Convergence de suites

Exercice 1

Les suites dont on donne ci-dessous le terme général sont-elles convergentes ?

a) $\dfrac{\cos n + 3n}{\ln n + 2n}$ b) $\sqrt{4n^2+5n+6} - 2n$ c) $\dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$ d) $\dfrac{\sin n}{e^n}$ e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$ f) $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

g) $\dfrac{\sin n}{n}$ h) $2^n - (-1)^n n^2$

Exercice 2

1) Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2) On considère la suite de terme général $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

i) Montrer que (s_n) est croissante.
ii) Montrer que pour $\forall\, n \geq 2$, $s_n \leq 1 + u_{n-1}$, et en déduire que (s_n) est majorée.
iii) Que dire de la convergence de (s_n) ?

Suites récurrentes

I. POSITION DU PROBLEME

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que l'intervalle I est stable par f, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$. Dans les exemples simples, f sera une fonction continue sur I. On se donne un élément $u_0 \in I$, et l'on veut étudier la suite (u_n) définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'hypothèse de stabilité de l'intervalle I par f est essentielle, car sinon la suite (u_n) ne serait pas définie. Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent donc à l'intervalle I.

Etudier une suite, c'est savoir si elle est divergente ou convergente, et dans ce cas étudier sa limite. Un moyen d'étude consiste à analyser le sens de variation de la suite (u_n) et à chercher si elle est majorée ou minorée. Nous savons en effet que toute suite croissante et majorée est convergente, et que toute suite décroissance minorée est convergente également.

II. LES TROIS CAS DE FIGURE

Dans ce qui suit, nous allons nous poser trois questions :

– Comment montrer qu'une suite récurrente est majorée ou minorée ?
– Comment montrer qu'une suite récurrente est monotone ?
– Que peut-on dire de la limite éventuelle d'une suite récurrente ?

A. Comment montrer qu'une suite récurrente est majorée ou minorée ?

Supposons pour simplifier les idées que f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc $I = \mathbb{R}$). Si nous voulons montrer que la suite (u_n) est majorée, nous devons montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$. Pour cela, il suffit que $f(]-\infty, M]) \subset]-\infty, M]$, et l'on peut alors montrer par récurrence sur n que $u_n \leq M$. La condition $f(]-\infty, M]) \subset]-\infty, M]$ signifie que l'intervalle $]-\infty, M]$ est stable par f. Si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier mais sur un intervalle I strictement contenu dans $\mathbb{R}$, il faut alors remplacer $]-\infty, M]$ par $]-\infty, M] \cap I$.

Si de même nous voulons montrer que la suite (u_n) est minorée, nous devons montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, $u_n \geq N$. Pour cela, il suffit que $f([N, \infty[) \subset [N, \infty[$, et l'on peut alors montrer par récurrence sur n que $u_n \geq N$. La condition $f([N, \infty[) \subset [N, \infty[$ signifie que l'intervalle $[N, \infty[$ est stable par f. Si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier mais sur un intervalle I strictement contenu dans $\mathbb{R}$, il faut alors remplacer $[N, \infty[$ par $[N, \infty[\cap I$.

B. Comment montrer qu'une suite récurrente est monotone ?

1. Directement

Considérons la suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout entier naturel n. On a alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$, et donc cette suite est croissante !

2. En utilisant la proposition suivante

Proposition 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intervalle I est stable par f. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si la fonction f est strictement croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.

Si $u_1 - u_0 > 0$, elle est strictement croissante. Si $u_1 - u_0 < 0$, elle est strictement décroissante. Enfin, si $u_1 = u_0$, elle est constante égale à u_0.

Preuve 1. *Si f est strictement croissante, et si $u_0 < u_1$, vérifions par récurrence sur n que pour tout n entier naturel nous avons $u_n < u_{n+1}$. La propriété est vraie au rang 0. Supposons qu'elle est également vraie au rang n. On a donc $u_n < u_{n+1}$. La stricte croissance de f implique alors $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_{n+2}$, de sorte que la propriété est vraie au rang $n + 1$.*

Attention, si f est strictement décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone. En effet, si la suite (u_n) était par exemple strictement croissante, on aurait pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. La stricte décroissance de f impliquerait alors $f(u_n) > f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_{n+2}$, ce qui est absurde. On pourrait vérifier de même que (u_n) ne peut pas être décroissante. On dispose néanmoins le résultat suivant.

