Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2009-2010
AGRO-ECUE : 52PC2433
VETO-ECUE : 52BL2443/44

Cours de Mathématiques pour Préparation AGRO et VETO

Analyse - Rappels

Enseignante : Yvette PONS

Chapitre I : Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: rappels

*Les parties explicitement non au programme d'AGRO 2010 portent une astérisque **

0. Plan

1. Notations et rappels

L'intersection de deux ensembles E_1 et E_2 s'écrit $E_1 \cap E_2$, Leur **union** s'écrit $E_1 \cup E_2$

Les ensembles de nombres classiques sont :
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$=ensemble des réels - $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$=ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$=ensemble des réels, zéro exclus (voir figure F1)
$\mathbb{N}$ =ensemble des entiers naturels : 0,1,2,3,....
$\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,....
$\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels[1] : p/q où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$

Un **segment** est, par définition, un intervalle fermé borné. Par exemple $[a, b]$ où a et b sont deux réels finis (c'est-à-dire non infinis)
Un **voisinage** du nombre réel a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert non vide de centre a

---

On rappelle que $|x+a| = \begin{cases} x+a & si\ x > -a \\ -x-a & si\ x < -a \end{cases}$!

On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$ mais que $\sqrt[3]{x^3} = x$

---

[1] Curiosité : Un nombre est rationnel si et seulement si la suite de ses décimales est périodique à partir d'un certain rang ; essayez ! ce sera élucidé au chapitre V : Séries réelles

dans le chap sur lim.

Les **formes indéterminées** sont classées en trois types :

- $0/0$, ∞/∞ , dont l'indétermination peut être levée grâce au théorème des croissances comparées ou à la règle de L'Hôpital (§. 10,th. 17) ou bien encore par l'utilisation des développements limités.
- $0.\infty$, $\infty - \infty$, qui se ramènent aux cas précédents
- 0^0 , ∞^0 , 1^∞ qui se traitent en travaillant leur logarithme. Par exemple, on peut rencontrer, en cours de probabilité, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$ qui ne vaut pas 1 mais $e^{-\mu}$.

Traditionnellement on pose $y = f(x)$ et on représente la fonction f par un graphe, appelé C_f, dans le plan orthonormé où l'axe des x est horizontal (abscisses),et l'axe des y vertical (ordonnées).

Quand on cherche la **limite** de $f(x)$ quand x tend vers a, cela ne nécessite pas que f soit défini en a. "Tendre vers a " n'implique pas "atteindre a" .

Un développement limité d'une fonction f " au voisinage de "a" nécessite que f soit définie en a. dans F

application [f est une applicat° si tous les éléments de E ont 1 et 1 seule image dans F

2. Définition d'une fonction

I Définition fonction X

Def.1 : Une **fonction** f **de** E **dans** F est un procédé qui à tout élément x dans E associe au plus un élément noté $f(x)$ dans F. E et F s'appellent respectivement **ensemble de départ et ensemble d'arrivée**.

① fonct°
② applicat°
③ Df

- Il peut y avoir des éléments de E auxquels la fonction f n'associe aucun élément de F.
- Dans ce chapitre, les deux ensembles E et F sont l'ensemble $\mathbb{R}$.

Df X ⊕1

Def.2 : Le **domaine de définition de** f , noté $\mathcal{D}_{def}(f)$, est l'ensemble des x de E qui ont un associé dans F. On dit que $f(x)$ est l'**image** de x et que $f(x)$ a pour **antécédent** x.

- $\mathcal{D}_{def}(f) \subseteq E$ (ici,$\mathbb{R}$). Si $E = \mathcal{D}_{def}(f)$, la fonction s'appelle une application
- Une fonction de E dans F peut toujours se transformer en application de $\mathcal{D}_{def}(f)$ dans F ; il suffit de restreindre l'ensemble de départ au domaine de définition.
- Les occasions qui font que $\mathcal{D}_{def}(f)$ peut être plus petit que $\mathbb{R}$ sont les suivantes :

④ Df typiques :

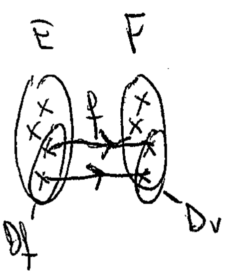
  - ▷ Un dénominateur ne doit pas être nul
  - ▷ L'argument d'une racine carrée doit être positif ou nul
  - ▷ L'argument d'un logarithme doit être strictement positif
  - ▷ L'argument de *arcsin* et de *arccos* doit appartenir à [-1,+1]
  - ▷ L'argument de *argch* doit appartenir à $[1, +\infty[$
  - ▷ L'argument de *argth* doit appartenir à $]-1, +1[$

⊕① Le Df définit la zone dans laquelle la fct° est une applicat° c'est à dire la zone dans laquelle tous les antécédents ont 1 et 1 seule image

Dv ⊕2

Def.3 : Le **domaine de valeurs de** f noté $\mathcal{D}_{val}(f)$ est l'ensemble des valeurs $f(x)$ obtenues quand x parcourt $\mathcal{D}_{def}(f)$.
Ce domaine de valeurs est aussi appelé **ensemble image de** f et est noté $\mathcal{I}m(f)$

⊕2



- $\mathcal{D}_{val}(f) = \mathcal{I}m(f) \subseteq F$ (ici, $\mathbb{R}$)
- Lorsque **tous** les éléments de l'ensemble d'arrivée ont **au moins un antécédent**, la fonction est dite **surjective.** => si F = Dval
  Une fonction f non-surjective peut être rendue surjective , simplement, en définissant $\mathcal{I}m(f)$ comme ensemble d'arrivée. Par exemple :
  les images ont au moins 1 antécédent
  $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective, mais $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ est surjective.
- Lorsque **chaque image n'a qu'un antécédent**, la fonction est dite **injective**. ~~toutes les images~~ ont 1 antécédent
  Une fonction f non-injective peut être rendue injective , simplement, en restreignant l'ensemble de départ à un ensemble plus petit que $\mathcal{D}_{def}(f)$ [voir fig. F2]. Par exemple :
  $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas injective, mais $g : x \in \mathbb{R}^- \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est injective.
- Une fonction à la fois injective et surjective est dite **bijective**. Par exemple :
  $h : x \in \mathbb{R}^- \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ est bijective.
- Voir figure F2

(5) Bornes

Def.4 : Une fonction f de la variable réelle x est dite **bornée sur un intervalle** I s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que m et M

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$$

Def.5 : Une fonction f de la variable réelle x est dite **majorée sur un intervalle** I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$

Une fonction f de la variable réelle x est dite **minorée sur un intervalle** I s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$

- Une fonction bornée sur I est majorée et minorée sur I et réciproquement.

Def.6 : Une fonction f de la variable réelle x est dite
- **croissante sur un intervalle** I si $\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
- **décroissante sur un intervalle** I si $\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
- **monotone sur un intervalle** I si f est croissante sur I ou(**exclusif**) décroissante sur I.

- Quand les symboles $\leq$ et $\geq$ peuvent être remplacés respectivement par $<$ et $>$, on rajoute, à ces adjectifs, l'adverbe "strictement".

3. Fonction réciproque

Lorsqu'une fonction f de E dans F est bijective, sa **fonction réciproque**, notée traditionnellement f^{-1} existe, avec des domaines de définition et de valeurs fixés :

$$\mathcal{D}_{def}(f^{-1}) = \mathcal{I}m(f) \;\text{ et }\; \mathcal{I}m(f^{-1}) = \mathcal{D}_{def}(f)$$

- La notation f^{-1} n'a rien à voir avec $\dfrac{1}{f}$
- Attention dans la recherche de l'expression de la fonction réciproque : une fois qu'on a exprimé x en fonction de y à partir de f, il ne faut pas oublier d'échanger les symboles x et y. Par exemple la fonction $f : x \in]-\infty, 0] \longmapsto f(x) = e^{-x^2}$ admet pour réciproque la fonction $g : x \in]-\infty, 1] \longmapsto g(x) = -\sqrt{-\ln x}$
- Les graphes d'une fonction f et de sa réciproque f^{-1} sont **symétriques par rapport à la première bissectrice**; en particulier, si C_f admet une tangente horizontale au point de coordonnées (a, b) et une asymptote verticale à l'abscisse $x = c$, alors le graphe $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point de coordonnées (b, a) et une asymptote horizontale en l'ordonnée $y = c$.(voir figure F3)

II Operations

4. Opérations sur les fonctions

ensemble

- ▷ On peut multiplier une fonction par un réel λ; par définition $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$
- ▷ On peut additionner, soustraire ou multiplier 2 fonctions à condition que l'intersection de leur domaine de définition ne soit pas vide; par définition $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ et on a $\mathcal{D}_{def}(f \pm g) = \mathcal{D}_{def}(fg) = \mathcal{D}_{def}(f) \cap \mathcal{D}_{def}(g)$
- ▷ On peut effectuer le quotient de 2 fonctions défini par $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

  et on a $\mathcal{D}_{def}(\frac{f}{g}) = \mathcal{D}_{def}(f) \cap \mathcal{D}_{def}(g) - \{$les valeurs de x telles que $g(x) = 0\}$
- ▷ On peut <u>composer</u> 2 fonctions en écrivant la définition $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
  à condition que le domaine de valeurs de g soit inclus dans le domaine de définition de f et on a

$$\mathcal{D}_{def}(f \circ g) = \mathcal{D}_{def}(g) - \{\text{les valeurs de } x \text{ telles que } g(x) \notin \mathcal{D}_{def}(f)\}$$

5. Déformations de la courbe représentative d'une fonction

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires respectifs de l'axe des abscisses $(0x)$ et de l'axe des ordonnées $(0y)$ et k une constante réelle positive.

- ▷ $y = g(x) = f(x) + k$: C_g est le translaté de C_f, d'un vecteur $k\vec{j}$
- ▷ $y = g(x) = f(x + k)$: C_g est le translaté de C_f, d'un vecteur $-k\vec{i}$
- ▷ $y = g(x) = f(kx)$: C_g résulte de l'étirement de C_f selon de $0x$, d'un facteur $1/k$ si $0 < k < 1$ et d'une compression de C_f selon de $0x$, d'un facteur k si $k > 1$
- ▷ $y = g(x) = k.f(x)$: C_g résulte de l'étirement de C_f selon de $0y$, d'un facteur k si $k > 1$ et d'une compression de C_f selon de $0y$, d'un facteur $1/k$ si $0 < k < 1$

schéma d'étude

→ tt le reste des étude de fonct° III Etudes de Fonct°s

6. ~~Eléments de symétrie d'une fonction~~ 1- parité

X

Def.7 : La question de la parité d'une fonction ne se pose que si son $\mathcal{D}_{def}(f)$ est symétrique par rapport à 0. Dans ce cas,
- si $\forall x \in \mathcal{D}_{def}(f)$ $f(-x) = f(x)$, alors f est **paire**.
- si $\forall x \in \mathcal{D}_{def}(f)$ $f(-x) = -f(x)$, alors f est **impaire**
- si $\forall x \in \mathcal{D}_{def}(f)$ $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, alors f n'a **pas de parité définie** (voir fig. F4-c).

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy d'équation $x = 0$ (voir figure F4-a)
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine de coordonnées (0,0) (voir figure F4-b)
- Une fonction impaire <u>définie en $x = 0$</u> est nécessairement nulle en x=0.
- Lorsque deux fonctions f_1 et f_2 sont telles que $f_2(x) = f_1(-x)$, leurs graphes respectifs sont symétriques par rapport à l'axe Oy. Exemple : $f_1(x) = e^x$ et : $f_2(x) = e^{-x}$
- Lorsque deux fonctions f_1 et f_2 sont telles que $f_2(x) = -f_1(-x)$, leurs graphes respectifs sont symétriques par rapport à l'origine de coordonnées (0,0). Exemple : $f_1(x) = \sqrt{x}$ et : $f_2(x) = -\sqrt{-x}$

X

Th. (1) : Le graphe de la fonction f admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = a$, si

$$\forall h \text{ tel que } (a \pm h) \in \mathcal{D}_{def}(f), \quad f(a+h) = f(a-h)$$

X **Th. (2) :** Le graphe de la fonction f admet le point de coordonnées (a,b) comme **centre de symétrie**, si

$$\forall h \text{ , tel que } (a \pm h) \in \mathcal{D}_{def}(f) \ , \quad \frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$$

On montre ce dernier théorème grâce à la remarque suivante : si , dans le référentiel $(0, \vec{i}\ \vec{j})$, le point I de coordonnées (a, b) est un centre de symétrie pour un graphe, cela signifie que, dans le référentiel $(I, \vec{i}\ \vec{j})$, la fonction est impaire.

2. Périodicité ~~d'une fonction~~

X **Def.8 :** Une fonction f est dite **périodique sur un intervalle** $I \subseteq \mathcal{D}_{def}(f)$, si et seulement si il existe un réel fini strictement positif α tel que

$$\forall x \in I \text{ tel que } x+\alpha \in I \quad , \quad f(x+\alpha) = f(x)$$

S'il existe plusieurs valeurs numériques pour α, la plus petite de celles-ci s'appelle la **période** de f.

- Lorsqu'une fonction f est périodique, de période T, on peut restreindre son étude à un intervalle $[a, b]$ quelconque de longueur T appartenant à $\mathcal{D}_{def}(f)$; le graphe complet se déduit du graphe sur $[a, b]$ par translations successives en x, d'un vecteur $\pm T\,\vec{i}$
- Il faut être très prudent quant-à la somme ou le produit de 2 fonctions périodiques et ne pas se risquer à "inventer des théorèmes" :
  - ▷ La somme de 2 fonctions périodiques quelconques f_1 et f_2 n'est **pas nécessairement** une fonction périodique. Par exemple : $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$. Tracez-la sur votre calculette graphique!.
    Pour cela, il faut que leurs périodes respectives T_1 et T_2 soient commensurables c'est-à-dire qu'il existe 2 entiers n_1 et n_2 strictement positifs tels que $n_1 T_1 = n_2 T_2$; Dans ce cas, la fonction $f_1 + f_2$ est périodique, de période $T = n_1 T_1$.
    Par exemple : la fonction f définie par
    $f(x) = a_0 + a_1 \sin(\omega x) + b_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(2\omega x) + b_2 \cos(2\omega x) + a_3 \sin(3\omega x) + b_3 \cos(3\omega x)$
    où les a_i sont des coefficients constants ainsi que la pulsation ω ; elle a pour période $2\pi/\omega$
  - ▷ Le produit de 2 fonctions f_1 et f_2 T-périodiques n'est **pas nécessairement** une fonction périodique de période T ; exemple : la fonction f définie par $(\sin x).(\cos x)$ est de période π et non pas 2π.

3. Limites (voir page t pour les formes classiques)

La notion de limite est la base des définitions de la continuité et de la dérivée, c'est dire son importance.

Def.9 : Soient a et A réels.On dit que :

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ si $f(x)$ s'approche de A autant que nous voulons, pourvu que x s'approche assez de a par valeurs supérieures. Alors A s'appelle la **limite à droite**. On écrit aussi $A = f(a+0)$

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = B$ si $f(x)$ s'approche de B autant que nous voulons, pourvu que x s'approche assez de a par valeurs inférieures. Alors B s'appelle la **limite à gauche**. On écrit aussi $B = f(a-0)$

Si les limites unilatères existent et sont égales à une même valeur L alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

- La fonction n'est pas obligatoirement définie en a. Il suffit qu'elle soit définie aussi proche de a que nous voulons.

$\boxed{a \text{ et } L \text{ peuvent être } \pm\infty}$

- la limite à droite et la limite à gauche constituent les **limites unilatères**

On appelle limite inf (sup) de f en a, la valeur de f lorsque x tend vers ~~la valeur~~ a par valeur inferieure (supérieure)
$\Rightarrow$ on la note $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x)$. si les limites inf et sup tendent vers la même valeur alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

- L **peut être infini,** a **restant fini**; dans ce cas

Si $L = +\infty$	$f(x)$ n'a pas de limite Traditionnellement on écrit pourtant	Si $L = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
La demi-droite ($x = a$, $y > 0$) est une **asymptote verticale**	au graphe de f	La demi-droite ($x = a$, $y < 0$) est une **asymptote verticale**

- a **peut être infini,** L **restant fini**; on dit que

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$	si $f(x)$ s'approche de L autant que nous voulons, pourvu que x prenne une valeur	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$
positive	assez grande en valeur absolue	négative
La demi-droite ($y = L$, $x > 0$) est une **asymptote horizontale**	au graphe de f	La demi-droite ($y = L$, $x < 0$) est une **asymptote horizontale**

- si $a \to +\infty$ et $L =$ cste alors asymptote horizontale en L
- si $a =$ cste et $L \to +\infty$ alors asymptote verticale en a

- a **et** L **peuvent être tous deux infinis**; on peut rencontrer les 4 situations

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Dans ces cas, il est judicieux d'affiner l'information en précisant le **type de branche infinie**; la méthode infaillible est la suivante :

$$\boxed{\text{calculer} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a_1}$$

– Si a_1 est nul , on a une **branche parabolique de direction** Ox
– Si a_1 est infini , on a une **branche parabolique de direction** Oy

– Si a_1 est un nombre fini non nul ,

$$\text{calculer} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - a_1 x] = a_2$$

▷ Si a_2 est un nombre fini, f admet pour **asymptote oblique** la droite d'équation $y = a_1 x + a_2$

▷ Si a_2 est infini, f admet pour **direction asympotique oblique** la droite d'équation $y = a_1 x$

faire exemples

Exemples :
- le graphe de $y(x) = \ln x$ admet, quand $x \to +\infty$), une branche parabolique de direction $0x$
- le graphe de $y(x) = e^{-x}$ admet, quand $x \to -\infty$), une branche parabolique de direction $0y$
- le graphe de $y(x) = x + 3 + \frac{5}{x^3}$ admet, quand $x \to \pm\infty$, l'asymptote oblique d'équation $y(x) = x + 3$
- le graphe de $y(x) = x - \sqrt{x}$ admet, quand $x \to +\infty$, la direction asymptotique définie par la droite d'équation $y(x) = x$

$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\Rightarrow Ox$

$\lim_{-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$
$\Rightarrow Oy$

Plus de détail sur le comportement de $f(x)$ quand x tend vers l'infini est obtenu en effectuant un développement limité de $f(x)$ au voisinage de l'infini, dit **développement asymptotique** (Chapitre I-§15).

