Feuille 2 : Th. de Rolle, th. des accroissements finis - DL

Exercice-cours 1 - Th. des acc. finis=conséquence du th. de Rolle

On considère une fonction f de la variable x, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On définit la fonction auxiliaire ϕ de la variable x, de telle sorte que

$$\forall x \in [a,b], \quad \phi(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) \quad \text{où } A \text{ est le réel constant tel que } \phi(b) = \phi(a) = 0$$

1) Calculer la constante A

2) Est-ce que ϕ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b ?

3) En déduire qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ avec $a < c < b$

Exercices 2 - Applications du th. des acc. fin. à la démontration d'inégalités

Ex.1) L'énoncé du théorème des accroissements finis contient une inégalité directement exploitable pour résoudre les questions suivantes.

1) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et soit la fonction f définie par $f(x) = \ln x$

1-a) Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à f entre a et b ?

1-b) En déduire que $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$

2) Montrer que les double-inégalité ou inégalités suivantes sont satisfaites

- a) pour $x \geq 0$, $\quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$
- b) pour $0 \leq x < 1$, $\quad x \leq \arcsin x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arcsin x)' = +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- c) pour $x \geq 0$, $\quad \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$
- d) pour $x > 0$, $\quad \dfrac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$
- e) pour tout x réel, $\quad e^x - 1 \geq x$
- f) pour tout $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}]$, $\quad |x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2.|x-y|$
- g) pour $0 < \alpha < 1$, et $i \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}} \leq (i+1)^\alpha - i^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{i^{1-\alpha}}$

En déduire que, quand n tend vers l'infini, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1-\alpha}}$ équivaut à $\dfrac{n^\alpha}{\alpha}$.

Suggestions : écrire la double inégalité précédente pour $i = 1, 2, 3, ...n$; sommer membres à membres, ce qui donne une nouvelle double inégalité ; travailler les deux inégalités séparément en faisant apparaître S_n ; puis les regrouper pour encadrer le quotient $\dfrac{S_n}{\left(\dfrac{n^\alpha}{\alpha}\right)}$ par 2 fonctions qui tendent vers 1 quand n tend vers l'infini.

Ex.2) Du théorème des accroissements finis, découle un second théorème appelé **"Inégalité des accroissements finis"** :

- Soient :
  i) deux réels a et b tels que $a < b$
  ii) une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$
  iii) et dont la dérivée f' est bornée[1] sur $]a,b[$, avec $m = \inf_{]a,b[}(f')$ et $M = \sup_{]a,b[}(f')$
  Alors : $m.(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M.(b-a)$
- Une autre formulation de la proposition iii) existe, où iii) est remplacée par
  iii-bis) $|f'|$ est bornée sur $]a,b[$, avec $M = \sup_{]a,b[}(|f'|)$
  Alors : $\forall\, x\,, y\, \in]a,b[\,,\quad |f(x) - f(y)| \leq M.|x-y|$

Exploiter ces résultats pour montrer que

- a) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \arctan(x+1) - \arctan(x) \leq 1$ (les égalités sont-elles réalisées ?)

Exercices 3 - Formules de Taylor-Lagrange, formule de Mac-Laurin

- Soient deux réels a, b et $n \in \mathbb{N}$, et une fonction $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, qui, sur $]a,b[$, admette une $(n+1)$-ième dérivée,
  alors $\exists\ c \in]a,b[$ tel que [2]

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad \text{(Taylor-Lagrange à l'ordre } n)$$

  Pour $n = 0$, on retrouve le niveau du th. des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, on trouve la formulation

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{(n)}}{n!} f''(a) + \frac{h^{(n+1)}}{n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{où } 0 < \theta < 1$$

- En posant $a = 0$ et $h = x$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{(Mac-Laurin à l'ordre } n)$$

Ex.1) Toute information sur l'expression du terme complémentaire (reste de Lagrange d'ordre n) se traduit par une comparaison entre f(x) et la partie régulière.
Application : Démontrer les inégalités suivantes :

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, \text{ si } x \geq 0 \qquad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \tan x \geq x + \frac{x^3}{3}, \text{ si } x \geq 0$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x\ , \text{ si } x \geq 0 \qquad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \text{ si } x \geq 0$$

$$\ln(1+\cos x) - \ln 2 < -\frac{x^2}{4}, \text{ si } |x| < \pi$$

[1]Une fonction g de la variable réelle x est bornée sur un intervalle I s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leq M$

[2]Pour la démonstration, la fonction auxiliaire telle que $\phi(a) = \phi(b)$, à laquelle on applique le théorème de Rolle est $\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \ - f(b) \ + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$

Ex.2) La limite du reste quand n tend vers l'infini peut permettre de calculer la limite d'une somme S_n.

