Corrigé de Feuille 4 : Intégration (2)

Exercice 1

$$I_1 = \int_0^1 \ln x \, dx = \Big[x \ln x - x \Big]_0^1 = -1$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \Big[-\frac{e^{-\alpha x}}{a} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \Big[-\ln(\cos x) \Big]_0^{\pi/2} = \text{diverge}$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \Big[-\frac{\ln x + 1}{x} \Big]_1^{+\infty} = 1$$

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx = \Big[\frac{\ln^2 x}{2} \Big]_1^{+\infty} = \text{diverge}$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x \Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \Big[\frac{1}{2} \ln \frac{-x-1}{x-1} \Big]_0^1 = \text{diverge}$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx = \Big[\frac{x \ln x}{x+1} - \ln(1+x) \Big]_0^1 = -\ln 2$$

$$I_9 = \int_0^3 \frac{dx}{1-x} = \Big[-\ln(1-x) \Big]_0^3 = \text{diverge}$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx = \int_{-\infty}^0 e^x \, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = \Big[e^x \Big]_{-\infty}^0 + \Big[-e^{-x} \Big]_0^{+\infty} = 2$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{-x+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \Big[-\ln(-x+1) \Big]_{-\infty}^0 + \Big[\ln(x+1) \Big]_0^{+\infty} = \text{diverge}$$

$$I_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{-\infty}^{+\infty} = \text{diverge}$$

Exercice 2

Il suffit d'intégrer les expressions et d'étudier les limites aux bornes d'intégration en fonction des paramètres a, b et α.

Exercice 3

I_1 converge, I_2 diverge, I_3 converge, I_4 converge, I_5 converge, I_6 diverge, I_7 converge, I_8 converge, I_9 converge.

Exercice 4

I_1 diverge, I_2 diverge, I_3 converge, I_4 diverge, I_5 converge, I_6 diverge.

Exercice 5

I_1 converge, I_2 converge, I_3 converge, I_4 converge.

Exercice 6

I_1 converge, I_2 converge.

Corrigé de Feuille 5 : Equations différentielles ordinaires (EDO)

Exercice A

1) $y(x) = ae^{\arctan x} + 1$

2) $y(x) = \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{2}{9}x(3\ln x + 2)$

3) $y(x) = ae^{3x^2} - \dfrac{1}{2}$

4) $y(x) = \dfrac{a}{\cos x} + \tan x$

5) $y(x) = ax + \dfrac{x^3}{2}$

6) $y(x) = ae^{1/x} + xe^{1/x}$

7) $y(x) = ax^3e^{1/x^2} + \dfrac{x^3}{2}$

8) $y(x) = ax + \dfrac{1}{2}x(x(x+3) - 2)$

9) $y(x) = \dfrac{1}{\sin x}(a - 2e^{\cos x})$

10) $y(x) = \dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{1}{2}e^x(\tan x + 1)$

11) $y(x) = ae^{1/x} - \dfrac{x+1}{x}$

12) $y(x) = \dfrac{a}{x^2+1} + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

13) $y(x) = ax^2e^{1/x} + x^2$

14) $y(x) = axe^{2x} + xe^x$

15) $y(x) = \dfrac{a}{(x^2-1)^{3/2}} - \dfrac{x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$