Proposition 2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intervalle I est stable par f. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si la fonction f est strictement décroissante sur I, alors les deux suite (v_n) et (w_n) définies respectivement par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones.

Si $u_2 - u_0 > 0$, la suite (v_n) est strictement croissante. Si $u_2 - u_0 < 0$, elle est strictement décroissante. Enfin, si $u_2 = u_0$, elle est constante égale à u_0.

Si $u_3 - u_1 > 0$, la suite (w_n) est strictement croissante. Si $u_3 - u_1 < 0$, elle est strictement décroissante. Enfin, si $u_3 = u_1$, elle est constante égale à u_1.

De plus si la suite (v_n) est croissante, alors la suite (w_n) est décroissante, et de même, si la suite (v_n) est décroissante, alors la suite (w_n) est croissante.

C. Que peut-on dire de la limite éventuelle d'une suite récurrente ?

Dans ce paragraphe, il est capital de préciser que l'intervalle I sur lequel f est définie est fermé ! Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 3. *Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intervalle I est stable par f. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Dans ces conditions, si la suite (u_n) converge vers L, alors on a $L = f(L)$. On dit que L est un point fixe de f.

Preuve 2. *On a par definition $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, $u_n \in I$ par réccurence sur n, et $L \in I$ puisque I est fermé. La fonction f étant continue sur I, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$. D'autre part, u_{n+1} tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$. Par unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc $L = f(L)$.*

III. SYNTHESE

Lors de l'étude de suites récurrentes, il est intéressant de déterminer,

- les points fixes de f s'ils existent,
- les intervalles stables bornés à droite (comme par exemple $]-\infty, M]$) ou à gauche (comme par exemple $[N, \infty[$),
- les intervalles stables par f sur lesquels f est strictement croissante ou strictement décroissante (mais c'est plus compliqué dans ce dernier cas).

Le moyen le plus simple pour y parvenir est d'étudier la fonction f et le tableau de ses variations. Si la fonction est décroissante, on pourra s'aider de sa courbe représentative.

IV. EXERCICES

Exercice 1

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$.

Exercice 2

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n^3 + 1)$.

Exercice 3

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} =$

$pu_n^2 + q$, où p et q sont deux réels appartenants à l'intervalle $]0,1[$ et vérifiant $p+q=1$.

Exercice 4

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in]0,1[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

Devoir maison : suites

I. Suites arithmétiques : $u_n = u_0 + nr$

Exercice 1
Parmi les suites suivantes, déterminer celles qui sont arithmétiques :
a) $u_n = -2n + 5$
b) $u_n = n^3 - 3n^2 + 2$
c) $u_n = (n+1)^2 - n^2$
d) $u_n = 7 + 2n$
e) $u_{n+1} = u_n + n - 1$ et $u_0 = 3$

Exercice 2
Montrer que la somme S_n des termes d'une suite arithmétique de $i = 0$ à $i = n$ est donnée par

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

Exercice 3
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$. On sait que $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 253$. Calculer u_{20}.

II. Suites géométriques : $u_n = u_0 q^n$

Exercice 1
Representer graphiquement les suites géométriques dont le premier terme u_0 et la raison q sont :
a) $u_0 = 1/2$ et $q = 2$
b) $u_0 = 1/2$ et $q = -2$
c) $u_0 = 8$ et $q = 1/2$
c) $u_0 = 8$ et $q = -1/2$

Exercice 2
Soit (u_i) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
1) Calculer

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_0 q^i$$

pour $q \neq 1$ puis pour $q = 1$.
2) Que dire de $\lim_{n \to \infty} S_n$?

III. Convergence d'une suite

Dans cet exercice, nous allons revoir différents résultats liés à l'étude de la convergence de suites :

- une suite non bornée n'est jamais convergente (a),
- une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (c),
- la limite d'une suite est apparentée à la limite d'une fonction,
- une suite à termes positifs est croissante si et seulement si $\forall\, n,\ u_{n+1}/u_n \geq 1$ (b),

– une suite croissante et majorée converge (b),
– une suite absolument convergente n'est pas néecessairement convergente (c),
– une suite absolument convergente vers 0 converge vers 0 grâce au théorème d'encadrement (d).

Pour voir cela sur des exemples simples, on peut étudier la convergence des suites suivantes :
a) $u_n = n$
b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
c) $u_n = (-1)^{n+1}$
d) $\left\{\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{25}, \dfrac{5}{125}, -\dfrac{6}{625}, \dfrac{7}{3125}, \dots\right\}$

IV. Suites adjacentes

Exercice 1
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{2^2 3^2} + \frac{1}{3^2 4^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2 n^2}, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{3n^3}, \qquad \forall\, n \geq 2.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes.