1) Ecrire le développement de Mac-Laurin de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x=0$, à l'ordre n en explicitant le reste :

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad \text{où } 0<\theta<1$$

2) En remplaçant x par 1, en déduire une expression de la somme

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \qquad \text{puis } \lim_{n\to\infty} S_n$$

Ex.3)

1) Montrer que, pour $0<x<1$, on a la double inégalité $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$.

2) En déduire la limite quand n tend vers l'infini, de la somme

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+kn} \qquad k = \text{réel fixé}$$

Suggestions : dans la double inégalité trouvée, remplacer x par $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$, ajouter membres à membres.

Exercice 4

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x-1)^2}$

1) Calculer

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \textit{(Concours B1- 23-24 Juin 1993)}$$

2) Calculer

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \qquad \text{puis} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Exercice 5

Calculer le DL de $\sin x$ et de $\sin(\tan x)$ au voisinage de $x=0$ à l'ordre 5. En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) + \sin x - 2x}{x^5}$$

Exercice 6 -(*Extrait de Agro 99 - Epreuve C*)

On considère l'équation : $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

1) Montrer qu'elle admet 3 racines réelles distinctes vérifiant $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

2) Justifier la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, puis en déduire les inégalités : $|x_2| < |x_1| < |x_3| < 2$

Exercice 7 -(*Extrait adapté de Agro 99 - Epreuve A*)

On considère l'ensemble des polynômes B_n de la variable x, de degré inférieur ou égal à n tels que

$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

1) Calculer $B_1(x)$ et $B_2(x)$

2) Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de $B_n(x)$

3) Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $B_n(0) = B_n(1)$

Exercice 8 -

Calculer les DL des expressions $f(x)$ suivantes

$f(x) =$	au voisinage de $x =$	à l'ordre	
$e^{\sin x}$	0	4	
$e^{\cos x}$	0	4	
$e^{\cos[\ln(\cos x)]}$	0	5	
$\ln(\cos x)$	0	6	
$(1+x)^x$	0	4	
$\dfrac{1}{\cos x}$	0	6	
$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$	0	4	
$th\ x$	0	5	
$\sin[\ln(1+x]$	0	4	
$\sqrt{1+\sin x}$	0	4	
$\tan x$	0	5	
$\dfrac{x}{\sin x}$	0	4	
$\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)$	0	4	
$\dfrac{x}{e\cos x}$	0	4	
$\sqrt{x}$	1	3	
$\sqrt{x(\sin x + sh\ x - 2x)}$	0	9	

Exercice 9 - Définition de la convexité sans utiliser f''

Une fonction f est dite convexe sur un intervalle $[a,b]$ si tous les points de son graphe sur cet intervalle se trouvent au dessous de la corde joignant les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$.
Cette définition est particulièrement utile lorsque la dérivée seconde n'existe pas.
Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = |x|$ est convexe sur l'intervalle $[-1, 2]$.

Exercice 10 - Th. de la bijection réciproque

1) Soit la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \Longrightarrow g(x) = \arctan(\ln x)$$

a) Etude complète de la fonction

b) Admet-elle une fonction réciproque g^{-1} ?
Si oui, en donner le domaine de définition et le domaine de valeur , puis tracer son graphe.

2) Donner l'expression explicite de cette fonction réciproque

Exo 1

$\phi(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)$

① $\phi(b) = f(b) - f(a) - A(b-a) = 0 \Rightarrow \underline{A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

② f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc une combinaison linéaire de fonctions continues et dérivables est continue et dérivable

$\phi(x)$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

D'autre part, on a $\phi(a) = \phi(b) = 0$ donc ϕ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b.

