(\frac{c^2}{m^2} + 4\frac{\gamma}{m}\right)$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\frac{\sqrt{-c^2+4\gamma m}}{2}$

$x_0(t) = \frac{a}{2}e^{\alpha t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ $\quad \boxed{x_0(t) = ae^{\alpha t}\cos\omega t}$

• Si $c = 2\sqrt{\gamma m}$ alors $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_0(t) = (A+Bt)e^{\alpha t}}$ $\quad A = a$

$\frac{dx_0}{dt} = Be^{\alpha t} + \alpha(A+Bt)e^{\alpha t}$ $\quad \cancel{x_0(t) = \frac{a}{2}(1+t)e^{\alpha t}}$ $\quad B + \alpha A = 0$

$B = -\alpha a$

$\boxed{x_0(t) = a(1-\alpha t)e^{\alpha t}}$

7 $m\ddot{x} + Cx + \gamma\dot{x} = F_0 \sin\Omega t$

• cas précédent pour la solution générale ss 2nd membre
• solution particulière : 2nd membre de la forme $e^{0t} \times E(x) \times \sin(\omega t + \phi)$

donc $y_1(t)$ de la forme $y_1(t) = e^{0t}(H(x)\cos\omega t + G(x)\sin\omega t)$ polynôme degré 0 $\quad (\omega = \Omega)$

Si $\Omega = \lambda_1$ ou λ_2 $\Rightarrow$ non car $\lambda = 0$ donc $\begin{cases} \lambda \neq \alpha(\pm i\omega) \\ \lambda \neq \alpha \pm \omega \\ \lambda \neq \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow$ $H(x)$ et $G(x)$ de degré 0
$\quad \hookrightarrow A \quad \hookrightarrow B$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t \\ \frac{dx_1}{dt} = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = -A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t \end{cases}$$

$\Rightarrow$
$$\left.\begin{matrix} -A\Omega^2 m & -B\Omega^2 m \\ +B\Omega\gamma & -A\Omega\gamma \\ +AC & +BC \\ \text{termes en cos} & \text{terme en sin} \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} A(C-\Omega^2 m) + B\Omega\gamma = 0 \\ B(C-\Omega^2 m) - A\Omega\gamma = F_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) & (2) \\ \times(\Omega\gamma) & \times(C-\Omega^2 m) \\ \times(C-\Omega^2 m) & \times(-\Omega\gamma) \end{matrix}$$

$(1) \Rightarrow B\Omega^2\gamma^2 + B(C-\Omega^2 m)^2 = F_0(C-\Omega^2 m)$

$(2) \Rightarrow A(C-\Omega^2 m)^2 + A\Omega^2\gamma^2 = -F_0(\Omega\gamma)$

$$\begin{cases} B = \frac{F_0(C-\Omega^2 m)}{\Omega^2\gamma^2 + (C-\Omega^2 m)^2} \\ A = \frac{-F_0\Omega\gamma}{\Omega^2\gamma^2 + (C-\Omega^2 m)^2} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \frac{F_0}{\Omega^2\gamma^2 + (C-\Omega^2 m)^2}\left(-\Omega\gamma\cos\Omega t + (C-\Omega^2 m)\sin\Omega t\right)$$