Exercice B

1a) $y(x) = a - \dfrac{1}{3}be^{-3x}$

1b) $y(x) = ae^{-3x} + be^x$

1c) $y(x) = ae^{-2x}\sin(3x) + be^{-2x}\cos(3x)$

1d) $y(x) = ae^{2x} + bxe^{2x}$

1e) $y(x) = a\sin(3x) + b\cos(3x)$

TD équations différentielles

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan x = -\cos^2 x$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$, et, si cela est possible, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $|x|y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$, et, si cela est possible, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1.a. Calculer, pour $x < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{dt}{2(1-t)\sqrt{-t}}$ en effectuant le changement de variable défini par $u = \sqrt{-t}$.
1.b. Calculer, pour $0 < x < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{dt}{2(1-t)\sqrt{t}}$ en effectuant le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$.
2.a. Montrer que lorsque $u \to 0$, on a $\arctan u \sim u$.
2.b. Montrer que lorsque $u \to 0$, on a $\tan u = u + \frac{u^3}{3} + u^3 o(1)$.
2.c. En déduire que lorsque $u \to 0$, on a $\arctan u - u \sim -\frac{u^3}{3}$.
3. Résoudre $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$, et $]1,+\infty[$.
4. Montrer qu'il existe une unique fonction f continue sur $]-\infty, 1[$ qui soit solution de l'équation différentielle de la question précédente pour $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$. Pour cela on posera $u = e^x$.

Exercice 5

1. Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{4-x}{x}}$ sur l'intervalle $]0,4[$. On pourra poser $t = \sqrt{\frac{x}{4}}$.
2.a. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(4x-x^2)y' - (x+2)y = x$ sur l'intervalle $]0,4[$.
2.b. Parmis les solutions de $(4x-x^2)y' - (x+2)y = x$ sur l'intervalle $]0,4[$, montrer qu'il en existe une seule telle que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x}$ existe et soit finie.

Exercice 6

Résoudre les équation différentielles suivantes (a est un paramètre réel) :

$$(1) \qquad y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x},$$

$$(2) \qquad y'' + 2y' + (1-a)y = e^{\left(1+\sqrt{|a|}\right)x}.$$

<u>Exercice 7</u>

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

1. Montrer que la fonction ϕ définie sur $]0,\pi[$ par $\phi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est solution de (1) sur $]0,\pi[$.
2. Déterminer les solutions de (1) sur $]0,\pi[$ en posant $y = \phi z$.
3. Déterminer les solutions de (1) sur $[0,\pi]$ puis sur $[0,2\pi]$.

<u>Exercice 8</u> (équation d'Euler)

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad x^2 y'' + 3xy' + y = 1 + x^2.$$

1. Déterminer les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $u = \ln x$ et $\tilde{y}(u) = y(e^u)$.
2. Déterminer les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ si possible.

<u>Exercice 9</u>

Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$. Pour cela on cherchera une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 10</u>

Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = 2f(-x) + x$.

TD intégrales impropres

<u>Exercice 1</u> (lemme de Gronwall)

Soient f et g deux fonctions continues, et $a \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad g(t) \geq 0,$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leq a + \int_0^x f(t)g(t)\,dt.$$

En considérant la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \left(a + \int_0^x f(t)g(t)\,dt\right)\exp\left(-\int_0^x g(u)\,du\right),$$

montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x) \leq a \exp\left(\int_0^x g(u)\,du\right).$$

<u>Exercice 2</u>

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Ecrire que $\lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$ à l'aide de la définition quantifiée de la limite d'une fonction.
4. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0_+.

TD formules de Taylor et développements limités

Exercice 1

Soit f une application de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.
1. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

2. On suppose que $0 \in I$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

3. Soit $\phi : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Montrer qu'on peut prolonger ϕ en une fonction de classe C^1 sur I.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue et dérivable en 0. Donner $f'(0)$.

Exercice 3

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [0,\pi], &&x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},\\
&\forall x \in \mathbb{R}, &&\left|1 - \frac{x^2}{2} - \cos x\right| \leq \frac{x^4}{24},\\
&\forall x \in \mathbb{R}, &&|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$, et f une application de classe C^2 de $]a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose $M_0 = \sup_{x>a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x>a} |f''(x)|$.
1. En appliquant convenablement la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x > a$ et pour tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.
3. Soit g une application de classe C^2 de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, à dérivée seconde bornée, et telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que l'on a $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Exercice 5

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et f une application de classe C^3 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c).$$

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une seule solution, notée x_n, dans l'intervalle $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\phi(x) = \tan x - x$ à un ordre bien choisi, trouver un équivalent de $x_n - n\pi$.

Exercice 7

Déterminer, si elle existe, la limite de $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 8

Etudier la position du graphe de $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ par rapport à ses tangentes en 0 et en 1.