③ On en déduit qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ (théorème de Rolle) et qu'il existe aussi $d \in]a,b[$ tel que

$\phi'(d) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b-a}$ (théorème des accroissem^ts finis)

$$\begin{cases} \phi'(x) = f'(x) - A \\ \phi(b) = f(b) - f(a) - A(b-a) \\ \phi(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(d) - A = \frac{f(b)-f(a)-A(b-a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Il existe donc $d \in]a,b[$ qui vérifie ça !

Exo 2

1^er exo →

① * $\left.\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\}$ donc $f(x) = \ln x$ est continue sur $[a,b]$ (ln est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$) et dérivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow$ Il existe donc au moins un $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

* On a $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(c) = \frac{1}{c}$ et $c = \frac{1}{f'(c)} = \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$

puisque $a < c < b \Rightarrow \underline{a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b}$

② a Il existe $c \in [0;x]$, telque $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

avec $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$ et $c^2 = \frac{1}{f'(c)} - 1$

On a $c \geqslant 0$ donc $c^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{f'(c)} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow f'(c) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leqslant 1$

donc $\underline{f(x) \leqslant x}$

$c \leqslant x$ donc $c^2 \leqslant x^2 \Rightarrow \frac{1}{f'(c)} - 1 \leqslant x^2 \Rightarrow f'(c) \geqslant \frac{1}{1+x^2}$

donc $\underline{f(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}}$

donc $\boxed{\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x}$

b. Il existe $c \in [0; x[$, tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $\forall x \in [0; 1[$

$(f(x) = \arcsin x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \Rightarrow c^2 = 1 - \dfrac{1}{f'(c)^2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant c$ | $c < x \ (<1)$

$\Rightarrow 0 \leqslant c^2$ | $c^2 < x^2$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{f'(c)^2} \geqslant 0$ | $1 - \dfrac{1}{f'(c)^2} < x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f'(c)^2} \leqslant 1$ | $f'(c)^2 < \dfrac{1}{1-x^2}$

$\Rightarrow f'(c)^2 \geqslant 1$ | $f'(c) < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(f(0) = 0)$ $\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \geqslant 1$ | $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \geqslant x}$ | $\boxed{f(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

c. $x \geqslant 0$, Il existe $c \in [0; x]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x}$

$f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow c = \dfrac{1}{f'(c)} - 1$

On a $c \geqslant 0$ et $c \leqslant x$

donc $f'(c) \leqslant 1$ | $\Rightarrow f'(c) \geqslant \dfrac{1}{1+x}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \leqslant x}$ | $\Rightarrow \boxed{f(x) \geqslant \dfrac{x}{1+x}}$

d. pour $x > 0$. $f(x) = \ln x$ $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow c = \dfrac{1}{f'(c)}$

Il existe $c \in]x; x+1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{1} = \ln(x+1) - \ln(x)$

avec $x > 0$

$x < c < x+1$

$\dfrac{1}{x+1} < \underbrace{\dfrac{1}{c}}_{f'(c)} < \dfrac{1}{x} \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}}$

e. Pour $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$. $f'(x) = e^x \Rightarrow c = \ln f'(x)$

Il existe $c \in [0; x[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^x - 1}{x}$

$c \geqslant 0$

$\underbrace{e^c}_{f'(c)} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} \geqslant 1$ $\boxed{e^x - 1 \geqslant x}$

f

pour $x,y \in [-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$, Il existe un $c \in [x,y]$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{\tan y-\tan x}{y-x} \qquad (c\in[y,x] \text{ si } y<x)$$

$f'(x)=1+\tan^2 x \qquad (f(x)=\tan x)$

Puisque $c\in[x,y]$, alors $c\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$

$$-\frac{\pi}{4}\leq c\leq\frac{\pi}{4}$$

$$-1\leq \tan c\leq 1$$

$$1\leq 1+\tan^2 c\leq 2$$

$$(0\leq \tan^2 c\leq 1)$$

⚠

$$1\leq\frac{\tan y-\tan x}{y-x}\leq 2$$

$$\boxed{|y-x|\leq|\tan y-\tan x|\leq 2|y-x|}$$

$f(i)=i^{\alpha}$ avec $i\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in]0;1[$

$f'(i)=\alpha i^{(\alpha-1)}$

Il existe $c\in[i;i+1]$ tel que $f'(c)=\frac{f(i+1)-f(i)}{1}=(i+1)^{\alpha}-i^{\alpha}$