$\lim_{+\infty} \frac{-x+3+\frac{5}{x^3}}{x} = -1$
$\lim_{+\infty} f(x) + x = 3$
$y = -x + 3$

Lois algébriques sur les limites Th (3) :
Si on a affaire à des fonctions ayant des limites finies, alors

$$\text{La limite d'}\left\{\begin{array}{r}\text{une somme d'un nombre fini de}\\ \text{un produit d'un nombre fini de}\\ \text{un quotient de deux}\end{array}\right\}\text{ fonctions est égale }\left\{\begin{array}{c}\text{à la somme}\\ \text{au produit}\\ \text{au quotient}\end{array}\right\}\text{ des limites de ces}$$

fonctions ; dans le cas du quotient, il faut, en plus, la non-nullité de la limite du dénominateur .

Th. (4) de passage à la limite dans une inégalité entre fonctions

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ et si, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$, alors $L_1 \leq L_2$

Th. (5) d'encadrement (ou du sandwich ou des gendarmes)

Si $f(x) < g(x) < h(x)$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = L$

extension

- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
- Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Th. (6) des croissances comparées

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Th. (7) de la limite monotone
Soit un intervalle $I =]a,b[\in \mathbb{R}$ et f une fonction monotone de I sur $\mathbb{R}$. Alors

- en tout point $c \in I$, f admet une limite finie à droite, notée $f(c^+)$ et une limite finie à gauche, notée $f(c^-)$ telles que
  f croissante $\Longrightarrow f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$, f décroissante $\Longrightarrow f(c^+) \leq f(c) \leq f(c^-)$

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ où L est
  - finie $\Longleftrightarrow$ f est croissante et minorée ou bien décroissante et majorée
  - $-\infty$ si f est croissante mais non minorée
  - $+\infty$ si f est décroissante mais non majorée

- $\lim_{x\to b^-} f(x) = L_b$ où L_b est
  - finie $\Longleftrightarrow$ f est croissante et majorée ou bien décroissante et minorée
  - $+\infty$ si f est croissante mais non majorée
  - $-\infty$ si f est décroissante mais non minorée

- Ce théorème a son homologue pour les suites réelles au Chapitre IV,§7, c'est ce qui justifie qu'on l'ait signalé ici.

Def. (10) de 2 fonctions équivalentes : La fonction f de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite **équivalente à la fonction g au point $x = a$** $\iff$
Il existe un voisinage V de a et une fonction ϵ de $I \cap V$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap V \ , \ f(x) = [1 + \epsilon(x)].g(x)$$

OU BIEN

La fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite **équivalente à la fonction g au point $x = a$** $\iff$
Il existe un voisinage V de a et une fonction ϕ de $I \cap V$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap V \ , \ f(x) = \phi(x).g(x)$$

- Cette définition a son homologue pour les suites réelles au Chapitre IV,§9.

9. Continuité d'une fonction

Def.11 : La fonction f est continue en $x = a$, si a appartient à son domaine de définition et si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

- Les différents types de discontinuité, finie, infinie, sont présentés sur un graphique (voir figure F5).
- Sont continues sur leur domaine de définition, les fonctions polynômiales, rationnelles, trigonométriques (et leurs réciproques), exponentielles, logarithmes, racines. Néanmoins, la continuité à l'extrémité d'un intervalle de définition est restreinte à une **continuité à droite ou à gauche**.
- Le domaine de continuité $\mathcal{D}_{cont}(f)$ d'une fonction f est inclus dans son domaine de définition $\mathcal{D}_{def}(f)$
- Si a n'appartient pas au domaine de définition de f mais $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$, on dit que la discontinuité de f en a est <u>réductible ou écartée</u>. On définit une fonction "parente" $\overline{f}$ continue en a en posant

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathcal{D}_{def}(f) \\ \lim_{x \to a} f(x)) & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

On dit que $\overline{f}$ est le **prolongement par continuité** de f. Certains logiciels graphiques effectuent ce prolongement sans vous le dire, en traçant le graphe de g quand vous demandez celui de f.

Ex Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$, mais y est prolongeable par continuité car $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Th. (8) - Opérations algébriques sur les fonctions continues : Si les fonctions f et g sont continues en a, alors, $f \pm g$, fg , cf(où c est une constante), sont continues en a ; pour être aussi continue en a, la fonction $\dfrac{f}{g}$ demande en plus $g(a) \neq 0$

Th. (9) : Si une fonction g est continue en a et si la fonction f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a

Th. (10) de la bijection réciproque : Soit f une fonction <u>continue et strictement monotone</u> sur un intervalle I. Alors

f est une bijection de I sur $J = \mathcal{I}m_I(f)$ (ensemble image par f de I)

la fonction réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone sur J et de même sens de variation que f

Th. (11) de la valeur intermédiaire (voir figures F6)
Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$
Alors, pour tout nombre u dans $]f(a), f(b)[$, il existe au moins un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = u$.

- Autrement dit, la courbe représentant cette fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ coupe nécessairement au moins une fois l' horizontale d'équation $y = u$ à une abscisse c dans $]a, b[$.
- En particulier si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, cela assure l'existence d'au moins une racine ($x = c$) pour l'équation $f(x) = 0$.
  Cela permet de trouver, par approximations successives, les racines d'équations transcendantes comme $x + \ln x = 0$. [voir fig. I-6]

Soit f une fct° continue ~~sur I~~ en a
On appelle dérivée de f en a la limite du tx d'accroissem^t si elle existe
~~On~~ $\left.\frac{df}{dx}\right|_a = f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

10. Dérivée (première) d'une fonction

C'est une autre fonction de x. On la notera $\frac{df}{dx}(x)$ ou $f'(x)$.

Def.12 : La **dérivée** de f en $x = a$ peut exister à condition que $a \in \mathcal{D}_{cont}(f)$. Dans cette condition, elle est définie par la limite, **si elle existe** du taux d'accroissement :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ; \text{ si cette limite existe, on la note } f'(a) \text{ ou mieux } \frac{df(x)}{dx}(x = a)$$

- Les cas où la fonction f est dite non dérivable en a bien que $a \in \mathcal{D}_{cont}(f)$ sont les suivants :
  - ▷ les dérivées à droite et à gauche de a ne sont pas les mêmes
  - ▷ la dérivée en $x = a$ est infinie
- La valeur de la dérivée en $x = a$ égale la **pente de la tangente** au graphe de f en $x = a$.
  l'équation de cette tangente est $\boxed{y - f(a) = (x - a)f'(a)}$
- Le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}_{der}(f)$ d'une fonction f est contenu dans son domaine de continuité $\mathcal{D}_{cont}(f)$
- Les dérivées des fonctions élémentaires que vous connaissez par coeur sont le résultat du calcul de la limite-définition.
- Le signe de $f'(x)$ donne le **sens de variation de** $f(x)$
  - ▷ Si $f'(x) > 0$, $f(x)$ est croissante en x ; la tangente en x a une pente positive
  - ▷ Si $f'(x) < 0$, $f(x)$ est décroissante en x ; la tangente en x a une pente négative
  - ▷ Si $f'(x) = 0$, $f(x)$ est ni croissante ni décroissante en x ; la tangente en x, de pente nulle, est horizontale.
- Recherche d'un **extremum relatif d'une fonction continue** : la figure F7-a rappelle la définition d'un extremum relatif et d'un extremum absolu sur un intervalle.
  1. La condition **nécessaire** à l'existence d'un extremum en $x = a$ sont :(voir figure F7-b)
     - f' existe en a et $f'(a) = 0$
     - sinon f' est infini   si f' est infini
     - sinon f' est différente à droite et à gauche de a donc n'existe pas en a
  2. Une condition **suffisante** est que f' **change de signe de part et d'autre de** a[voir figure F7-c)]
- **Attention** Lorsque une fonction f est définie par morceaux, le calcul de la dérivée au point frontière demande de revenir à la définition de la dérivée en ce point.

  Ex. 1 : $f : x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ 2e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est dérivable en $x = 1$.

  Ex. 2 : $f : x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ 2e^{-(x-1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ n'est pas dérivable en $x = 1$.
- **Attention** Lorsque une fonction f, dérivable sur un intervalle sauf en a , admet en a un prolongement par continuité $\overline{f}$ et qu'on se pose la question de l'existence de la dérivée $\overline{f}\,'$ en a, deux stratégies sont possibles :

▷ Si f' admet une limite L en a (les deux limites unilatères égales et finies), alors $\overline{f}\,' = L$

▷ Si f' n'admet pas de limite en a, on ne peut rien en conclure : il faut explicitement calculer

$$\lim_{x \to a} \frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(a)}{x - a}$$

Ex. 1 : $f : x \longrightarrow f(x) = x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable en $x = 0$; sa prolongée $\overline{f}$ est dérivable en $x = 0$, mais f' n'admet pas de limite quand x tend vers 0 car elle oscille indéfiniement entre -1 et +1.

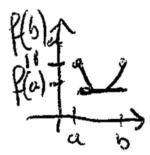
Ex. 2 : $f : x \longrightarrow f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable en $x = 0$; sa prolongée $\overline{f}$ est dérivable en $x = 0$, $\lim_{x \longrightarrow 0} f'(x)$ existe et $\overline{f}'(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x)$

Th. (12) - Opérations algébriques sur les fonctions dérivables :
Si les fonctions f et g sont dérivables en a, alors $f \pm g$, fg , cf(où c est une constante), sont dérivables en a :

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad (cf)' = cf'(a)$$

Pour être aussi dérivable en a, la fonction $\dfrac{f}{g}$ demande en plus $g(a) \neq 0$ et alors

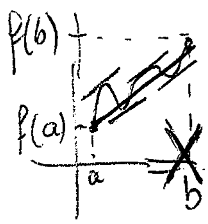
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$



Th. (13) de Rolle sur un intervalle borné :
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

- Les figures F8-a et F8-b montrent l'importance de la condition de continuité pour satisfaire le théorème de Rolle.
- La figure F8-c illustre le fait que "A entraine B" n'induit pas que "B entraine A".

Th. (14) de Rolle sur un intervalle non borné :
Si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. alors il existe au moins une valeur $c \in]a, +\infty[$ telle que $f'(c) = 0$.



Le théorème de Rolle a pour conséquence le théorème des accroissements finis :

Th. (15) des accroissements finis :
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

- L'expression précédente, écrite sous la forme $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$ constitue la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1.
- Cela signifie qu'en $x = c$, la tangente au graphe de f est parallèlle à la sécante joignant les deux extémités $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$. [voir fig. F9]
- Ce théorème permet de démontrer des inégalités par le biais de $a < c < b$ et de ses conséquences sur $f'(c)$.
- En posant $h = b - a$, ce théorème peut être formulé en prédisant l'existence de θ tel que $0 < \theta < 1$ et $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$
- Le théorème des accroissements finis a une extension si on rajoute une condition sur la dérivée, c'est ce qu'on appelle l'inégalité des accroissements finis ci-dessous.

Th. (16) Inégalité des accroissements finis :
– Soient :
i) deux réels a et b tels que $a < b$
ii) une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
iii) et dont la dérivée f' est bornée sur $]a, b[$, avec $m = \inf_{]a,b[}(f')$ et $M = \sup_{]a,b[}(f')$
Alors : $m.(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M.(b - a)$

Cela aussi peut servir à démontrer une inégalité.

*** Th. 17 - Règle de l'Hôpital :**
Soient $I \subset \mathbb{R}$ et le réel $a \in I$. Si f et g sont deux fonctions

- continues de I dans $\mathbb{R}$
- nulles en a (ou dont la limite en a est nulle)
- dérivables sur I ou $I - \{a\}$
- telles que $g'(x)$ est non nul au voisinage de a

$$\text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Cette règle permet de lever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
- Cette règle est valable si $a = \pm\infty$
- Il est impératif de n'appliquer cette règle que si toutes les conditions n'est pas satisfaites, sous peine d'aboutir à un résultat faux.
- Cette règle s'applique aussi aux limites unilatères
- Il peut arriver qu'une première application de la règle de L'Hôpital ne lève pas une indétermination ; dans ce cas , on peut utiliser à nouveau cette même règle sur ce résultat , pourvu que toutes les conditions soient satisfaites.

$\hat{M}$ ~~chap~~ Sec$\backslash^{o}$

~~11~~. Dérivée seconde d'une fonction - dérivées d'ordre n

Def.13 : La **dérivée seconde** d'une fonction est la dérivée de sa dérivée.

Elle se note $f''(x)$ ou mieux $\frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]$ ou $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

- Le signe de $f''(x)$ donne le sens de courbure :
  - ▷ si $f''(x) > 0$ la pente de C_f est croissante ; donc la concavité est tournée vers le haut (comme pour $y = x^2$) donc la **convexité** vers le bas. On dit alors que la fonction est **convexe**.
  - ▷ si $f''(x) = 0$, cela signifie qu'en x la pente passe par un extremum ; le graphe C_f n'a pas de courbure, il se comporte localement comme une droite.
- Le rayon de courbure $R(x)$ au point d'abcsisse x d'une courbe d'équation $y = f(x)$ est donné par

$$R(x) = \frac{\left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}} \qquad \text{à condition que } \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ existe}$$

Le rayon de courbure d'une droite est infini ; celui d'un cercle est constant ; celui de toute autre courbe varie avec x ; par exemple, le rayon de courbure de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est $R(x) = \frac{\left[1 + (2ax + b)^2\right]^{3/2}}{2a}$; ce rayon passe par un minimum (courbure maximum) en $x = -\frac{b}{2a}$ c'est-à-dire au sommet, où il vaut $R(0) = 1/2a$.

- La recherche d'un **point d'inflexion** en $x = a$ consiste en la recherche d'un changement de signe $f''(x)$ de part et d'autre de a. Cela signifie qu'en $x = a$ la pente de C_f passe par un extremum ; celui-ci peut être fini ou infini. Si la dérivée seconde f'' existe en $x = a$ point d'inflexion, alors nécessairement $f''(a) = 0$. Mais l'existence de f'' n'est pas nécessaire pour avoir un point d'inflexion ; par exemple $f(x) = x^{5/3}$ admet un point d'inflexion en $x = 0$, malgré une dérivée seconde qui y est infinie.

X **Def.14 : La dérivée d'ordre n** d'une fonction f est la fonction obtenue en dérivant n fois cette fonction.

Elle se note $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ ou $f^n(x)$ ou $f\overbrace{''....'}^{n \text{ fois}}(x)$

X **Def.15** : On dit qu'une fonction est **de classe** C^n si elle est n fois dérivable et si sa dérivée n-ième est continue.

12. Convexité

convexe concave

X **Def.16 :** On dit que la courbe C_f représentant la fonction f est **convexe** entre les points A et B d'abscisses respectives a et b si **la corde AB est au dessus de la courbe** pour tous les points situés entre a et b

ceci s'écrit analytiquement (voir éléments de démonstration en figure F10)

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

On a vu au §11, que le signe de f'', quand celle-ci existe, peut aussi servir à déterminer la convexité : dérivée seconde positive (négative) entraine courbe convexe (concave).

approximat° d'une fonction en polynôme dont les coefs ne dependent que des dérivées n-ièmes

13. Formules de Taylor-Lagrange , de Mac-Laurin

extension de l'accroissem^t fini à n dérivées

X **Th. (18) de Taylor :** Soient deux réels a, b et $n \in \mathbb{N}$, et une fonction $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, qui, sur $]a,b[$, admet une $(n+1)$-ième dérivée, alors $\exists\ c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad \text{(Taylor-Lagrange à l'ordre } n)$$

- Le dernier terme s'appelle le **reste de Lagrange** car c'est lui qui l'a explicité, après le travail de Taylor concernant la somme sur k. Ce reste est très utilisé pour **démontrer des inégalités** faisant intervenir les termes de cette somme ; en effet, $a < c < b$ se répercute en une inégalité contenant $f^{(n+1)}(c)$.
- Pour la démonstration, la fonction auxiliaire telle que $\phi(a) = \phi(b)$, à laquelle on applique le théorème de Rolle est

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \ - f(b) \ + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{où } A \text{ est le réel constant tel que } \phi(b) = \phi(a) = 0$$

- Pour $n = 0$, on retrouve le niveau du th. des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, on trouve la formulation

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{h^{(n)}}{n!}f''(a) + \frac{h^{(n+1)}}{n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{où } 0 < \theta < 1$$

La valeur de θ dépend de h.