Exercice 2
Même question avec les suites

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

V. Suites récurrentes

Nous allons essayer de faire ensemble, de manière guidée, le premier exercice de la page 3. Pour cela, il suffit de suivre rigoureusement les indications du cours.

Exercice 1
On demande d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$. Cette relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, et la fonction en question est $f(x) = -x^2 + x$.

1) Etudions la fonction f. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2x + 1.$$

On en déduit que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$, et $f(1/2) = 1/4$. Finalement, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Ceci nous permet de tracer le tableau des variations de f. Super.

2) Maintenant, étudions les points fixes éventuels de f. Nous savons en effet que si la suite

(u_n) converge, ce cera obligatoirement vers un point fixe de f. Les points fixes sont les valeurs L telles que $f(L) = L \Leftrightarrow L = -L^2 + L$. Cette équation n'admet qu'une seule solution, qui est $L = 0$.

3) Revenons à notre suite. Quel est son sens de variation ? Très simplement, on trouve que

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0,$$

ce qui nous montre que (u_n) est décroissante. Nous savons donc à présent que la suite (u_n) est décroissante. Il peut lui arriver deux choses : soit elle converge, et ce sera nécessairement vers 0 ; ou alors elle diverge. A votre avis comment cela va se décider ? Selon la valeur de u_0 bien sur ! En effet, nous n'avons toujours rien dit sur le premier terme de la suite. Nous devons distinguer quatre cas.

i) Si $u_0 \in]-\infty, 0[$, comme $]-\infty, 0[$ est un intervalle stable par f, c'est-à-dire $f(]-\infty, 0[) \subset]-\infty, 0[$, on peut montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty, 0[$. Mais comme (u_n) est décroissante, cela implique que (u_n) diverge vers $-\infty$.

ii) Si $u_0 = 0$, alors la suite (u_n) est constante, égale à 0. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

iii) Si $u_0 \in]0, 1/2]$, comme $f(]0, 1/2]) =]0, 1/4] \subset]0, 1/2]$ d'après le tableau des variations de f, on peut montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1/2]$. Cela prouve que (u_n) est minorée (par 0). Mais comme (u_n) est également décroissante, alors (u_n) converge ! Comme la suite ne peut que converger vers un point fixe de f, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

iv) Si $u_0 \in]1/2, +\infty[$, cela devient un peu plus compliqué. En effet, l'intervalle $]1/2, +\infty[$ n'est pas stable par f, car on a $f(]1/2, +\infty[) =]-\infty, 1/4[$. Cependant, comme on sait que $f(u_0) = u_1$, on a $u_1 \in]-\infty, 1/4[$, ce qui nous ramnène donc aux cas i) ou iii), à partir du terme u_1. On peut donc poser la question suivante : pour quelles valeurs de $u_0 \in]1/2, +\infty[$ a-t-on $u_1 \in]-\infty, 0[$ ou $u_1 \in]0, 1/4[$? C'est facile, écrivons $u_1 < 0$:

$$u_1 < 0 \Leftrightarrow f(u_0) < 0 \Leftrightarrow -u_0^2 + u_0 < 0 \Leftrightarrow u_0(1 - u_0) < 0 \Leftrightarrow u_0 > 1.$$

Donc si $u_0 > 1$, on aura $u_1 < 0$, et l'on se retrouve dans le cas i), c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. Si en revanche on a $u_0 \in]1/2, 1]$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

VI. Suites récurrentes (encore)

La méthode que nous venons de voir dans la partie V est une méthode générale qui permet d'étudier n'importe quelle suite récurrente d'ordre 1, en distinguant selon les différentes valeurs de u_0 comme nous l'avons fait. Cependant, il arrive dans certains exercices que la méthode utilisée soit différente (par exemple si la fonction f est trop compliquée). On va alors vous guider en plusieurs étapes. C'est le cas des excercices suivants.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$ et le premier terme

$u_0 = \dfrac{1}{4}$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3, etc. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 1$, alors $u_n = 1$. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2 + u_n}{1 - u_n}$ est une suite géométrique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 7u_n}$ et le premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3, etc. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2 - u_n}{u_n}$ est une suite arithmétique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) est-elle convergente ?