$f'(c)=\alpha c^{\alpha-1}$

$$i\leq c\leq i+1$$

$$\alpha i\leq \alpha c\leq\alpha(i+1)$$

$$\alpha i^{\alpha-1}\geq \alpha c^{\alpha-1}\geq\alpha(i+1)^{\alpha-1}$$

(car $\alpha-1<0$)

$$\frac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}}\leq f'(c)\leq\frac{\alpha}{i^{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}}\leq(i+1)^{\alpha}-i^{\alpha}\leq\frac{\alpha}{i^{1-\alpha}}$$

pour $i=1$: $\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}\leq 2^{\alpha}-1\leq\frac{\alpha}{1^{1-\alpha}}$

pour $i=2$: $\frac{\alpha}{3^{1-\alpha}}\leq 3^{\alpha}-2^{\alpha}\leq\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}$

pour $i=3$: $\frac{\alpha}{4^{1-\alpha}}<4^{\alpha}-3^{\alpha}\leq\frac{\alpha}{3^{1-\alpha}}$

$+$ $\quad \frac{\alpha}{3^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}\leq 3^{\alpha}-1\leq\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}+\alpha$

$+$ $\quad \frac{\alpha}{4^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{3^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}\leq 4^{\alpha}-1\leq\frac{\alpha}{3^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}+\alpha$

de façon générale : $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}}\leq(n+1)^{\alpha}-1\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{i^{1-\alpha}}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^{1-\alpha}}\leq\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{1-\alpha}}$$

On a $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i^{1-\alpha}}-1\leq\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$ $\qquad \frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\leq S_n$

$$\Rightarrow S_{n+1}-1\leq\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$$

$$S_n-1+\frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}\leq\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow S_n\leq\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1-\frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}$$

$$\frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha} \leqslant S_n \leqslant \frac{(n+1)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha} \underbrace{+1-\frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}}_{\text{negligeable quand } n \to +\infty}$$

Quand $n \to +\infty$, S_n se comporte comme $\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha}$

2^e exo →

a) soit $f(x)=\sin x$

$f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\cos x \Rightarrow$ la derivée est bornée : $|f'(x)| \leqslant 1$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$\forall x$ et $y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$ avec dans notre cas $M=1$

$\Rightarrow \boxed{|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|}$

b) De la même façon, si $y=0$, on $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$

c) soit $f(x)=\text{Arctan}\, x$. $f(x)$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x$ et $y \in \mathbb{R}$, $m(x-y) \leqslant f(x)-f(y) \leqslant M(x-y)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $f'(x)$ est majorée par 1 et minorée par 0

$0 < f'(x) \leqslant 1$

si $y=x+1$ alors $f'(x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$

$\hookrightarrow 0 < f(x+1)-f(x) \leqslant 1$

$\boxed{0 \leqslant \text{Arctan}(x+1)-\text{Arctan}\, x \leqslant 1}$

$\boxed{\text{Exo 3}}$

Ex 1 -

- D'après l'exo 1, le d.l de $\sin x$ est : $DL = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$

avec $R_3(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ pour $n = 3$

$R_3(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\theta x)$ avec $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$

$R_3(x) = \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)$

Lorsque $x \geqslant 0$, $\theta x \geqslant 0$ $(\theta \in]0;1[)$ donc $R_3(x) \geqslant 0$

$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$ avec $R_3(x) \geqslant 0$

donc $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$

- $\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ $\quad f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\sin x$ $\quad f''(x) = -\cos x$ $\quad f'''(x) = \sin x$

$R_2(x) = \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(\theta x)$

$R_2(x) = \frac{x^3}{3!} \sin \theta x$

si $\theta x < 0$ alors $\begin{cases} \sin \theta x < 0 \\ x < 0 \end{cases}$ $R_2(x) > 0$

si $\theta x > 0$ alors $\begin{cases} \sin \theta x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $R_2(x) > 0$

$\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$

- $\tan x \simeq x + \frac{x^3}{3(!)} + R_3(x)$ $\quad f(x) = \tan x$ $\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x$ $\quad f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$