- En posant $a = 0$ et $h = x$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{(Mac-Laurin à l'ordre } n)$$

La valeur de θ dépend de la valeur de x.

~~14~~. Développement limité (DL) d'une fonction à l'ordre n au voisinage de x=a

Au **voisinage d'un point** $x = a$, la formule de Taylor donne une approximation sous forme d'un **polynôme** en *(x-a)* ayant un nombre limité de termes.

Def.17 : DL d'ordre n au voisinage de x=a :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + R_n(x-a)$$

où $R_n(x-a)$ appelé **reste**, désigne un terme qui tend plus vite vers 0 que $(x-a)^n$ quand x tend vers a

dans la def

- Le DL amputé du reste s'appelle la **partie régulière** du DL ou **partie principale** du DL.
  dans la def
- On trouve quelquefois la notation $R_n(x-a)$ remplacée [2] par $o\left[(x-a)^n\right)]$; l'indice n est supérieur ou égal au dernier terme de la partie régulière ; en effet celle-ci peut avoir certains termes nuls.
- En se limitant à l'ordre n et en omettant le reste, on obtient **l'équivalent d'ordre n** : au voisinage de a,
  - ▷ A l'ordre 0,le graphe C_f est approximé par la fonction constante $f(x) \sim_a f(a)$
  - ▷ A l'ordre 1, le graphe C_f est approximé par la tangente en $x = a$ à C_f,
    $f(x) \sim_a f(a) + (x-a)f'(a)$; c'est l'**approximation affine**
  - ▷ A l'ordre 2, le graphe C_f est approximé par une courbe du second degré ; c'est l'**approximation parabolique**
  - ▷ A l'ordre n, C_f est approximé par une courbe de degré n, d'équation $y = P_n(x-a)$, polynôme en $(x-a)$, de degré n
- Dans les calculs de limites de $f(x)$ quand x tend vers a, des **indéterminations peuvent être levées** en remplaçant $f(x)$ par son équivalent au voisinage de a à un ordre suffisant.
- Les DL peuvent s'ajouter, être multipliés par un réel, être multipliés entre eux, se dériver, s'intégrer, se composer. Cela demande une certaine vigilance concernant la **cohérence des ordres des DL** ... que nous mesurerons lors des exercices en Travaux Dirigés.
  Attention , les restes ne s'ajoutent pas, ne se multiplient pas,...etc.
- En considérant des voisinages successifs autour des valeurs discrètes a_1, a_2, a_3,...*etc* réparties sur le domaine de définition d'une fonction f, on peut l'approximer par une **fonction en escalier** définie par morceaux où on utilise l'approximation d'ordre 0 :

$$f(x) = \begin{cases} f(a_1) & \text{si } x \text{ est voisin de } a_1 \\ f(a_2) & \text{si } x \text{ est voisin de } a_2 \\ f(a_3) & \text{si } x \text{ est voisin de } a_3 \\ ....etc \end{cases}$$

Cette dernière remarque constitue la base de la définition de l'intégrale de Rieman (Chapitre II)

Def.18 : DL à l'ordre n au voisinage de $x = 0$:
Au voisinnage de 0 à l'ordre n :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + o\left[(x)^n\right)]$$

- Le DL, au voisinage de 0, d'une fonction paire (impaire) est un pôlynome pair (impair).

[2]Rappel : Ecrire, qu'au voisinage de a, $f = o(\phi)$ signifie que f est négligeable devant ϕ . Plus précisément : il existe ϵ tel que $f = \phi.\epsilon$ et $\lim_{x \to q} \epsilon = 0$

- Les DL au voisinage de 0 sont connus ou facilement retrouvés, ou tabulés.Un DL au voisinage de a peut toujours se ramener à un DL au voisinage de 0
  - en posant le changement de variable $X = x - a$
  - en posant le changement de fonction $g(X) = f(x - a)$
  - en calculant le DL de $g(X)$ au voisinage de $X = 0$
  - et enfin en revenant à la variable initiale x

15. Développement asymptotique d'une fonction f

Par extension on définit le **développement asymptotique au voisinage d'un infini** . Le DL à l'ordre n d'une fonction quand x tend vers l'infini est obtenu en posant le changement de variable $X = 1/x$, ce qui donne une nouvelle fonction $g(X) = f(x)$; on développe alors g à l'ordre n au voisinage de $X = 0$ et enfin, on remplace X par $1/x$. Le résultat est, à l'ordre n, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{où} \quad u_k \in \mathbb{R}$$

S'y a du temps

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :
L'application à l'**étude des branches infinies** des courbes est fructueuse. Donnons un exemple avec la fonction f telle que $f(x) = x^2.e^{-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}$.

Au voisinage de $x = \pm\infty$, et à l'ordre 1,

$$f(x) = x^2 - 5x + \frac{23}{2} - \frac{95}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ceci montre qu'à l'infini, le graphe C_f admet, comme "courbe-asymptote", la parabole d'équation $y = x^2 - 5x + \frac{23}{2}$.
De plus,au voisinage de l'infini,

$$f(x) - y \sim -\frac{95}{6x}$$

ce qui montre que en $+\infty$, le graphe C_f est au dessous de la parabole-asymptote tandis que en $-\infty$, le graphe C_f est au dessus.

16. Plan d'étude complète d'une fonction f

Cela contient la synthèse des paragraphes ci-dessus et consiste donc à :

- Déterminer son domaine de définition ; en déduire les points qui demandent un calcul de limite (points exclus de $\mathcal{D}_{def}(f)$, points frontière entre morceaux, $\pm\infty$)
- Calculer ces limites et en déduire son domaine de continuité (Rappel : $\mathcal{D}_{cont}(f) \subseteq \mathcal{D}_{def}(f)$) et les comportements asymptotiques ; effectuer les prolongements par continuité quand ils sont possibles
- Repérer les éventuels éléments de symétrie qui permettent de restreindre l'étude à un intervalle plus petit que $\mathcal{D}_{def}(f)$
- Repérer les éventuelles propriétés : de signe constant, périodique, bornée
- Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée [rappel : $\mathcal{D}_{der}(f) \subseteq \mathcal{D}_{cont}(f)$], voir où f' s'annule et en déduire l'éventuelle existence d'extrema locaux
- Construire le tableau de variation
- Préciser la position des éventuels points d'inflexion
- Tracer le graphe
  - ▷ en indiquant les axes Ox et Oy gradués d'échelles linéaires régulières
  - ▷ en dessinant les asymptotes ou les direction asymptotique
  - ▷ en notant les coordonnées des extrema locaux
  - ▷ en dessinant les tangentes intéressantes (notament en ces extrema)
  - ▷ en indiquant les coordonnées des points d'inflexion
  - ▷ en dessinant l'allure de la courbe compte tenu de ce qui précède

17. Compléments

Complément I-C1 : fonction élémentaire

Une **fonction élémentaire** est une fonction définie par **une** formule contenant un nombre fini d'opérations

- algébriques : les 4 lois arithmétiques, élévation à une puissance ou extraction d'une racine, logarithme ou exponentielle dans une base quelconque
- trigonométriques

Une **fonction non élémentaire** peut avoir les modes de définition suivants :

- l'énoncé d'une liste de valeurs numériques (x, y)
- plusieurs formules mathématiques, comme les fonctions définies par morceaux
- la somme d'une série, comme par exemple $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \cos(kx)$
- une intégrale par exemple le logarithme intégral $f(x) = \int_0^x \frac{du}{\ln u}$ noté quelquefois $li(x)$
- une équation différentielle $\frac{df(x)}{dx}(x) = -[f(x)]^2$
- etc

Complément I-C2 : Lois algébriques sur les dérivées de fonctions

$$\frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} \qquad \frac{d\,[f(x)g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx} = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[\ g(x)\ ]^2}$$

Complément I-C3 : dérivée d'une fonction de fonction

Soit une fonction f de la fonction g qui, à x, associe $f[g(x)] = f \circ g(x)$. Si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors, $f \circ g$ est dérivable en a.

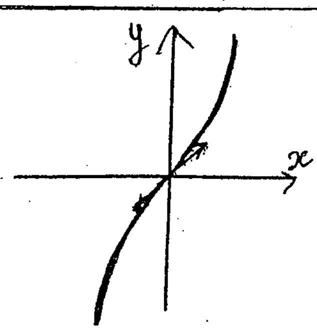
On rappelle la règle de dérivation :

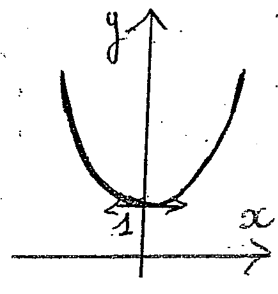
$$\text{En posant} \quad u = g(x), \qquad \frac{df[g(x)]}{dx} = \frac{df(u)}{du} \times \frac{du(x)}{dx}$$

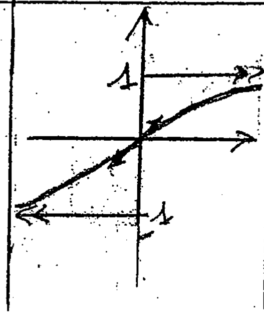
Exemple : $\dfrac{d\left[e^{\sin(\ln x^5)}\right]}{dx} = e^{\sin(\ln x^5)} \times \cos(\ln x^5) \times \dfrac{1}{x^5} \times 5x^4$

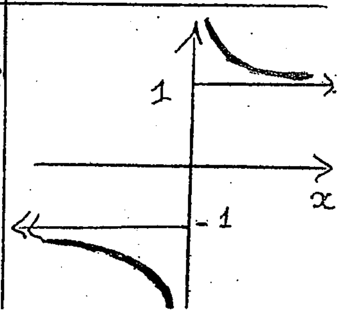
Complément I-C4 : Fonctions hyperboliques

$f(x)$	$sh\,x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	$ch\,x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$	$th\,x=\dfrac{sh\,x}{ch\,x}$	$coth\,x=\dfrac{ch\,x}{sh\,x}$
$\mathcal{D}_{def}(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
parité	impaire	paire	impaire	impaire
Signe de $f(x)$	du signe de x	toujours >0	du signe de x	du signe de x
$\dfrac{df(x)}{dx}$	$ch\,x$ Donc toujours >0	$sh\,x$ Donc du signe de x	$\dfrac{1}{ch^2x}$ ou $1-th^2x$ Donc tjs >0	$-\dfrac{1}{sh^2x}$ ou $1-coth^2x$ Donc tjs <0
Équivalent $x\to+\infty$	$\dfrac{e^{x}}{2}$	$\dfrac{e^{x}}{2}$	1 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y=1$ qd $x\to+\infty$	1
Équivalent $x\to-\infty$	$-\dfrac{e^{-x}}{2}$	$+\dfrac{e^{-x}}{2}$	-1 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y=-1$ qd $x\to-\infty$	-1
$f(0)$	0	1	0	non défini
$\lim\limits_{x\to0^+}$	0 (0^+)	1 (1^+)	0^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-}$	0 (0^-)	1 (1^+)	0^-	$-\infty$
pente de la tan en $x=0$	1	0	1	pour tan à gauche de 0 : $-\infty$ pour tan à droite de 0 : $-\infty$









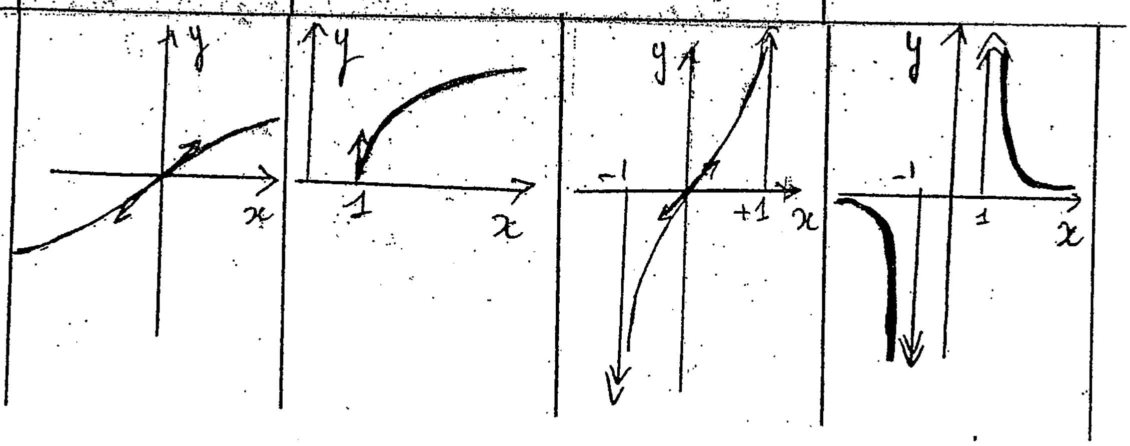
Complément I-C5 : Fonctions hyperboliques réciproques

- On utilisera la relation facile à démontrer ; $ch^2 u - sh^2 u = 1$
- On ne peut prendre la réciproque que d'une fonction monotone.
  La détermination principale choisie habituellement pour argch x est traditionnellement la détermination positive.
- Le calcul des dérivées des fonctions réciproques est fait en p. 3.
- Les relations avec le log népérien sont démontrées en page 4.

$f(x)$	argsh x	argch x	argth x	argcoth x
$\mathcal{D}$ déf (f)	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty[$	$]-1, +1[$	$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty$
$\mathcal{D}$ val (f) imposé	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
parité	impaire	la question ne se pose pas		
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Les graphes se déduisent des fonctions hyperboliques par symétrie par rapport à la première bissectrice ; ainsi les asymptotes horizontales deviennent des asymptotes verticales, les tangentes horizontales deviennent des tangentes verticales ... bref on permute les rôles de x et y.

Graphes de f



$$y = \arg\operatorname{sh} x \iff x = \operatorname{sh} y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \operatorname{ch} y = \pm\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}$$

Comme un ch est toujours >0, ce signe moins n'a pas de sens.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$y = \arg\operatorname{ch} x \iff x = \operatorname{ch} y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \operatorname{sh} y = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}$$

Comme $y>0$, ce signe moins n'a pas de sens.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$y = \arg\operatorname{th} x \iff x = \operatorname{th} y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 - \operatorname{th}^2 y = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}}$$

$$y = \arg\operatorname{coth} x \iff x = \operatorname{coth} y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 - \operatorname{coth}^2 y = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}}$$

Récréation : Pourquoi ne peut-on pas en déduire que $\frac{d}{dx}(\arg\operatorname{th} x - \arg\operatorname{coth} x) = 0$?

Complément I-C6 : Relations entre fonctions hyperboliques réciproques et fonction logarithme népérien

Par définition $\begin{cases} sh\,y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \\ ch\,y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \end{cases}$. En ajoutant membre à membre :

$\Downarrow$

$e^y = sh\,y + ch\,y$

- Si $y = \arg sh\,x$ alors $x = sh\,y \Rightarrow e^y = x + \sqrt{1+x^2}$ car ch est définie

  Et en prenant le log népérien : $\underline{y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

- Si $y = \arg ch\,x$ alors $x = ch\,y \Rightarrow e^y = \sqrt{ch^2 y - 1} + x$ car la détermination choisie par définition pour $y = \arg ch\,x$ est $y > 0$

  ce qui $\Rightarrow sh\,y > 0$

  En prenant le log népérien : $\underline{y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})}$

- Si $y = \arg th\,x$ alors $x = th\,y = \dfrac{\cancel{e^y}(1 - e^{-2y})}{\cancel{e^y}(1 + e^{-2y})} \Longleftrightarrow e^{-2y} = \dfrac{1-x}{1+x}$

  Et en prenant le log népérien : $\underline{y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ où $|x| < 1$ puisque c'est un th.

- Si $y = \arg coth\,x$ alors $x = coth\,y = \dfrac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \Longleftrightarrow e^{-2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

  $\underline{y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}}$ où $|x| > 1$

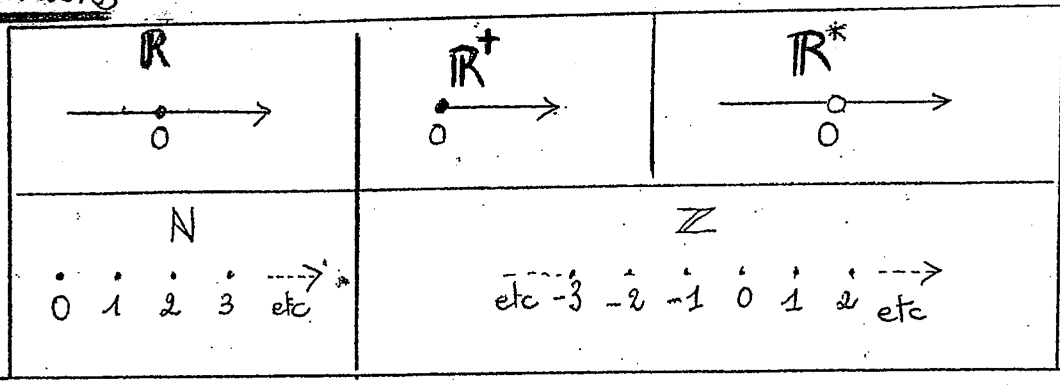
  puisque x est un coth

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \arg sh\,x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) & \arg th\,x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} \\ \arg ch\,x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & \arg coth\,x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} \end{array}}$$

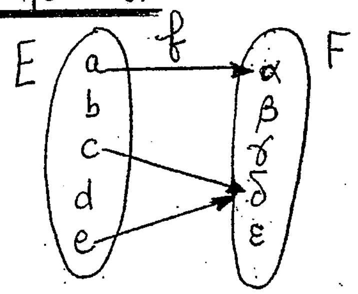
18. Figures

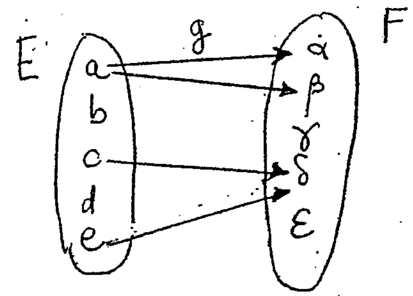
F1. Notations



F2. Définition d'une fonction

E = ensemble de départ, F = ensemble d'arrivée





f est une | fonction de E dans F
| application de $\{a, c, e\}$ dans F

$\mathcal{D}_{déf}(f) = \{a, c, e\}$ · $\mathcal{D}_{val}(f) = \{\alpha, \delta\}$

f n'est pas surjective car $F \neq \mathrm{Im}\, f$
f n'est pas injective car δ a 2 antécédents
La restriction de f à $\{a, c\}$ est injective

g n'est pas une fonction de E dans F car, à l'élément $a \in E$, elle fait correspondre plus qu'un élément de F.
g n'est donc pas une application

F3. Fonction Réciproque : exemple $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = e^{-x^2} \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}_{déf}(f) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

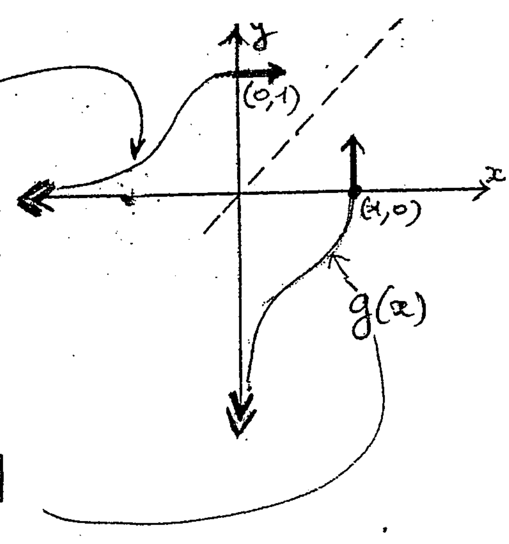
$\mathcal{D}_{val}(f) =]0, 1]$

f n'est pas injective • La restriction de f à $F : x \in]-\infty, 0] \to F(x) = e^{-x^2} \in \mathbb{R}$ est injective, non surjective.

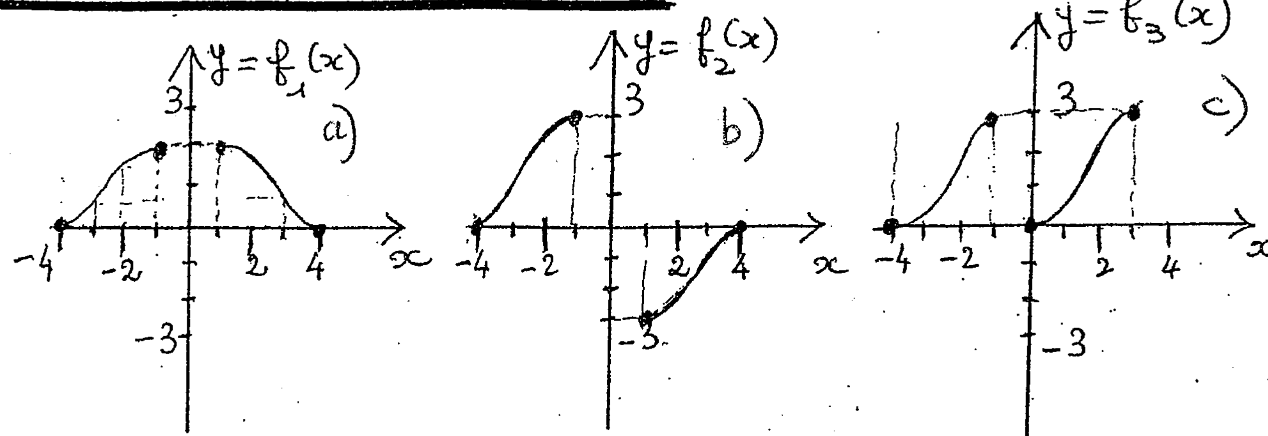
La fonction $G : x \in]-\infty, 0] \to G(x) = e^{-x^2} \in]0, 1]$ est injective et surjective donc bijective.

La fonction réciproque de G est

$g : x \in]0, 1] \longrightarrow g(x) = -\sqrt{-\ln x} \in]-\infty, 0]$



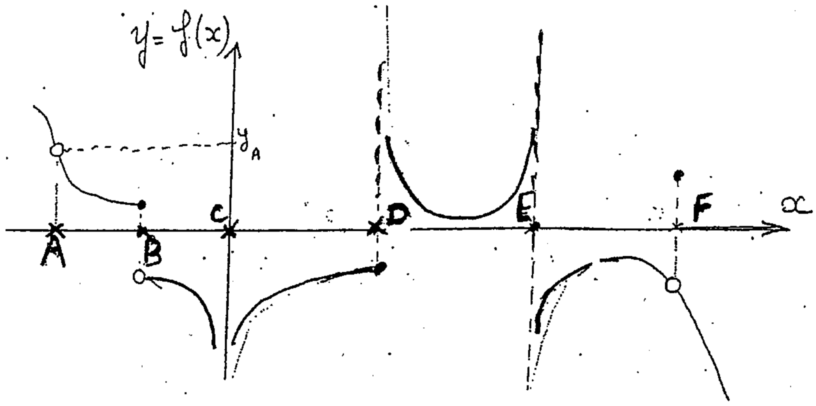
F4 : Éléments de symétrie d'une fonction



f_1 est paire $\qquad$ f_2 est impaire $\qquad$ f_3 n'a pas de parité définie

---

F5 : Différents types de discontinuité, finie, ou infinie



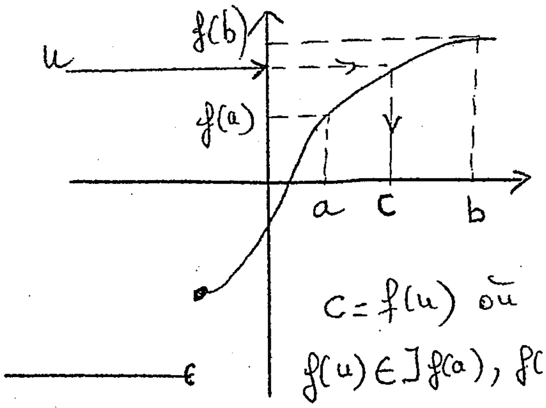
En A, la discontinuité est **réductible** : travailler avec la fonction g qui est la prolong de la fonction f par continuité

$$g : x \to g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathcal{D}_{def} \\ y_A & \text{en } x = x_A \end{cases}$$

Discontinuités finies
- A : la fonction n'est pas définie en x_A
- B : la fonction est définie mais la limite à gauche est $\neq$ de la limite à droite $\Rightarrow$ la limite en x_B n'existe pas.
- F : la fonction est définie, les limites à droite et à gauche sont égales mais diffèrent de la valeur de la fonction en x_F.

Discontinuités infinies
- C : la fonction est ∞ donc non définie en x_C
- D : la fonction est définie à gauche mais infinie à droite
- E : la fonction est égale $\pm\infty$ donc non définie en x_E.

F6. Théorème de la valeur intermédiaire



$c = f(u)$ où

$f(u) \in]f(a), f(b)[$

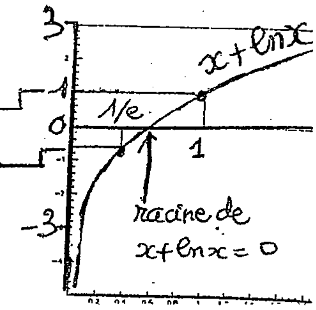
$f : x \to x + \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$f(1) = 1 > 0$

$f(\frac{1}{e}) = -0,6 < 0$

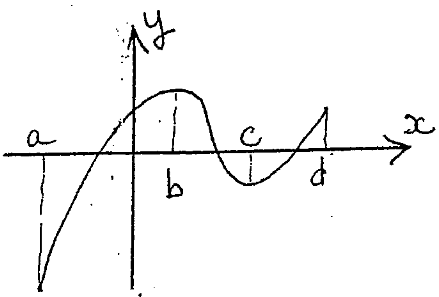
$\Downarrow$

$\exists\, c \in]\frac{1}{e}, 1[$ tel que $x + \ln x = 0$



F7. Extremum d'une fonction

ⓐ

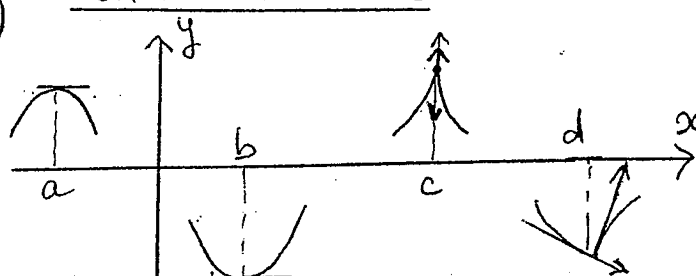


Dans l'intervalle $[a, d]$, y admet

- en a un minimum absolu
- en b un maximum absolu
- en c un minimum relatif
- en d un maximum relatif

ⓑ Condition nécessaire

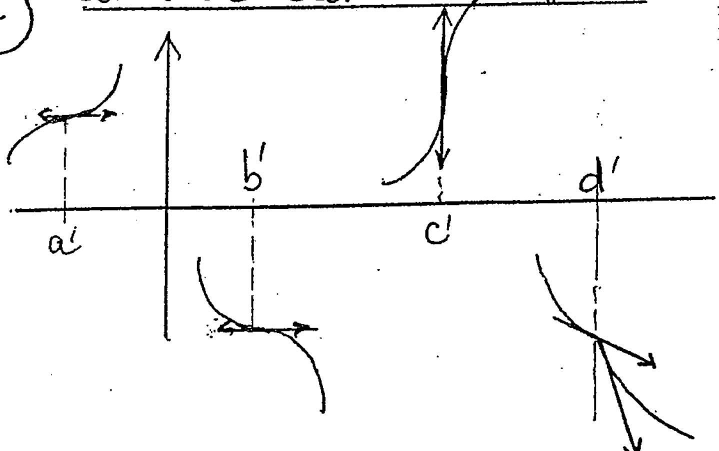
On a ici 4 cas d'extremum



$f'(a) = 0 \qquad f'(b) = 0$

$f'(c) = \pm\infty \qquad f'(d)$ n'existe pas

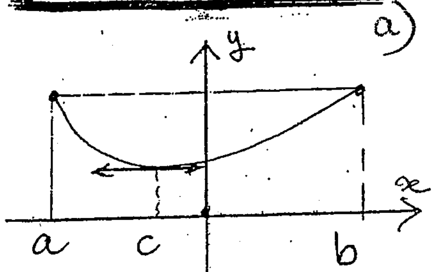
ⓒ Condition nécessaire insuffisante



En a', b', c', d', bien que les conditions nécessaires à un extremum soient remplies, il n'y a <u>pas</u> d'extremum.

En effet la dérivée ne change pas de signe de part et d'autre de chacun des points a', b', c', d', contrairement aux cas précédents a, b, c, d.

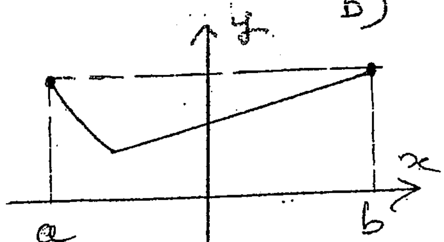
F8. Théorème de Rolle



fct continue sur $[a,b]$
dérivable sur $]a,b[$

$\Downarrow$

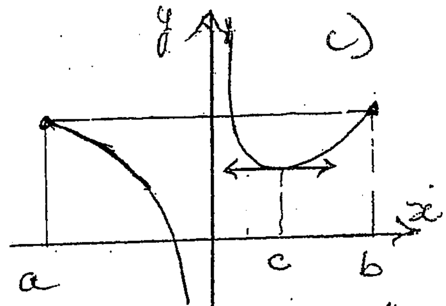
Th. de Rolle satisfait



fct continue sur $[a,b]$
non dérivable sur
$]a,b[$

$\Downarrow$

Les conditions d'application
ne sont pas remplies

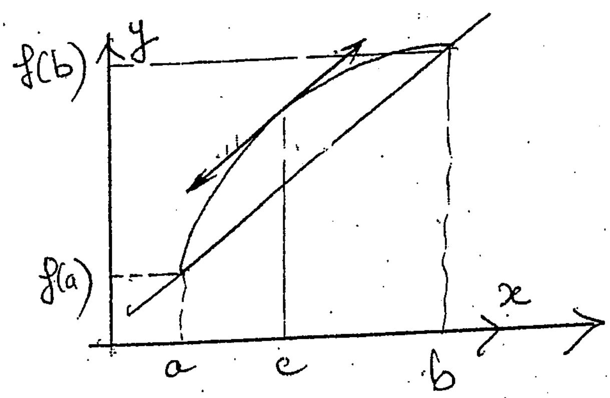


Un théorème "$A \Rightarrow B$"
n'a pas pour
corollaire "$B \Rightarrow A$"

- $f(a) = f(b)$
- $\exists$ une valeur, c, où $f'(c) =$

pourtant la fct n'est pas
continue sur $[a, b]$

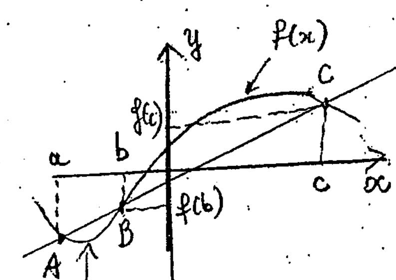
F9. Théorème des Accroissements finis



A méditer :

« Il y a toujours un
instant où le véhicule
a exactement pour vitesse
instantanée la vitesse
moyenne. »

F10. Éléments de démonstration pour le § 12 (convexité)



Courbe convexe
entre A et B

Droite AB : $\dfrac{y - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\hookrightarrow y = (x-a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$

Distance verticale entre corde et courbe au point x, si f est convexe en x : $y - f(x) \geq 0$

$x \in]a,b[\Rightarrow x = a + \lambda(b-a)$ où $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow x = (1-\lambda)a + \lambda b$

$\Rightarrow x - a = \lambda(b-a)$.

$\boxed{\text{Chapitre II : Intégrales des fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$

0. Plan

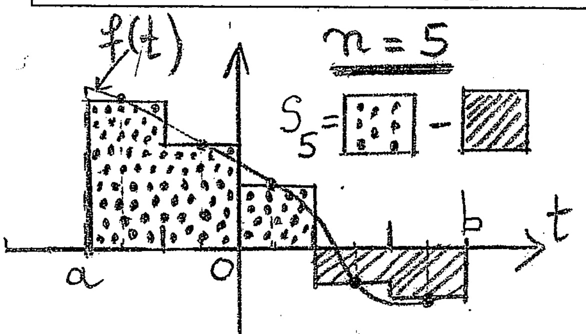
1. L'intégration en tant que limite d'une somme de Riemann : intégrale de Riemann

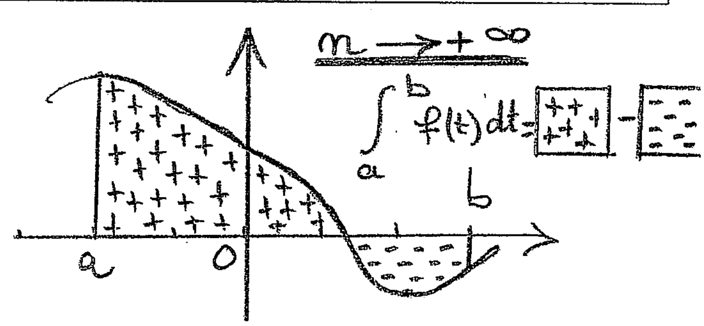
Def.1 : Soit une fonction f de la variable réelle t, continue sur l'intervalle **fermé et borné** $[a, b]$. On approxime cette fonction par une fonction en escalier de n marches de giron $\Delta t = (b-a)/n$, centrées respectivement sur des abcsisses t_1, t_2, ... t_n (Chapitre I,§8).
On calcule l'**aire algébrique** comprise entre cet escalier, l'axe des t horizontal et les deux limites verticales $t = a$ et $t = b$, a et b étant deux constantes :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(t_i)\Delta t \quad \text{qui s'appelle } \textbf{somme de Riemann}$$

L'approximation de l'aire sous f est d'autant meilleure que n est grand ; à la limite ($\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$) on obtient un nombre infini de marches dont le giron tend vers zéro. Cette limite s'appelle intégrale définie de f entre a et b et s'écrit avec le symbole $\int_a^b$ (S allongé).

$$\int_{t=a}^{t=b} f(t)dt \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \int_a^b f(t)dt$$





- On reconnait la variable d'intégration t (variable muette) contenue dans l'élément différentiel dt, la borne inférieure a, la borne supérieure b, l'intégrant $f(t)$
- Cette **intégrale définie est un nombre algèbrique**
- Du point de vue dimensionnel

$$[dt] = [t] \qquad [f(t)dt] = [f(t)][t] \qquad \left[\int_a^b f(t)dt\right] = [f(t)][t]$$

Par exemple, en thermodynamique où P et V sont respectivement une pression et un volume,

$$\left[\int_{V_a}^{V_b} P(V).dV\right] = M.L^2T^{-2} = \text{une énergie}$$

- La définition ci-dessus vaut aussi pour des fonctions présentant sur $[a,b]$ un nombre fini de points de discontinuité finie ou réductible.