$f''(x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$

$f'''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$

$f'''(x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$

$f^{(4)}(x) = 16\tan x(1 + \tan^2 x) + 24\tan^3 x(1 + \tan^2 x)$

$f^{(4)}(x) = 16\tan x + 40\tan^3 x + 24\tan^5 x$

$R_3(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\theta x)$

avec θx et $x \geqslant 0$

si $x \geqslant 0$, $\tan(x) \geqslant 0$ donc $f^{(4)}(x) \geqslant 0$

$\Rightarrow R_3(x) \geqslant 0$ donc $\tan x \geqslant x + \frac{x^3}{3(!)}$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ $\quad f^{(3)}(\theta x) = \frac{2}{(1+\theta x)^3}$

$\ln(1+x) = x + R_1(x)$ $\quad f^{(2)}(\theta x) = -\frac{1}{(1+\theta x)^2}$

$$\left.\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{x^3}{3!} \frac{2}{(1+\theta x)^3} \\ R_1(x) &= \frac{x^2}{2!} \frac{-1}{(1+\theta x)^2} \end{aligned}\right\} \text{ si } x \geqslant 0,\ \theta x \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} R_2(x) \geqslant 0 \\ R_1(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 \leqslant 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leqslant x \\ R_2 \geqslant 0 \Rightarrow \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

- A un ordre encore supérieur :

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad R_3(x) = \frac{x^4}{4!}\left(\frac{-6}{(1+\theta x)^4}\right)$ si $x \geq 0$, $\begin{cases} \theta x \geq 0 \\ R_3(x) \leq 0 \end{cases}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- $f(x) = \ln(1+\cos x)$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{1+\cos x}$

$$f''(x) = \frac{-\cos x(1+\cos x) + \sin x(-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{-\cos x - \cos^2 x - \sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{\left[\sin x + 2\cos x \sin x - (+\cos^2 x \mp \sin^2 x)\right]\left[(1+\cos x)^{\cancel{2}}\right] + (\cos x + \cos^2 x + \sin x \cos x) \times 2\cancel{(1+\cos x)}(-\sin x)}{(1+\cos x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f'''(x) = \frac{\sin x + \sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x - \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^3}$$

si $|x| < \pi$, $\theta x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \underbrace{\frac{x \sin x}{1+\cos x}}_{=0} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{\overbrace{-\cos x - \cos^2 x - \underbrace{\sin x \cos x}_{=0}}^{-2}}{\underbrace{(1+\cos x)^2}_{=2}}\right) + R_2(x)$$

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + R_2(x) \quad \text{avec } R_2(x) = \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(x)$$

$$\ln(1+\cos x) - \ln 2 = -\frac{x^2}{4} + R_2(x)$$

$R_2(x) > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\ln(1+\cos x) - \ln 2 < -\frac{x^2}{4}}$

Ex-2 1) $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$

$f^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$ en $x = 0$ $\quad \boxed{f^{(n)} = (n-1)!(-1)^{n-1}}$

$$\ln(1+x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + x + \sum_{i=2}^{n} \frac{x^n}{(1+0)^n}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^n}{(1+0)^n}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

2) pour $x = 1$, on obtient

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} + \underbrace{f(0)}_{=0}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^n(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln 2 - \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}}_{\to 0} = \ln 2$$

ex - 3

1) $\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$

$$\ln(1+x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{x - \frac{x^2}{2}}_{<x} + \frac{x^3}{3}}_{<0 \text{ si } x<1} - \frac{x^4}{4}}_{<0} + \cdots$$

Quelque soit le rang, $\ln(1-x) < x$ si $x<1$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$

$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$ donc $-\ln(1-x) > x$

$$\boxed{\ln(1-x) < x < -\ln(1-x)}$$

2) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) < \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} < -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{n+2} < -\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) < \frac{1}{n+2} < \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

etc... On somme les termes...

$$\ln\left(\frac{n+kn}{n}\right) < S_n < \ln\left(\frac{n+kn-1}{n-1}\right)$$

$$\ln(1+k) < S_n < \ln\left(\frac{1+k-1/n}{1-1/n}\right)$$

quand $n \to +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+k) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1+k-1/n}{1-1/n}\right) = \ln(1+k)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(1+k)}$$

Exo 4

$$f = \frac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2}$$

1) en $x \to 0$: on approxime sin et cos par leur développem^t limité :