2. L'intégration, en tant que tentative de réciproque de la dérivation - Primitive - Intégrale indéfinie ou définie

Def.2 Primitive :
Soient deux applications f et F, de la variable $t \in I \subset \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$. On dit que F est **une primitive de** f **sur** I si,

sur I, l'application F est dérivable et $F'(t) = f(t)$ ce qui équivaut à $dF(t) = f(t).dt$

- Si F est une primitive de f, toute fonction du type $F + C$, où C est une constante quelconque, est encore une primitive de f.
  La dérivée d'une fonction, quand elle existe, est unique, mais il y a une infinité de primitives, quand on en trouve une.
  On utilise la notation $\int f(t)dt$, qu'on appelle **intégrale indéfinie**, sans spécification de bornes et on écrit

$$\boxed{\int f(t)dt = F(t) + C \quad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante quelconque}}$$

- La constante C est déterminée si on impose une condition à la primitive.
- On montre qu'il y a, entre l'intégrale de Riemann et la primitive ci-dessus définie, la relation :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Cette dernière intégrale où des bornes sont spécifiées s'appelle une **intégrale définie**

a noter

Th. 1 : Théorème fondamental de Darboux : Toute fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ admet des **primitives** sur $[a,b]$ et est donc intégrable sur cet intervalle.

?

- Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}$ étant continue sur $[0,\pi]$ est intégrable entre 0 et π
- **Relation de Chasles :** Soient a, b, c trois réels tels que $a < b < c$ et f une fonction continue de $[a,c]$ dans $\mathbb{R}$. On montre que $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

a rajouter

3. Propriétés des intégrales définies de fonctions $C_m([a,b])$

a faire (rajouter avant propriétés)

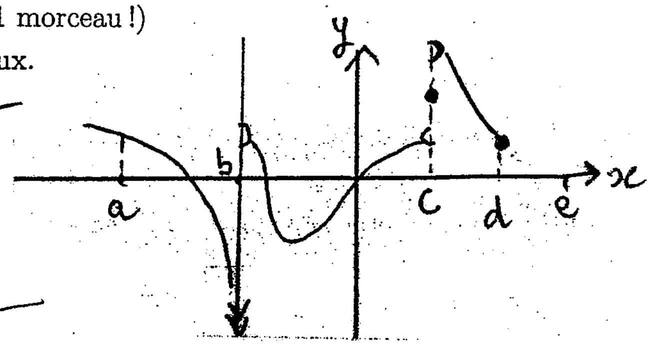
Def. 3 : Fonction continue par morceaux : Une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ si
- f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b
- la restriction de f à $]a,b[$
  i) soit est continue sur $]a,b[$
  ii) soit admet un nombre fini de points de discontinuité, en lesquels f admet une limite à droite et une limite à gauche.

Ces fonctions sont dites $C_m([a,b])$

- Une fonction continue est continue par morceaux (1 morceau !)
- Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.
- $f \in \mathcal{C}_m([a,b]) \implies |f| \in \mathcal{C}_m([a,b])$

• Par exemple la fonction, dont le graphe est dessiné ci-contre, est :
- continue par morceaux sur $[b,d]$
- non continue par morceaux sur $[a,d]$

ex à prendre



Th. 2 : Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable sur$[a,b]$ (donc bornée).

Désormais, dans toute la suite, nous élargissons le cadre des fonctions continues aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle fermé borné.
La définition de l'intégrale de ces fonctions utilise la relation de Chasles sur les divers morceaux ; la valeur numérique de la fonction aux points de discontinuité n'intervient pas.
La borne inférieure n'est pas nécessairement inférieure à la borne supérieure.

Les propriétés :

- Prop. 1 : $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$
- Prop. 2 : Interversion des bornes : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- Prop. 3 : Relation de Chasles , quelle que soit la relation d'ordre entre a, b et c
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$
- Prop. 4 : Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b (k.f)(t)dt = k.\int_a^b f(t)dt$

a faire

- Prop. 5 :Pour les fonctions positives
  - ▷ 5a) $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a,b]$, $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$ $\left(\text{si } a \geq b\,,\ \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq 0\right)$
  - ▷ 5b) $f \geq 0$ sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \implies f(t) = 0\ \ \forall t \in [a,b]$ où f est continue.
  - ▷ 5c) $f \geq 0$ et continue sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f(t) = 0\ \ \forall t \in [a,b]$

a faire

- Prop. 6 :Comparaison $a < b$ et $f \leq g \implies \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ $\left(\text{si } a \geq b\,,\ \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt\right)$
- Prop. 7 :Encadrement : $a < b$ et $\forall t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M \implies m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$
  Ex : $f(x) = \ln x$ entre $[1 \text{ et } e]$
- Prop. 8 : Si $a < b$, alors, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ Ex : $f(x) = \sin x$ entre $[-\pi, \pi]$
- Prop. 9 : Si $a < b$, et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|g(t)| \leq M\ \forall t \in [a,b]$, alors,
$$\left|\int_a^b f(t).g(t)dt\right| \leq M.\int_a^b |f(t)|dt$$
- Prop. 10 : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt\right|$
- Prop. 11 : Si a est un réel fini et f une fonction continue sur $[-a,a]$, alors
$$f \text{ impaire sur } [-a,a] \implies \int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0 \quad \text{et} \quad f \text{ paire sur } [-a,a] \implies \int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2.\int_0^a f(t)\ dt$$

a faire

4. Intégrale fonction de sa borne supérieure

OK à faire après propriétés

En remplaçant, à la borne supérieure, le nombre b par la variable x et en travaillant toujours avec des fonctions $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$, on définit la fonction F à valeurs réelles telle que

$$F : x \in [a,b] \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

qui a les propriétés suivantes :

- Prop. 1 : F est continue sur $[a,b]$
- Prop. 2 : Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors F est croissante sur $[a,b]$
- Prop. 3 : F est dérivable en tout point x de $[a,b]$ où f est continue et $F'(x) = f(x)$
- Prop. 4 :Si la fonction f est continue sur $[a,b]$, alors F est de classe C^1 sur $]a,b[$.

Une des applications de l'intégrale fonction de sa borne supérieure est la définition de la **fonction de répartition** F d'une variable aléatoire continue de densité $f(t)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt$$

5. Théorème de la moyenne

à faire

Th. 3 : Théorème de la moyenne : Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a;b]$, il existe un nombre c entre a et b tel que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$$

Ce nombre $f(c)$ est la **moyenne** de $f(t)$ entre a et b.

Ex : $f(x) = x$ entre 3 et 7 $\to f(5)$

6. Techniques de calcul des intégrales indéfinies ou définies

Il s'agit de trouver une primitive $F(t)$ et, si l'intégrale est définie, d'effectuer la différence F(borne supérieure) $-$ F(borne inférieure). La connaissance que vous avez des dérivées de fonctions élémentaires équivaut à la connaissance de primitives. Il s'agira donc de se ramener à des types d'intégrales indéfinies connues :

à donner

$$\text{Si } \alpha \neq -1,\ \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C^3 \qquad \int e^t dt = e^t + C \qquad \int \cos t.dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t.dt = -\cos t + C \qquad \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C \qquad *\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C \qquad *\int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C$$

$$\int sh\, t.dt = ch\, t + C \qquad \int ch\, t.dt = sh\, t + C \qquad \int \frac{dt}{1-t^2} = argth\, t + C \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = argsh\, t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = argch\ t + C$$

Quand la primitive n'est pas immédiate, il faut tatonner en essayant diverses tactiques :

- Le changement de variable , qui, une fois posé, implique **trois** conséquences :
  - ▷ la différentielle change.
  - ▷ l'intégrant change.
  - ▷ les bornes d'intégration, s'il y en a, changent.

Ex : $\sqrt{\pi} \to 2\sqrt{\pi}$; $2x \cos x^2$; $u = x^2$

[3] Si vous oubliez le symbole "valeur absolue", cela génère une erreur quand t est négatif.

- Quand on a un quotient, l'effectuer ou faire apparaître , au numérateur, le dénominateur ou la dérivée du dénominateur.

- La décomposition en éléments simples, quand on a une fraction rationnelle de polynômes (voir Compléments C1,C2,C3).

- L'intégration par parties , lorsque la fonction $f(t)$, impossible à intégrer directement, peut se mettre sous forme d'un produit $U(t) \times dV(t)$ de deux parties . On peut alors montrer (Cours Ecue 52U6MT11 de G. Guiffant 2006/07 page 55-56)

Ex : $\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\left(\frac{\ln(\sin x)}{(\cos x)^2}\right)$

$$\int_a^b U(t) \times dV(t) = [U(t) \times V(t)]_a^b - \int_a^b V(t) \times dU(t)$$

Toute l'art réside dans le choix astucieux du découpage en deux parties.

$f = \ln(\sin x)$ $f' = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

$g' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $g = \tan x$

- Deux intégrations par parties successives $x^2 e^x$

- La linéarisation de degré 2 des fonctions trigonométriques

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \quad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \quad \tan^2 t = \frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$$

- Le calcul à l'ordre le plus bas, puis l'élaboration d'une formule de réduction ou de récurrence.

7. Intégrale généralisée dite aussi intégrale impropre

Le mot "généralisé" est employé pour signifier que la fonction qu'on intègre entre a et b n'est plus continue par morceaux sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. Cela se produit de diverses façons :

– i) Une ou les deux bornes sont infinies , c'est-à-dire l'intervalle d'intégration n'est plus borné

– ii) La fonction n'est pas définie en a, en b ou en un point (ou un nombre fini de points) entre a et b et elle n'y est pas prolongeable par continuité. Exemples : fonction continues sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$ ou sur $([a, b] - c \in]a, b[)$.

– iii) un mélange des cas précédents

Def.4 : Fonctions localement intégrables : On dit qu'une fonction f est localement intégrable sur I si I, éventuellement privé d'un nombre fini de points (soit I') appartient à $\mathcal{D}_{def}(f)$ [a] et si pour tout segment J inclus dans I', la restriction de f à J est continue par morceaux.

[a] $+\infty$ est considéré comme un point, de même que $-\infty$

- Exemples : la fonction $f : x \longmapsto \ln(\tan x)$ est localement intégrable sur $I = [0, \pi/2]$ car il suffit d'enlever 2 points, 0 et $\pi/2$ à I ; par contre elle est non localement intégrable sur $I = [-\pi/2, \pi/2]$ parce qu'il faut enlever l'infinité de points de $[-\pi/2, 0]$

- Pour q'une fonction soit intégrable sur I, il est nécessaire qu'elle soit localement intégrable. **C'est donc la première chose à vérifier et à signaler.**

- Pour définir les intégrales généralisées, on passe alors par la notion de limite.

  L'existence de ces intégrales se trouve donc asservie à l'existence de ces limites.

Def.5

Cas a) Une ou deux bornes infinies

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^\alpha f(t)dt + \lim_{y\to+\infty}\int_\alpha^y f(t)dt \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel fini quelconque.}$$

Voir commentaire ci-dessous

Les deux limites constituant la dernière définition doivent exister indépendamment l'une de l'autre et le résultat ne doit pas dépendre du nombre α. Autrement dit, si l'une des deux limites n'existe pas (est infinie), alors le premier membre de l'équation n'existe pas.

• **Attention**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{+x} f(t)dt$$

Par exemple : $\int_{-x}^{+x}\sin(t)dt = 0$ mais $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)dt$ diverge.

Cas b) ou c) : bornes finies mais fonction non définie ou non continue en a, b ou c

$\mathcal{D}_{def}(f)$ ou $\mathcal{D}_{cont}(f)$	$\int_a^b f(t)dt =$
$]a,b]$	$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$
$[a,b[$	$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$
$[a,b]-c \in]a,b[$	$\lim_{x_1\to c^-}\int_a^{x_1} f(t)dt + \lim_{x_2\to c^+}\int_{x_2}^b f(t)dt$

Commentaire de la ligne précédente : S'il y a un point $t=c$ de discontinuité entre a et b, on décompose l'intégrale en deux intégrales, de a à c et de c à b, chacune étant localement intégrables. Les deux limites doivent exister indépendamment.

Exemples du cas a) : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t} = +\infty$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = 1$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 1$ (Gaussienne)

$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$ n'existe pas.

Exemples du cas b ou c) : $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2} = +\infty$ $\quad \int_0^1 \ln t\, dt = -1$ $\quad \int_{-1}^{1} -\ln|t|\, dt = 2$

Def.6 : On dit, d'une intégrale généralisée aboutissant à une limite infinie, qu'elle **n'existe pas** ou qu'elle est **divergente**. Celle qui aboutit à une limite finie **existe** et est dite **convergente**.

- **Propriétés des intégrales généralisées :** Attention, la propriété de linéarité n'est satisfaite que si on traite des intégrales convergentes ; exemple : $\int_0^{+\infty}(1-1)dt = 0$ alors que $\int_0^{+\infty} 1.dt$ diverge.
- **Applications de la notion d'intégrale généralisée en cours de probabilité :**

  ▷ Moment m_k d'ordre k d'une variable aléatoire réelle continue de densité $f(t)$:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$$

  ▷ Le moment m_1, d'ordre 1 étant la **moyenne** m, on définit aussi μ_k, moment centré d'ordre k, par :

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^k\ f(t)\ dt$$

  Le moment centré d'ordre 2 est la variance.

  ▷ Intégrales concernant la Gaussienne ou loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance m et d'écart-type σ :

$$\text{Normalisation à 1 :} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\ dt = 1 \qquad \text{Moyenne :} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t.e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\ dt = \mu$$

$$\text{Variance :} = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\ dt\right] - \mu^2 = \sigma^2$$

  ▷ Intégrales concernant la loi exponentielle de paramètre λ, réel constant :

$$\text{Normalisation à 1 :} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 \qquad \text{Moyenne : } m = \int_0^{+\infty} \lambda t.e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Variance :} \left[\int_0^{+\infty} \lambda t^2.e^{-\lambda t} dt\right] - m^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Premier critère de convergence : Si le calcul de la primitive est facile, il suffit d'étudier l'existence des limites définies en Def.5

8. Critères de convergence des intégrales généralisées de fonctions $\mathcal{C}_m(I)$ positives

Th. 4 : Théorème fondamental pour les fonctions positives :

- **Cas gauche :** Soient a et b deux réels tels que $-\infty \leq a < b < +\infty$. On pose $I =]a, b]$. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$ positive.

  Alors $F : x \to F(x) = \int_x^b f(t)\ dt$ est décroissante sur I et $\int_a^b f(t)\ dt$ existe $\Leftrightarrow$ F est majorée sur I.

  Si elle n'est pas majorée, alors $\int_a^b f(t)\ dt$ diverge selon $\lim_{x \to a^+} F(x) = +\infty$.

- **Cas droit :** Soient a et b deux réels tels que $-\infty < a < b \leq +\infty$. On pose $I = [a, b[$. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$ positive.

  Alors $F : x \to F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ est croissante sur I et $\int_a^b f(t)\ dt$ existe $\Leftrightarrow$ F est majorée sur I.

  Si elle n'est pas majorée, alors $\int_a^b f(t)\ dt$ diverge selon $\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$

Voir figures F1.

exemple : $f(x) = x$ (cas gauche cas droit)

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ $\left(\leq \frac{1}{1+t^2}\right)$ converge vers $\pi/2$ en $+\infty$ arctan t

Th. 5 : Critère de comparaison :

- Hypothèses du cas droit ET
une fonction $g \in \mathcal{C}_m(I)$ positive telle qu'il existe $c \in I$ tel que $\forall t \in [c, b[\quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$

- Hypothèses du cas gauche ET
une fonction $g \in \mathcal{C}_m(I)$ positive telle qu'il existe $c \in I$ tel que $\forall t \in]a, c] \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Dans les deux cas, on a la conclusion : Si $\int_a^b g(t)\, dt$ converge , $\int_a^b f(t)\, dt$ converge aussi.

Si $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge , $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge aussi. Voir figures F2.

$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\, dt$ continue sur $]0\ 1]$ > 0

Th. 6 : Critère d'équivalence :

- Hypothèses du cas droit ET
une fonction $g \in \mathcal{C}_m(I)$ telle que $g \sim f$ quand $x \to b^-$ et f est de signe constant au voisinage de b^-

- Hypothèses du cas gauche ET
une fonction $g \in \mathcal{C}_m(I)$ telle que $g \sim f$ quand $x \to a^+$ et f est de signe constant au voisinage de a^+.

Dans les deux cas, on a la conclusion : $\int_a^b f(t)\, dt$ est de même nature (convergente ou divergente) que $\int_a^b g(t)\, dt$ (ce qui ne signifie pas qu'elles sont égales !).

en 0 $\frac{\sin\sqrt{t}}{t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$
or $\int_0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge
donc $\frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ conv.

9. Critère de convergence par la convergence absolue

Def.7 Si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge, alors on dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ **converge absolument.**

Th.7 Une intégrale absolument convergente est convergente.

10. Intégrales célèbres

On utile souvent, comme référence dans le cadre du **critère de comparaison**, les intégrales de Riemann :

Th. (8) des intégrales de Riemann : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1 \qquad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Si α ne satisfait pas ces inégalités, ces intégrales divergent.

Ce théorème permet de démontrer le suivant :

Th. (9) de l'intégrale de Bertrand :
Soient a et b deux réels, l'intégrale de Bertrand

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^a.(\ln t)^b} \text{ converge} \Leftrightarrow a > 1 \quad \text{ou} \quad a = 1 \text{ et } b > 1$$

Les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$, $n \in \mathbb{N}$ permettent de donner une approximation de $n!$ quand n est très grand (formule de Stirling)

11. Plan d'étude d'une intégrale

- S'il n'y a pas de bornes, intégrale indéfinie ; chercher une primitive
- S'il y a des bornes a et b
  - ▷ Si l'intégrant est continu sur $[a, b]$, l'intégrale est intégrable
  - ▷ Si l'intégrant n'est pas continu sur $[a, b]$, on a une intégrale impropre ; vérifier alors que l'intégrale est localement intégrable, et, si c'est le cas, diviser l'intervalle d'intégration en morceaux puis passer par les limites

12. Compléments

Complément II-C1 : Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont
- les polynômes de degré 1, du type $(x - p)$ où $p \in \mathbb{R}$
- les polynômes de degré 2 sans racine réelle, du type $(x^2 + px + q)$ où p et q sont deux réels tels que $p^2 - 4q < 0$

Tout polynôme $P(x)$, dans les réels, se décompose de manière unique en un produit de polynômes irréductibles. Par exemple :

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$$

Pour ceux qui se poseraient des questions : tout polynôme à coefficients réels, en $x \in \mathbb{R}$, de degré impair, a au moins une racine réelle ; donc il est réductible en produit de polynômes de degré inférieur à 3.

Complément II-C2 : Fraction irréductible dans $\mathbb{R}$

Dans la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de deux polynômes en x est dite **fraction irréductible** si, après avoir factorisé le numérateur et le dénominateur, ceux-ci n'ont aucun facteur commun.

Complément II-C3 : Décomposition en éléments simples

Toute fraction irréductible $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit de manière unique sous forme de la somme d'éléments simples (dits aussi fractions élémentaires) : il s'agit de la somme de termes du type

$$\frac{A}{(x-p)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} \quad \text{où} \quad p^2 - 4q < 0 \quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

Les lettres A, B, C, D, E,... utilisées ici sont des coefficients réels constants spécifiques à la fraction traitée.

Voici les différents types de cas possibles dans $\mathbb{R}$:

- Le dénominateur $Q(x)$ a 2 racines réelles simples x_1 et x_2. Alors il existe deux coefficients constants A et B tels que

$$\frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

- Le dénominateur $Q(x)$ a 1 racine réelle simple x_1 et 1 racine réelle triple x_2. Alors il existe quatre coefficients constants A, B, C et D tels que

$$\frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)^3} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{(x - x_2)^2} + \frac{D}{(x - x_2)^3}$$

- Le dénominateur $Q(x)$ contient, entre autres, un polynôme de deuxième degré sans racine réelle . Exemple :

$$\frac{P(x)}{(x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

- Le dénominateur $Q(x)$ contient, entre autres, un polynôme de deuxième degré sans racine réelle et à la puissance 2 . Exemple :

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Complément II-C4 : Primitives non explicitables

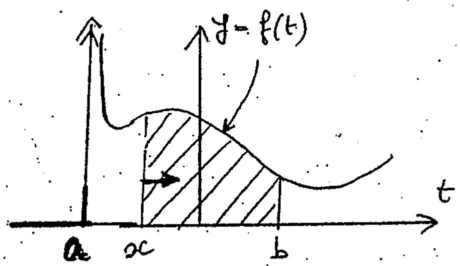
Toute fonction élémentaire a pour dérivée une fonction élémentaire. Par contre il existe des fonctions continues dont la primitive ne peut pas s'expliciter sous forme de fonctions élémentaires. C'est le cas de

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt\ ,\ \int e^{t^2}dt\ ,\ \int \frac{e^t}{t}dt\ ,\ \int \sin(t^2)dt\ ,\ \int \cos(e^t)dt\ ,\ \int \sqrt{t^3+1}\,dt\ ,\ \int \frac{dt}{\ln t}\ ,\ \int \frac{\sin t}{t}dt$$

13. Figures

F1. Figures se rapportant au théorème fondamental (§8 p.30)

Cas gauche

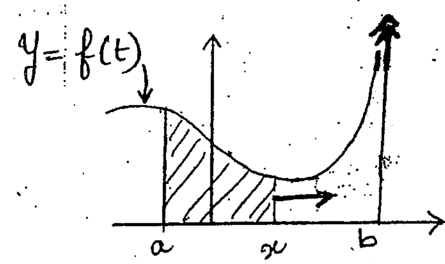


F(x) est décroissante

Si F est non majorée

$F(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$

Cas droit



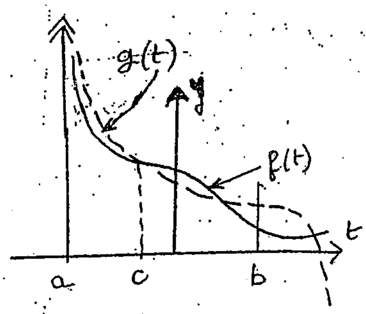
F(x) est croissante

Si F est non majorée

$F(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$

F2. Figures se rapportant au critère de comparaison (§8. p.30)

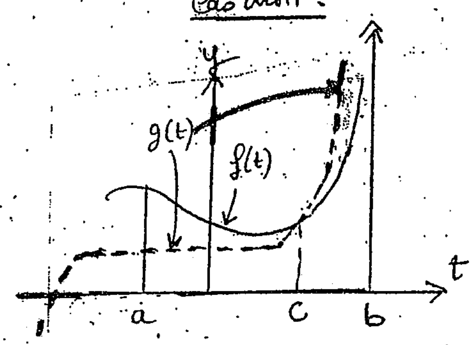
Cas gauche



$\exists c \in]a,b]$ tel que $\forall t \in]a,c]$

$0 \leq f(t) \leq g(t)$

Cas droit



$\exists c \in [a,b[$ tel que $\forall t \in [c,b[$

$0 \leq f(t) \leq g(t)$

Alors $\int_a^b g(t)\,dt$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ CV et $\int_a^b f(t)\,dt$ DV $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ DV

Chapitre III : Equations différentielles ordinaires (EDO), d'ordre 1 et 2 Solutions dans $\mathbb{R}$

0. Plan

1. Généralités

Ce qui suit est un rappel des résultats et techniques de résolution. Pour plus de détails ainsi que les démonstrations, voir le poly de P. Dantan pour MT112 de 1999-2000, distribué avant Noël.

- On rappelle
  - ▷ le nombre i, imaginaire pur, tel que $i^2 = -1$
  - ▷ l'expression exponentielle d'un nombre complexe : $e^{(\alpha+i\omega)x} = e^{\alpha x}[\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)]$
- Dans tout ce chapitre, les symboles y, y_o, y_1, y_2 désignent des fonctions **à valeurs réelles de la variable réelle** x**, continues** .

  Les symboles y', y'_o, y'_1, y'_2 désignent leur dérivée respective , par rapport à x..

  Quelquefois, pour ne pas alourdir l'écriture, nous avons omis "(x)" après les symboles de fonctions.
- Une EDO **d'ordre** n est une relation entre la fonction y et ses dérivées jusqu'à l'ordre n . Nous ne traiterons ici que des cas où $n = 1$ ou 2.
- L'adjectif **ordinaire** est consacré au cas où y est une fonction d'une seule variable appartenant à $\mathbb{R}$
- Résoudre une équation différentielle consiste à **trouver** **<u>les</u> fonctions** y de la variable x satisfaisant cette équation [ou **<u>la</u> fonction**, si des conditions initiales doivent être satisfaites].
- On dit qu'une EDO est **linéaire** si

$$y_1 \text{ et } y_2 \text{ solutions de l'EDO} \implies y_1 + y_2 \text{ et } ky_1 \text{ solutions de la même EDO, où } k \in \mathbb{R}$$

Par exemple

$$y'.y = \ln\left[\ arctan(\sqrt{x^{7,5}})\ \right] \text{ n'est pas une EDO linéaire}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left[\ arctan(\sqrt{x^{7,5}})\ \right] \text{ est une EDO linéaire}$$

- Au programme des concours 2010, on peut lire (sic) :
  - ▷ Pour les VETO
    - à variables séparées
    - linéaires de premier ordre
    - linéaires du second ordre à coefficients constants (mail du 8/09/2009 : avec second membre "sous la forme d'un polynôme ou d'un polynôme × une exponentielle ou la somme de deux fonctions de ce type; les exponentielles peuvent et ")
  - ▷ Pour les AGRO
    - Equation différentielle linéaire du premier ordre : méthode de variation de la constante
    - Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants à second membre constitué d'un polynôme ou du produit d'un polynôme par une fonction trigonométrique.

2. EDO du 1^{er} ordre, à variables séparables : $y' A(y) = B(x) \quad (1)$

A et B étant des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, connues, elle s'écrit aussi :

$$A(y)\ dy = B(x)\ dx$$

Elle se ramène donc à une opération déjà apprise : intégration par rapport à x dans le membre de droite, par rapport à y dans le membre de gauche ; c'est-à-dire que pendant cette dernière intégration, y joue temporairement le rôle d'une variable.

- La solution peut se présenter sous forme explicite [$y(x) = ...$] ou sous forme implicite [$F(x, y) = 0$].
- Il y a une constante d'intégration dans chaque membre ; on les regroupe en une seule K. Sans autre information que (1), la solution générale de l'EDO à variables séparables est la famille de fonctions engendrée par toutes les valeurs que peut prendre, dans $\mathbb{R}$, la constante K.
- Si une condition initiale est imposée, cela détermine la constante d'intégration et le famille précédente se réduit à une seule fonction
- Remarquez qu'une EDO du 1^{er} ordre, à variables séparables n'est pas nécessairement linéaire.
- **Cas particulier important pour la suite :** $y'/y = B(x)$ ou $y' = y.B(x)$
  A part la solution triviale $y(x) = 0\ \forall x$, on doit résoudre $\dfrac{dy}{y} = B(x)\ dx$,
  ce qui donne $\ln|y| = \left(\int B(x)\ dx\right) + C$ où C est une constante réelle quelconque.
  ou, en prenant l'exponentielle des deux membres $|y| = e^{\left(\int B(x)\ dx\right) + C} = e^{C}.e^{\left(\int B(x)\ dx\right)}$
  ou, en posant $\pm e^{C} = K$

$$y(x) = K\ e^{\left(\int B(x)\ dx\right)} \quad \text{où } K \text{ est un réel quelconque}$$

3. Points communs à la résolution des EDO linéaires du 1^{er} et $2^{ième}$ ordre aux programmes

- On utilise les abréviations suivantes :
  GSSM = solution **générale de l'équation sans second membre**, notée $y_o(x)$
  PASM = solution**particulière de l'équation avec second membre**, notée $y_1(x)$
  GASM = solution **générale de l'équation avec second membre**, notée $y(x)$

- L'expression consacrée "sans second membre" veut dire **avec un second membre nul.** L'expression consacrée "avec second membre" veut dire **avec un second membre non nul.**
- L'adjectif "linéaire" pour les EDO d'ordre 1 et 2 que nous allons étudier se justifie en ce qui concerne l'équation homogène , c'est-à-dire l'EDO sans second membre.
- On démontre (voir poly de cours Dantan) que :

$$\boxed{\text{GASM} = \text{GSSM} + \text{PASM} \qquad \text{soit } y(x) = y_o(x) + y_1(x)}$$

- Il peut être astucieux de regarder dès le début s'il y a une PASM évidente. par exemple :
  $4y' + 5y = 6$ admet $y_1(x) = 6/5\ \forall x$ comme PASM.
  $2y'' + y' - 2y = e^x$ admet $y_1(x) = e^x$ comme PASM.
  Il ne reste alors plus qu'à résoudre l'EDO sans second membre.

- Il est facile de vérifier que

- **pour une EDO linéaire du 1er ordre**
$$\left\{\begin{array}{l} y_1' + y_1P(x) = Q_1(x) \\ y_2' + y_2P(x) = Q_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow y_1 + y_2 \text{ est solution de } y' + yP(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$$
- **pour une EDO linéaire du 2^{ième} ordre à coefficients constants**
$$\left\{\begin{array}{l} ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1(x) \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow y_1 + y_2 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy_1 = f_1(x) + f_2(x)$$
- **pour une EDO non linéaire comme celle de Bernoulli** ce principe n'est pas valide.

• Lorsque des conditions initiales' sont données, elles doivent être appliquées à GASM ; elles fixent alors la (1er ordre) ou les (2^{ième} ordre) constante(s) d'intégration.

4. EDO linéaire du 1er ordre : $y' + yP(x) = Q(x)$ (2)

P et Q étant des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, connues. Le second membre est $Q(x)$. Il y a 3 étapes dans la résolution :

☞ **Etape 1 : GSSM** = Recherche de la solution **générale y_o de l'équation homogène associée**(c'est-à-dire sans second membre) :

$$\boxed{y_o' + y_oP(x) = 0 \quad (2.a)}$$

C'est une EDO à variables séparables. Le cas particulier du paragraphe précédent nous indique que la solution générale de (2.a) est

$$\boxed{y_o(x) = K\ e^{-[\int P(x)dx]} \text{ où } K \text{ est un réel quelconque}}$$

☞ **Etape 2 : PASM** = Recherche d'une solution **particulière y_1 de l'équation avec second membre**

$$\boxed{y_1' + y_1P(x) = Q(x) \quad (2.b)}$$

par la **méthode de variation de la constante :** K devient $k(x)$, fonction k de x à trouver.

On cherche une solution particulière y_1 de l'équation (2.b) sous la forme

$$y_1 = k(x)\ e^{-[\int P(x)dx]}$$

Pour cela, on calcule la dérivée

$$y_1' = k'(x)\ e^{-[\int P(x)dx]} - k(x)\ P(x)\ e^{-[\int P(x)dx]}$$

et on reporte dans (2.b), deux termes se compensent et il ne reste plus que :

$$k'(x) = \frac{Q(x)}{e^{-[\int P(x)dx]}}$$

C'est-à-dire une équation à variables séparables $dk = \dfrac{Q(x)}{e^{-[\int P(x)dx]}}\ dx$

dont la solution donne l'expression explicite de $k(x)$.
La solution particulière cherchée est

$$\boxed{y_1(x) = k(x)\ e^{-[\int P(x)dx]}}$$

☞ **Etape 3 : GASM** = Obtention de la solution **générale de l'équation (2) avec second membre** :

$$\boxed{y(x) = y_o(x) + y_1(x)} \quad (2.c)$$

Soit, au final,

$$\boxed{\boxed{y(x) = [K + k(x)]\ e^{-[\int P(x)dx]} \quad \text{où } K \text{ est un réel quelconque}}}$$

Sans autre information que (2), la solution générale de l'EDO linéaire du premier ordre est la famille de fonctions engendrée par toutes les valeurs que peut prendre, dans $\mathbb{R}$, la constante K.

5. EDO linéaire du $2^{ième}$ ordre, à coefficients constants : avec second membre : $ay'' + by' + cy = f(x)$ (3)

Les coefficients a , b , c sont des réels constants et f est une fonction continue connue. Le second membre est $f(x)$. Il y a 3 étapes dans la résolution :

☞ Etape 1 : GSSM = Recherche de <u>la</u> solution <u>**générale** y_o **de l'équation homogène associée**</u> (c'est-à-dire **sans second membre**) :

$$\boxed{ay_o'' + by_o' + cy_o = 0 \quad (3.a)}$$

Bien sûr $[y_o(x) = 0 \; \forall x]$ est solution triviale mais improductive. On cherche donc une solution générale de (3.a) sous une forme astucieuse

$$y_o = e^{rx} \quad r \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire en fait qu'<u>on cherche les valeurs réelles ou complexes de r</u> qui rendent y_o solution de (3.a). Les dérivées successives étant $y_o' = re^{rx}$ et $y_o'' = r^2 e^{rx}$, l'équation différentielle (3.a) se transforme alors en équation algébrique en r :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0 \quad \text{dite \textbf{équation caractéristique} (EC), de racines } r_1 \text{ et } r_2}$$

De façon générale, l'équation (3.a) admet alors comme solution :

$$y_o(x) = \mathbb{C}_1 e^{r_1 x} + \mathbb{C}_2 e^{r_2 x} \quad \text{où } \mathbb{C}_1 \text{ et } \mathbb{C}_2 \in \mathbb{C}$$

• En anticipant sur le cours d'Algèbre Linéaire (second semestre), nous pouvons dire que le système $\{e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}\}$ constitue une base pour l'espace vectoriel des solutions de (3.a) ; dit plus simplement, toute combinaison linéaire de $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ est solution.