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x) \end{cases}$$

$$1 - x\sin x - \cos x \simeq 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

$$1 - x\sin x - \cos x \simeq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$f(x) \simeq \frac{-x^2}{2(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2(e^x - 1)^2} = -\infty}$$ (théorème des valeurs comparées)

2) On a par définition $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow -x \leq x\sin x \leq x$
$\Rightarrow -x \leq -x\sin x \leq x$

$\Rightarrow -x - 1 \leq -x\sin x - \cos x \leq x + 1$

$\Rightarrow -x \leq 1 - x\sin x \cos x \leq x + 2$

On obtient $-\frac{x}{(e^x-1)^2} \leq f(x) \leq \frac{x+2}{(e^x - 1)^2}$

Quand x tend vers l'infini, $\begin{cases} e^x - 1 \to e^x \\ x + 2 \to x \end{cases}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{2x}} \leq \lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}}$

par le théorème des gendarmes et par le théorème des valeurs comparées, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{2x}} = 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

en $-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) \sim \lim_{x\to-\infty} (1 - x\sin x - \cos x)$

forme indéterminée $\Rightarrow$ ($1 - x\sin x - \cos x$ est périodique)

Exo 5

- $f(x) = \sin x$
  $f'(x) = \cos x$
  $f''(x) = -\sin x$
  $f^{(3)}(x) = -\cos x$
  $f^{(4)}(x) = \sin x$
  $f^{(5)}(x) = \cos x$

$g(0) = 0 \quad g''(0) = 0$
$g'(0) = 1 \quad g'''(0) = 1$

$g(x) = \sin(\tan x)$

$g'(x) = \cos(\tan x) \times \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$g''(x) = \dfrac{-\sin(\tan x)\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \cos(\tan x) 2\cos x \sin x}{\cos^4 x}$

$g''(x) = \dfrac{-\sin(\tan x) + 2\cos(\tan x)\cos x \sin x}{\cos^4 x}$

$g^{(3)}(x) = \Big[-\cos(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\sin(\tan x) \times \dfrac{\cos x \sin x}{\cos^2 x}$
$- 2\cos(\tan x)\sin^2 x + 2\cos(\tan x)\cos^2 x \Big]$
$\times \cos^4 x - (\sin(\tan x) + 2\cos(\tan x)\cos x \sin x)$
$\times 4\cos^3 x(-\sin x)$
$\overline{\qquad \cos^8 x \qquad}$

DL $\Rightarrow$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_5(x)$
en 0

$$g^{(3)}(x) = \frac{\cancel{\cos^2(x)}\left(-\cos(\tan x) - 2\sin(\tan x)\cos x \sin x - 2\cos(\cancel{\tan x})\cancel{\sin^2 x}\cos^2 x + \frac{2\cos(\tan x)}{\cos^4 x}\right) + \left(\sin(\cancel{\tan x}) + 2\cos(\cancel{\tan x})\cos x \sin x\right)4\cos^{\cancel{3}} x \sin x}{\cos^6(x)}$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{-\cos(\tan x) + 2\sin(\tan x)\cos x \sin x + 2\cos(\tan x)\cos^4 x}{\cos^6(x)}$$

... bref $\begin{cases} g^{(4)}(0) = 0 \\ g^{(5)}(0) = 1 \end{cases}$

D.L : $\sin(\tan x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_5(x)$
en 0

$$h(x) = \frac{\sin(\tan x) + \sin x - 2x}{x^5} \underset{\text{en } x=0}{\sim} \frac{\cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \cancel{2x}}{\cancel{x^5}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) \simeq \lim_{x\to 0} \frac{2}{5!} = \frac{2}{5!}}$$

$\boxed{\text{Exo } 6}$ $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

① $f(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(-2) = -7$
$f(-1) = 1$ } $f(x) = 0$ admet une solution x_1 entre -2 et -1
$f(0) = 1$ } $f(x) = 0$ admet une solution x_2 entre 0 et 1
$f(1) = -1$ } $f(x) = 0$ admet une solution x_3 entre 1 et 2
$f(2) = 1$

② $f(x)$ peut être écrite $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \left(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2\right)(x - x_3)$$

$$f(x) = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x\left(x_3(x_1 + x_2) + x_1 x_2\right) - x_1 x_2 x_3$$