Cependant nous ne cherchons que les solutions où $y_o(x)$ est réel ; cela entraine, suivant le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, les solutions explicitées dans le tableau suivant :

Δ	> 0 r_1 et r_2 réels distincts	< 0 r_1 et r_2 complexes conjugués	$=0$ $r_1 = r_2$ réel
racines de L'EC	$r_1 = \alpha + \omega$ et $r_2 = \alpha - \omega$ α et $\omega \in \mathbb{R}$ $\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$	$r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ α et $\omega \in \mathbb{R}$ $\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$r_1 = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha = \frac{-b}{2a}$
$y_o(x) =$	$k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$	$e^{\alpha x}[\, k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)\,]$	$(k_1 + x k_2) e^{r_1 x}$
	où k_1 et k_2 sont 2 réels quelconques		
Ecritures équivalentes	$k_1 e^{\alpha x}\, ch(\omega x + k_2)$ $k_1 e^{\alpha x}\, sh(\omega x + k_2)$	$k_1\, e^{\alpha x} \cos(\omega x + k_2)$ $k_1\, e^{\alpha x} \sin(\omega x + k_2)$	
	où k_1 et k_2 sont 2 autres réels quelconques		

• Dans tous les cas, la solution générale réelle d'une équation de type (3.a) contient deux constantes d'intégration.

- Les "écritures équivalentes" du tableau sont expliquées dans les compléments III-C1 et C2.
- Dans le cas où l'on trouve une racine réelle double r_1 alors le système $\{e^{r_1 x}, x.e^{r_1 x}\}$ constitue une base des solutions réelles de (3.a).

☞ Etape 2 : PASM = Recherche d'<u>une</u> solution <u>particulière y_1 de l'équation avec second membre</u>

$$\boxed{ay_1'' + by_1' + cy_1 = f(x) \quad (3.b)}$$

Cette recherche est <u>fortement orientée</u> par la forme de la fonction f :
- On fait l'hypothèse d'une solution particulière dont l'allure est similaire à f, mais dépendant de <u>coefficients à déterminer</u>
- On la dérive deux fois
- On injecte dans (3.b)
- On <u>détermine ces coefficients par identification</u>

On se limite ici à deux cas de seconds membres :

- **Cas 1)** $\boxed{f(x) = P(x)\ e^{\lambda x} \qquad P(x) = \text{polynôme en } x, \text{de degré } n, \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

Il est alors conseillé (car on la trouve!) de chercher une solution particulière de (3.b) sous la forme

$$y_1(x) = Q(x)\ e^{\lambda x} \quad \text{où} \quad Q(x) = \text{polynôme à déterminer} \begin{cases} \text{de degré } n & \text{si } \lambda \text{ non racine de l'EC} \\ \text{de degré } n+1 & \text{si } \lambda \text{ racine simple de l'EC} \\ \text{de degré } n+2 & \text{si } \lambda \text{ racine double de l'EC} \end{cases}$$

La constante λ est la même dans $y_1(x)$ et $f(x)$

▷ <u>Si λ n'est pas racine de l'EC</u>, on postule que le polynôme $Q(x)$ à déterminer est du type

$$Q(x) = \gamma + \delta x + \epsilon x^2 + \ \dots + \zeta x^{n-1} + \eta x^n$$

et on détermine, par identification, les $(n+1)$ coefficients γ, ... η qui rendent

$$y_1(x) = (\gamma + \delta x + \dots + \eta x^n)\ e^{\lambda x}$$

solution particulière de (3.b)

▷ <u>Si λ est racine simple de l'EC</u>, cela signifie que $k_1 e^{\lambda x}$ est solution de (3.a), où k_1 est un réel quelconque; il est donc **inutile de conserver, lors de l'étape 2, le terme constant** dans le polynôme $Q(x)$ de degré $n+1$ c'est-à-dire le terme $\gamma e^{\lambda x}$ dans $y_1(x)$.
En effet il disparaît lors de l'identification; cette disparition est sans conséquence nuisible car la GSSM contient déjà le terme en question, sous la forme $k_1 e^{\lambda x}$.
On détermine donc, par identification, les $(n+1)$ coefficients δ..., ξ de la solution postulée :

$$y_1(x) = (\delta x + \dots + \eta x^n + \xi x^{n+1})\ e^{\lambda x}$$

▷ <u>Si λ est racine double de l'EC</u>, cela signifie que $(k_1 + xk_2)e^{\lambda x}$ est solution de (3.a), où k_1 et k_2 sont des réels quelconques; il est donc **inutile de conserver, lors de l'étape 2, les termes de degré inférieur ou égal à 1** dans le polynôme $Q(x)$ de degré $n+2$, c"est-à-dire le terme $(\gamma + \delta x)e^{\lambda x}$ dans $y_1(x)$.
En effet ils disparaîssent lors de l'identification; cette disparition est sans conséquence nuisible car la GSSM contient déjà les termes en question, sous la forme $(k_1 + Xk - 2)e^{\lambda x}$.
On détermine donc, par identification, les $(n+1)$ coefficients ϵ..., χ de la solution postulée :

$$y_1(x) = (\epsilon x^2 + \dots + \xi x^{n+1} + \chi x^{n+2})\ e^{\lambda x}$$

▷ **Attention** Si le second membre est un simple polynôme, cela revient au cas où $\lambda = 0$; il ne faut alors pas oublier de regarder si 0 est racine de l'EC.

• Cas 2)

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} E(x)\ e^{\lambda x}\ \cos(\beta x + \phi) \\ \text{ou} \\ E(x)\ e^{\lambda x}\ \sin(\beta x + \phi) \end{cases} \quad \text{où } E(x) = \text{polynôme en } x, \text{de degré } n, \text{ et } \lambda, \beta, \phi \in \mathbb{R}}$$

Il est alors conseillé (car on la trouve !) de chercher une solution particulière de (3.b) sous la forme

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\ [G(x)\cos(\beta x) + H(x)\sin(\beta x)]$$

$$\text{où } G(x) \text{ et } H(x) ==\text{polynômes à déterminer} \begin{cases} \text{de degré } n & \text{si } \lambda + i\beta \text{ non racine de l'EC} \\ \text{de degré } n+1 & \text{si } \lambda + i\beta \text{ racine de l'EC} \end{cases}$$

Les constantes λ et β sont les mêmes dans $y_1(x)$ et $f(x)$

▷ Si $\lambda + i\beta$ n'est pas racine de l'EC, on postule que les polynômes $G(x)$ et $H(x)$ à déterminer sont du type

$$G(x) = \gamma_G + \delta_G x + ... + \eta_G x^n \quad \text{et} \quad H(x) = \gamma_H + \delta_H x + ... + \eta_H x^n$$

et on détermine les $2(n+1)$ coefficients $\gamma_G,\ ..., \eta_G,\ \gamma_H,\ ..., \eta_H$ qui rendent

$$y_1(x) = e^{\lambda x}[(\gamma_G + ... + \eta_G x^n)\cos(\beta x)\ +\ (\gamma_H + ... + \eta_H x^n)\sin(\beta x)\ ]$$

solution particulière de (3.b)

▷ Si $\lambda + i\beta$ est racine de l'EC, cela signifie que $e^{\lambda x}[\ k_1\cos(\beta x) + k_2\sin(\beta x)\ ]$ est solution de (3.a), où k_1 et k_2 sont des réels quelconques ; il est donc **inutile de conserver, lors de l'étape 2, les termes constants** dans les polynômes $G(x)$ et $H(x)$ de degré $n+1$, c'est-à-dire le terme $e^{\lambda x}[(\gamma_G\cos(\beta x)\ +\ \gamma_H\sin(\beta x)\ ]$.
En effet ils disparaissent lors de l'identification ; cette disparition est sans conséquence nuisible car la GSSM contient déjà les termes en question sous la forme $e^{\lambda x}[k_1\cos[\beta x) + k_2\sin[\beta x)$
On détermine donc par identification, les $2(n+1)$ coefficients $\delta_G...,\ \xi_G,\ \delta_H...,\ \xi_H$, de la solution postulée :

$$y_1(x) = e^{\lambda x}[(\delta_G x + ... + \chi_G x^{n+1})\cos(\beta x)\ +\ (\delta_H x + ... + \chi_H x^{n+1})\sin(\beta x)\ ]$$

☞ Etape 3 : GASM = Obtention de la solution **générale de l'équation avec second membre (3)** :

$$\boxed{y(x) = y_o(x) + y_1(x) \quad (3.c)}$$

Sans autre information que (3), la solution générale de l'EDO linéaire du second ordre à coefficients constants est la famille de fonctions engendrée par toutes les valeurs que peuvent prendre, dans $\mathbb{R}$, les constantes

• Si le coefficient a de l'équation (3b) vaut zéro, on a affaire à une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. La PASSM peut être trouvée soit par la méthode de variation de la constante (§4, étape 2), qui est valide quel que soit le second membre ; mais elle peut aussi être trouvée par la méthode ci-dessus si le second membre est du type cas 1) ou cas 2).

6. Compléments

Complément III-C1

Montrons les équivalences d'écriture signalées dans le tableau de la section 5 :

$\boxed{k_1 \cos(\omega x + k_2)}$ $k_1[\cos(\omega x)\cos k_2 - \sin(\omega x)\sin k_2]$ $[k_1 \cos k_2]\cos(\omega x) - [k_1 \sin k_2]\sin(\omega x)$	$\boxed{k_1\ ch(\omega x + k_2)}$ $k_1[ch(\omega x) ch\ k_2 + sh(\omega x) sh\ k_2]$ $[k_1 ch\ k_2] ch(\omega x) + [k_1 sh\ k_2] sh(\omega x)$
$\boxed{C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)}$	$\boxed{C_1 ch(\omega x) + C_2 sh(\omega x)}$
$C_1 = k_1 \cos k_2$ et $C_2 == k_1 \sin k_2$ $C_1/C_2 = \tan k_2$ et $C_1{}^2 + C_2{}^2 = k_1{}^2$	$C_1 = k_1 ch\ k_2$ et $C_2 == k_1 sh\ k_2$ $C_1/C_2 = th\ k_2$ et $C_1{}^2 - C_2{}^2 = k_1{}^2$
où k_1, k_2 quelconques $\in \mathbb{R} \Rightarrow$	C_1, C_2 quelconques $\in \mathbb{R}$
$C_1(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}) + C_2(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2})$	$C_1(\frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}) + C_2(\frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2})$
$\boxed{K_1 e^{i\omega x} + K_2 e^{-i\omega x}}$	$\boxed{K_1 e^{\omega x} + K_2 e^{-\omega x}}$
où C_1, C_2 quelconques $\in \mathbb{R} \Rightarrow$	K_1, K_2 quelconques $\in \mathbb{R}$

Complément III-C2

Montrons que quel que soit x ,

$$y_o(x) \in \mathbb{R} \text{ et } y_o(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right] \Rightarrow y_o(x) = e^{\alpha x}\left[k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)\right]$$

α et ω étant des constantes réelles fixées, C_1, C_2, k_1, k_2 constantes réelles quelconques.

Remarquons d'abord que $e^{\alpha x}$ étant réel, il suffit d'étudier le reste de l' expression.

Posons $C_1 = a_1 + i\, b_1$ et $C_2 = a_2 + i\, b_2$ où $i^2 = -1$
Sachant que, par définition, $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i\ \sin(\omega x)$, alors

$$\left\{\begin{array}{lll} C_1\ e^{i\omega x} & = & (a_1 + i\, b_1)\left[\,\cos(\omega x) + i\ \sin(\omega x)\,\right] \\ C_2\ e^{-i\omega x} & = & (a_2 + i\, b_2)\left[\,\cos(\omega x) - i\ \sin(\omega x)\,\right] \end{array}\right.$$

Soit en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\left\{\begin{array}{lll} C_1\ e^{i\omega x} & = & [a_1 \cos(\omega x) - b_1 \sin(\omega x)] + \ i\ \ [a_1 \sin(\omega x) - b_1 \cos(\omega x)] \\ C_2\ e^{-i\omega x} & = & [a_2 \cos(\omega x) + b_2 \sin(\omega x)] + \ i\ \ [-a_2 \sin(\omega x) - b_2 \cos(\omega x)] \end{array}\right.$$

Pour imposer $y_o(x)$ réel quel que soit x , il faut que l'addition membre à membre de ces deux dernières égalités fournissent une partie imaginaire nulle :

$$(a_1 - a_2)\sin(\omega x) - (b_1 + b_2)\cos(\omega x) = 0 \quad \forall x$$

Soit le système $\left\{\begin{array}{ll} a_1 - a_2 & = 0 \\ b_1 + b_2 & = 0 \end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{lll} a_2 & = & a_1 \\ b_2 & = - & b_1 \end{array}\right.$

On obtient donc $\quad C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{i\omega x} = 2\,[a_1 \cos(\omega x) - b_1 \sin(\omega x)]$

Ce qui revient, en posant $2a_1 = k_1$ et $-2b_1 = k_2$, à l'expression cherchée : $k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)$

Complément III-C3 : EDO du 1^{er} ordre non linéaires se ramenant à une EDO linéaire : EDO de Bernoulli : $y' + yP(x) = M(x)y^{\alpha}$ $(2bis)$ (pas explicitement au programme)

Dans (2bis), $\alpha \in \mathbb{R}^* - 1$ et P et M sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, connues .

Cette EDO n'est pas linéaire, mais elle peut se ramener à une EDO linéaire du premier ordre, déjà vue. Pour cela, on effectue un changement de fonction, en posant

$$z = y^{1-\alpha} \quad \text{ce qui entraine} \quad z' = (1-\alpha)y'\ y^{-\alpha}$$

L'EDO (2bis) non linéaire en y et x devient une EDO linéaire en z et x :

$$z' + (1-\alpha)P(x)\ z = (1-\alpha)M(x) \quad \alpha \neq 1$$

qu'on sait résoudre. Ne pas oublier de revenir à y pour exprimer le résultat final.

Complément III-C4 : Application à la Physique

La Physique regorge d'équation différentielles :

- Vous avez surement rencontré une équation du type : $Mv'(t) = (P - P_a) - bv(t)$ qui décrit un type de **chute d'une masse M dans un fluide visqueux** de coefficient de frottement b, sous l'action de son poids P et de la poussée d'Archimède P_a ; Ce n'est rien d'autre qu' une EDO du 1^{er} ordre à variables séparables.
- L'équation (3.a) peut s'écrire $ay_o''(t) = -by_o'(t) - cy_o(t)$ et peut être interprétée, si a, b et c sont positifs, comme l'équation fondamentale de la dynamique de **l'oscillateur harmonique linéaire libre amorti** ; elle donne l'accélération $y_o''(t)$ à l'intant t, d'une masse a soumise à une force de rappel $-cy_o(t)$ proportionnelle à l'élongation $y_o(t)$ et soumise à une force de frottement $-by_o'(t)$ proportionnelle à la vitesse $y_o'(t)$. Un second membre apparaît si ce mouvement est forcé (ou entretenu).
- D'autres exemples sont donnés en feuille de TD n^o 5.

Chapitre IV : Suites réelles

Les SUITES réelles sont explicitement citées au programme du concours AGRO, mais pas à celui du concours VETO ; néamoins pour comprendre le chapitre sur les SÉRIES, lui au programme des deux concours, il peut être bon d'avoir assimilé ce chapitre IV

0. Plan

1. Définition d'une suite

Def.1 : Une suite numérique réelle est une succession de **nombres réels**

réelle

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

entier

écrits dans un **ordre déterminé**, fixé par l'indice i , entier naturel, variant de 1 à $+\infty$.

- Le terme a_n s'appelle le **terme général.**

- À chaque entier naturel i, est associé un nombre. On peut donc considérer qu'une suite est la restriction à $\mathbb{N}^*$ d'une fonction f de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$.[4]
Cette notation fonctionnelle peut s'avérer fructueuse lorsqu'on cherche la limite de la suite quand n tend vers l'infini, car elle est liée au comportement asymptotique de f.
Par contre, il n'est pas question de parler de dérivée d'une suite, puisqu'on ne peut plus définir d'élément infiniment petit dans $\mathbb{N}$.

- Une suite peut être définie de diverses façons. Voici quelques exemples :

Exemple 1) La suite du nombre de naissances recensées chaque jour dans une maternité

Exemple 2) La suite des décimales du nombre π (nombre irrationnel) c'est-à-dire {1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,..}

Exemple 3) La suite formée par les décimales de 13/7 (nombre rationnel) c'est-à-dire {8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5, ... }

Exemple 4) La suite de Fibonacci (Leonardo Pisano, 1170-1250) définie de façon récurrente par

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Cette suite donne le nombre de couples de lapins présents chaque mois, dans un modèle où :
– A t_1 on a un couple A de lapereaux naissants.(1 couple)
– A $t_2 = t_1 + 1$ mois, ce premier couple A de lapins est devenu pubère. (1 couple)

[4]On peut aussi commencer la liste d'indices à 0, auquel cas la suite est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

– A $t_3 = t_1 + 2$ mois, le couple A donne naissance à un couple B (2 couples)
– A $t_3 = t_1 + 3$ mois, deuxième naissance pour A (3 couples)
– A $t_3 = t_1 + 4$ mois, troisième naissance pour A , première naissance pour B (5 couples)
– ... etc
– les lapins ne meurent jamais

Exemple 5) La suite des nombres premiers $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31, 37,...\}$

Exemple 6) Des suites pouvant être définies par l'expression de leur $n^{ième}$ terme comme :

6-a) $\{a_n = n\}_{n=1}^{\infty}$ 6-b) $\left\{a_n = \dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 6-c) $\{a_n = 4 + 3(n-1)\}_{n=1}^{\infty}$

6-d) $\left\{a_n = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 6-e) $\{a_n = (-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 6-f) $\left\{a_n = 3 - \dfrac{1}{2^{n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

6-g) $\left\{a_n = \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 6-h) $\{a_n = (-1)^{n+1} n\}_{n=1}^{\infty}$

6-i) $\left\{a_n = -\dfrac{n+1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pour n impair et $\{a_n = 0\}_{n=1}^{\infty}$ pour n pair

Les figures F1, F2 et F3 ci-jointes donnent deux représentations différentes respectivement des suites 6-a), 6-b) et 6-d) : à gauche (g) sur une axe réel, chaque point a pour abscisse la valeur des a_i successifs ; à droite (d) dans un diagramme à deux dimensions, chaque point a pour abscisse l'indice i et pour ordonnée, la valeur correspondante de a_i.