En identifiant membres à membres :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -2 \quad (1) \\ x_1 x_2 x_3 = -1 \end{cases}$$

On a $-2 < x_1 < -1$ donc $1 < -x_1 < 2 \Rightarrow 1 < |x_1| < 2$

de même $0 < x_2 < 1 \Rightarrow 0 < |x_2| < 1$

On a donc bien $\begin{cases} |x_2| < |x_1| < 2 \\ |x_3| < 2 \end{cases}$

Entre $|x_1|$ et $|x_3|$: on a $x_1 x_2 x_3 = -1$ donc $|x_1||x_2||x_3| = 1$

$$|x_2| = \frac{1}{|x_1||x_3|} \quad \left(\text{ou} \quad x_2 = \frac{-1}{x_1 x_3}\right)$$

on injecte dans (1) : $x_3\left(x_1 - \frac{1}{x_1 x_3}\right) + \frac{-1}{x_3} = -2$

$$\Rightarrow x_1 x_3 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3} = -2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3} = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

puisque $x_1 < 0$ et x_2 et $x_3 > 0$

$$\begin{cases} -\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \frac{1}{|x_3|} = 2 \\ -|x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \end{cases} \Rightarrow |x_3| - |x_1| = 1 - |x_2| \text{ or } |x_2| < 1 \text{ donc}$$

$|x_3| - |x_1| > 0 \qquad |x_3| > |x_1|$

$$\Rightarrow \boxed{|x_2| < |x_1| < |x_3| < 2}$$

$\boxed{\text{Exo 7}}$

$$\begin{cases} B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \end{cases}$$

① $B_1(x)$: $\quad B_1(x+1) - B_1(x) = x^0 = 1$

$$\begin{cases} B_1(x) = ax+b \\ B_1(x+1) = a(x+1)+b \end{cases} \Rightarrow ax+a+b-ax-b = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\int_0^1 B_1(x)dx = \int_0^1 (x+b)dx = \left[\frac{x^2}{2}+bx\right]_0^1 = \frac{1}{2}+b = 0 \qquad \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{B_1(x) = x - 1/2}$$

$$\begin{cases} B_2(x) = ax^2+bx+c \\ B_2(x+1) = a(x^2+2x+1) + b(x+1)+c \end{cases}$$

$$\cancel{+ax^2} + 2ax + \cancel{bx} + a + b + \cancel{c} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c} = 2x$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 B_2(x)dx = \int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = 0$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+c = 0 \qquad c = \frac{1}{6} \qquad \boxed{B_2(x) = x^2 - x + 1/6}$$

② Pour chaque cas : le coef a est donné par le terme x^{n-1} après développem^t de $B_n(x+1)$ et vaut donc $\frac{n}{n} = 1$

$a(x+1)^n \to ax^n + \underbrace{an}\,x^{n-1} + \dots$

Ce terme ~~vaut~~ est identifiable au nx^{n-1} de l'autre côté du signe = donc $\boxed{a=1}$

Le degré est $n \Rightarrow$ $\underline{B_n(x) = x^n + \dots}$

③ pour $n \geq 2$: $\quad B_n(x+1) = nx^{n-1} + B_n(x)$

pour $x=0$, on a donc $B_n(1) = 0 + B_n(0)$

$$\boxed{B_n(1) = B_n(0)}$$

Feuille 2 : Réponses aux DL de l'exercice 8

$f(x) =$	au voisinage de $x =$	à l'ordre	
$e^{\sin x}$	0	4	$1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+R_4(x)$
$e^{\cos x}$	0	4	$e\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4\right)+R_4(x)$
$e^{\cos[\ln(\cos x)]}$	0	5	$e\left(1-\frac{1}{8}x^4\right)+R_5(x)$
$\ln(\cos x)$	0	6	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+R_6(x)$
$(1+x)^x$	0	4	$1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4+R_4(x)$
$\frac{1}{\cos x}$	0	6	$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+R_6(x)$
$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	0	4	$x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+R_4(x)$
$th\ x$	0	5	$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+R_5(x)$
$\sin[\ln(1+x)]$	0	4	$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+R_4(x)$
$\sqrt{1+\sin x}$	0	4	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+R_4(x)$
$\tan x$	0	5	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+R_5(x)$
$\frac{x}{\sin x}$	0	4	$1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+R_4(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)$	0	4	$1-\frac{\pi^2}{32}x^4+R_4(x)$
$e^{x}/\cos x$	0	4	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+R_4(x)$
$\sqrt{x}$	1	3	$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+R_3(x-1)$
$\sqrt{x(\sin x+sh\ x-2x)}$	0	9	$\sqrt{\frac{2}{5!}}\lvert x\rvert^3\left(1+\frac{1}{2.6.7.8.9}x^4\right)+R_9(x)$

Remarques :
Les propriétés de parité d'une fonction se retrouvent dans son DL au voisinage de 0.
Quand l'indice du reste est supérieur au degré de la partie régulière du DL, c'est que les termes apparemment manquants sont en fait nuls.

Exo 9

$f(x) = |x|$

sur $[-1;2]$, la corde entre les extrémités peut s'écrire $y = ax+b$

avec $\begin{cases} 1 = -a+b & (f(-1)=1) \\ 2 = a2+b & (f(2)=2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 4/3 \end{cases}$ $\boxed{y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}}$

f est convexe si ts les points de f sont en dessous de la corde $\left(y = \frac{1}{3}(x+4)\right)$

c'est à dire si $y - f(x) > 0 \Rightarrow y - f(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} - |x|$

$\begin{cases} \text{qd } x<0 & y-f(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} + x = \frac{4}{3}(x+1) \\ \text{qd } x>0 & y-f(x) = \frac{2}{3}(-x+2) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x+1 \leq +1 \\ 0 \leq y-f(x) \leq \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \text{toujours positif ou nul} \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq -x \leq 0 \\ 0 \leq -x+2 \leq 2 \\ 0 \leq y-f(x) \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$ toujours positif ou nul

$y - f(x) \geq 0$
$\forall x \in [-1;2]$
donc f est convexe

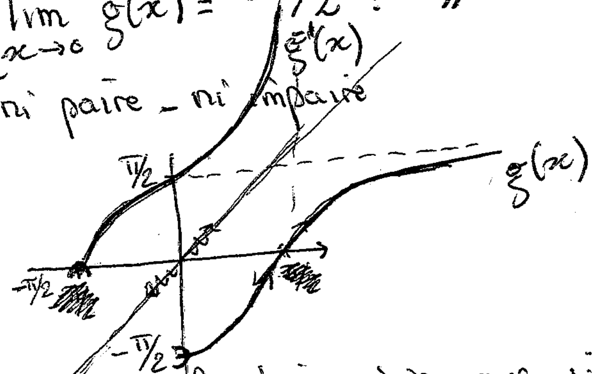
Exo 10

$g(x) = \arctan(\ln x)$

(1) a- $\mathcal{D}f =]0;+\infty[$

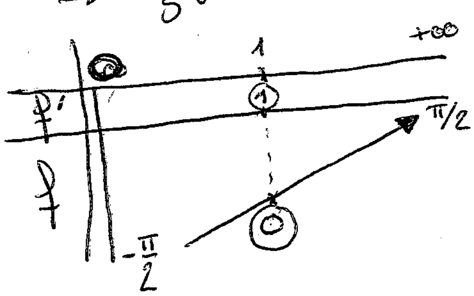
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \pi/2 & \text{: asymptote horizontale} \\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\pi/2 & \text{: "} \end{cases}$

ni paire – ni impaire



$g'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x}$

$g'(x)$ est du signe de x
$\Rightarrow g'(x) > 0$



b- g admet une fonction réciproque si $g \circ g^{-1} = Id$ et si g^{-1} existe (c'est à dire si g est bijective). Sur $\mathcal{D}f$, $g(x)$ est continue et monotone donc elle est bijective sur $\mathcal{D}f$ et admet donc une réciproque g^{-1}

$\mathcal{D}f(g^{-1}) = \mathcal{I}m(g)$
$\mathcal{D}f(g) = \mathcal{I}m(g^{-1})$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{D}f(g^{-1}) =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ \mathcal{D}val(g^{-1}) =]0;+\infty[\end{cases}$

Le graphe est symétrique / à la 1ère bissectrice $(y=x)$

(2) $y = \arctan(\ln x)$
$\tan y = \ln x$
$x = e^{\tan y}$

$\boxed{g^{-1}(x) = e^{\tan x}}$