2. Les suites explicitement citées au programme AGRO 2010

Suites arithmétiques et suites géométriques, de premier terme constant a_o et de raisons respectives r et q, réels constants ; ces suites sont définies dans le tableau ci-dessous :

Suite	arithmétique	géométrique
	de premier terme $a_o \in \mathbb{R}$	
	de raison $r \in \mathbb{R}^*$	de raison $q \in \mathbb{R}^*$
Définition pour $n \geq 0$	$a_{n+1} = a_n + r$	$a_{n+1} = q.a_n$
Relation entre a_n et a_o	$a_n = a_o + n.r$	$a_n = a_o.q^n$
Relation entre a_n et a_p	$a_n - a_p = (n-p)r$	$\dfrac{a_n}{a_p} = q^{n-p}$

3. Sens de variation d'une suite

Def.2 : Une suite telle que	$a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$	est dite	**strictement croissante**
	$a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$		**strictement décroissante**
	$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...$		**croissante**
	$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ...$		**décroissante**
	$a_1 = a_2 = ... = a_n = ...$		**constante ou stationnaire**
	$a_n.a_{n+1} < 0$		**alternée**

Enfin une suite strictement croissante ou (exclusif !) strictement décroissante est dite **strictement monotone**. Une suite croissante ou (exclusif !) décroissante est dite **monotone**

- Il peut arriver qu'un de ces caractères ne se dégage qu'à partir d'un certain **rang** n_o (ou indice).
- On peut vérifier que $\{a_n\}$ croissante $\Rightarrow$ $\{-a_n\}$ décroissante
- On peut vérifier que $\{a_n\}$ croissante et $c \in \mathbb{R}^{*+}$ $\Rightarrow$ $\{c.a_n\}$ croissante
- Propriétés des **suites de réels positifs** : Soit une suite $\{a_n\}$ de nombres réels positifs :

$\{a_n\}$ croissante $\iff \forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$\{a_n\}$ strictement croissante $\iff \forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$\{a_n\}$ décroissante $\iff \forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

$\{a_n\}$ strictement décroissante $\iff \forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

On appelle limite de Un en ∞, la valeur vers laquelle tend Un lorsque n tend vers ∞. On note $\lim_{n \to \infty} U_n = A$

4. Limite d'une suite, convergence d'une suite

Def.3 : Une suite $\{a_n\}$ admet la limite A, nombre réel fini, lorsque le terme général a_n s'approche de A autant que nous voulons, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A$$

et on dit que la suite **converge** vers A. Une suite non convergente est dite **divergente**

- **Autre formulation :** $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ si, étant donné un nombre positif arbitraire ϵ , aussi petit qu'on veut, il est possible de trouver un indice N tel que pour tout $n > N$, $|a_n - A| < \epsilon$.
  Cela signifie que les réels a_{N+1}, a_{N+2}, ...*etc* se trouvent tous à l'intérieur du segment $[A - \epsilon \ , \ A + \epsilon]$
  Ce qui s'écrit aussi :
  $$\boxed{\lim_{n \to \infty} (a_n - A) = 0}$$
- Si une suite admet une limite, cette limite est unique; cela signifie que, si vous trouvez 2 limites différentes sans erreur, alors la suite diverge.
- Si une suite $\{a_n\}$ converge, admettant la limite finie A, alors
  $$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_{n+2} = ... = A}$$
- Si une suite a_n converge et si sa limite A est différente de 0, alors
  $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = ... = 1}$$
  La réciproque n'existe pas; par exemple la suite arithmétique de premier terme a_o et de raison q non nulle est telle que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ et pourtant $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, cette suite ne converge pas.

MAIS

- **Lemme de d'Alembert :** Soit une suite a_n de nombres réels **positifs**, alors

Si $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \overset{\text{alors}}{\Rightarrow} \quad \{a_n\} \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

- Les figures F1, F2 et F3 illustrent respectivement la divergence de la suite 6-a) vers $+\infty$, la convergence de la suite 6-b) vers 1 et la convergence de la suite 6-d) vers 0.

  En ce qui concerne les autres suites citées en 6), on se convaincra que

  6-c) diverge vers $+\infty$

  6-e) diverge en oscillant de -1 à 1

  6-h) diverge en oscillant de $-\infty$ à $+\infty$

  6-i) diverge en oscillant de $-\infty$ à 0

  6-f) converge vers 3

  6-g) converge vers 0. La suite 6-g) est appelée **suite harmonique.**

Gate

Th.1 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Alors la suite $\{an\}$ de terme général $a_n = f(n)$ converge vers A

Par exemple, en regardant certaines fonctions étudiées en feuille de TD 1, exercice 3 :

$$f(x) = (1+\tfrac{1}{x})^x \to_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = (1+\tfrac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 0}$$

$$f(x) = x.arctan(\tfrac{1}{x}) \to_{x\to+\infty} 1 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = n.arctan(\tfrac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 1}$$

$$f(x) = x.arctan(\tfrac{1}{x^2}) \to_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = n.arctan(\tfrac{1}{n^2})\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 0}$$

$$f(x) = -x.e^{-x} \to_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = -n.e^{-n}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 0}$$

$$f(x) = x^2.e^{-x} \to_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = n^2.e^{-n}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 0}$$

$$f(x) = e^{-2/x} \to_{x\to+\infty} 1 \Rightarrow \text{la suite } \{a_n = e^{-2/n}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 1}$$

$$f(x) = -x+\sqrt{x^2-1} \to_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{la suite } \left\{a_n = -n+\sqrt{n^2-1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{converge vers 0}$$

5. Opérations sur les suites

L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des suites réelles a une structure qui découle de la structure de l'ensemble des réels, pourvu qu'on le munisse des opérations suivantes :

1) L'égalité (=) de 2 suites :	$\{a_n\}=\{b_n\}$	$\Longleftrightarrow$	$a_n = b_n$	$\forall n \in \mathbb{N}^*$
2) L'addition (+) de 2 suites :	$\{a_n\}+\{b_n\}$	=	$\{a_n + b_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*$
3) La multiplication (.) d'une suite par un réel c :	$c.\{a_n\}$	=	$\{c.a_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*$
4) Le produit (.) de 2 suites :	$\{a_n\}.\{b_n\}$	=	$\{a_n.b_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*$
5) Le quotient (/) de 2 suites :	$\{a_n\}/\{b_n\}$	=	$\{a_n/b_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Muni des lois internes 1 et 2) et de la loi externe 3), l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ a une structure d'**Espace vectoriel sur le corps de réels.**
Avec , en plus, la seconde loi interne 4), distributive par rapport à la loi de groupe (+), l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ a une structure d'**Algèbre.** C'est même une **Algèbre commutative et associative** puisque la loi 4) est commutative et associative.

Th.2 : Passage à la limite pour les lois algébriques sur les suites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(c\ a_n)=c\ \lim_{n\to\infty}a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\quad \text{à condition qu'à partir d'un certain rang}\quad \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$$

- Application : Si $\{a_n\}$ converge vers A , alors $\{a_n-A\}$ converge vers 0, ainsi que la suite $\{|a_n-A|\}$
- Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ divergent, l'une vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$, il y a indétermination pour $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$
- Si parmi les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, l'une converge vers 0 et l'autre diverge vers ∞, il y a indétermination pour $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$
- Le quotient de deux suites divergentes n'est pas nécessairement une suite divergente; par exemple $\{a_n=n^2\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n=n^3\}_{n=1}^{\infty}$ divergent, pourtant $\{u_n\}=\left\{\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0.
- Le produit de deux suites divergentes n'est pas nécessairement une suite divergente; par exemple $\{a_n=(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge alors que $\{u_n\}=\{a_n.a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 1.

Th.3 : Divergence d'une suite arithmétique

Les seules suites arithmétiques convergentes sont celles de raison nulle.

Th.4 : Convergence de la suite géométrique $\{a_n=a_o.q^n,\ q\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}^*\}$

$$\text{Elle est convergente}\quad\Longleftrightarrow\quad -1<q\leq 1$$

Si $q=1$	cette suite constante **converge vers** a_o
Si $\lvert q\rvert<1$	cette suite **converge vers 0**
Dans les autres cas	cette suite **diverge**

- **La suite arithmico-géométrique** est définie par son terme général

$$a_{n+1}=q.(a_n+r)$$

Elle décrit une évolution à 2 contributions, un terme en progression géométrique $q.a_n$ et un terme en progression arithmétique $q.r$. Elle se réduit à l'étude d'un suite géométrique en utilisant [5] le point fixe $l=\frac{q.r}{1-q}$ de $f(x)=q.(x+r)$. En effet en posant $u_{n+1}=a_{n+1}-l$, on obtient $u_{n+1}=q.u_n$ et donc

$$a_n=u_n+l$$

Alors, si $|q|<1$, la suite $\{u_n\}$ converge vers 0 et la suite $\{a_n\}$ vers l.

[5] Le point fixe de $f(x)$ est la valeur l de x telle que $f(x)=x$

6 : Théorèmes de passage à la limite dans une inégalité

Th.5 : Comparaison des limites
Soient deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \text{ converge vers A} \\ \{b_n\} \text{ converge vers B} \\ a_n \leq b_n \text{ à partir d'un certain rang } n_o \end{array} \right\} \quad \text{alors} \quad A \leq B$$

Th.6 : Divergence par majoration (minoration) par une suite divergente vers $-\infty$ $(+\infty)$
Soient deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que, à partir d'un certain rang n_o, $a_n \leq b_n$, alors

$$\{a_n\} \text{ diverge vers } +\infty \quad \Rightarrow \quad \{b_n\} \text{ diverge vers } +\infty$$
$$\{b_n\} \text{ diverge vers } -\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n\} \text{ diverge vers } -\infty$$

Th.7 : Théorème d'encadrement dit aussi du sandwich ou des gendarmes
Si trois suites $\{a_n\}$,$\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sont telles que :

$$\forall n \geq n_o \text{ on a } \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

$$\text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = A$$

- Application : Comme $-|a_n| < a_n < |a_n|$,

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

- Attention : Une suite absolument convergente n'est pas nécessairement convergente.
  Exemple : $\{|(-1)^n|\}$ converge vers 1, en tant que suite constante et égale à 1. MAIS $\{(-1)^n\}$ diverge car oscille indéfiniment de -1 à +1. L'absolue-convergence d'une suite vers A n'entraine sa convergence que lorsque $A = 0$

7. Suite bornée

Def.5 : Une suite $\{a_n\}$ telle que

$a_n \leq M$	$\forall n$	est dite **bornée supérieurement ou majorée**
$m \leq a_n$	$\forall n$	est dite **bornée inférieurement ou minorée**
$\lvert a_n\rvert \leq L$	$\forall n$	est dite **bornée**

Une suite bornée n'est pas , pour autant convergente. Voir, par exemple,la suite 6-e)
Une suite convergente est bornée.
Une suite dont la limite est $+\infty$ n'est pas bornée supérieurement
Une suite dont la limite est $-\infty$ n'est pas bornée inférieurement

8. Critère de convergence d'une suite (dé)croissante

Th.8 : Théorème fondamental

Une suite croissante $\{a_n\}$ converge $\iff$ elle est majorée. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = sup\ (a_n)\ n \in \mathbb{N}^*$

Une suite décroissante $\{a_n\}$ converge $\iff$ elle est minorée. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = inf\ (a_n)\ n \in \mathbb{N}^*$

- Autre formulation : toute suite monotone bornée est convergente.
- Il n'est pas nécessaire qu'une suite soit monotone pour converger. Tracer, par exemple, un graphe représentant la suite de terme général $a_n = 2 + e^{-n}cos(n)$
- Le théorème 8 est encore valable si on suppose la suite $\{a_n\}$ monotone seulement à partir d'un certain rang q . Alors la remarque précédente doit être aménagée dans le sens suivant :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = sup\ (a_n)\ , n \geq q \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = inf\ (a_n)\ , n \geq q$$

9. Suites adjacentes

Def.6 : Deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont dites **adjacentes** si

$$\begin{cases} \text{l'une est croissante et l'autre décroissante} \\ \{a_n - b_n\} \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

Si les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont adjacentes avec $\{a_n\}$ croissante et $\{b_n\}$ décroissante, alors

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_m$$

Th.9 : Deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ adjacentes convergent vers une même limite

10. Suites équivalentes

Def.7 :
La suite $\{a_n\}$ est dite **équivalente** à la suite $\{b_n\}$ quand $n \to \infty$ $\iff$

Il existe une suite $\{\epsilon_n\}$ convergeant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n = (1 + \epsilon_n)b_n$

OU BIEN

La suite $\{a_n\}$ est dite **équivalente** à la suite $\{b_n\}$ quand $n \to \infty$ $\iff$

Il existe une suite $\{g_n\}$ convergeant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n = g_n.b_n$

et on écrit $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ (quand $n \to \infty$)

- $\{a_n\} \sim \{b_n\} \implies \{b_n\} \sim \{a_n\}$
- $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ et $\{b_n\} \sim \{c_n\} \implies \{a_n\} \sim \{c_n\}$

Th.9 :
Si $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, alors

$$\begin{aligned} a_n \geq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} &\implies b_n \geq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} \\ a_n \leq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} &\implies b_n \leq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} \\ a_n \neq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} &\implies b_n \neq 0 \ \text{à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

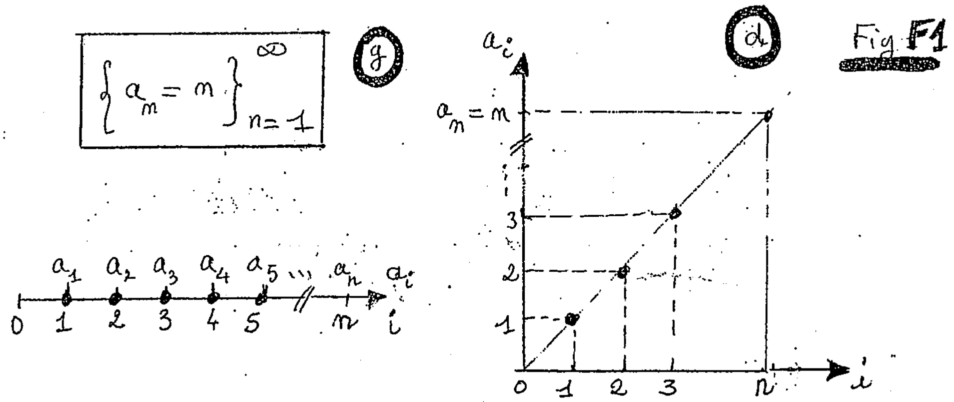
Th.10 :
Soient deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles qu'à partir d'un certain rang $b_n \neq 0$

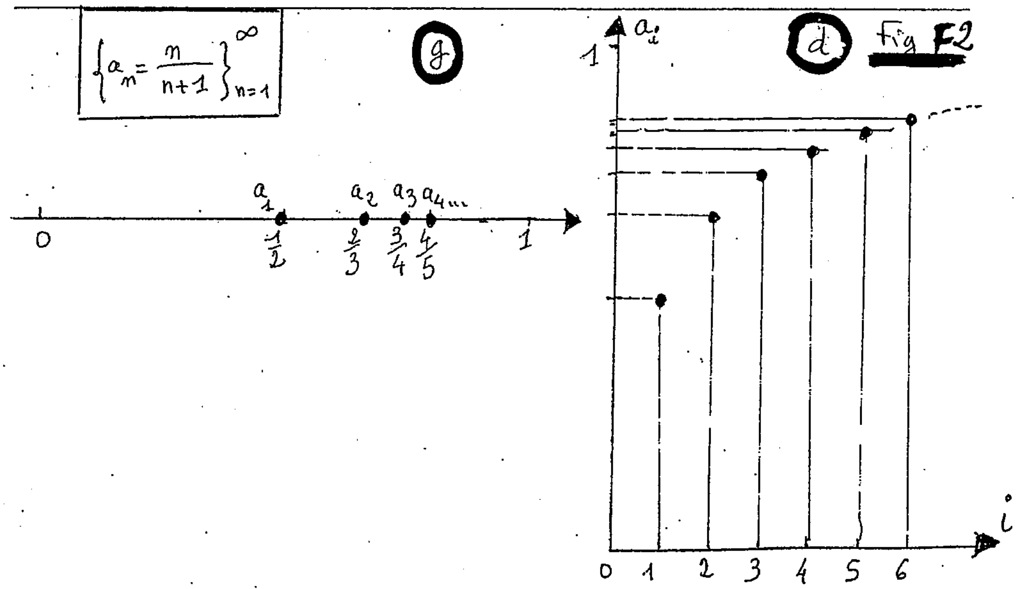
$$\text{Alors } \{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

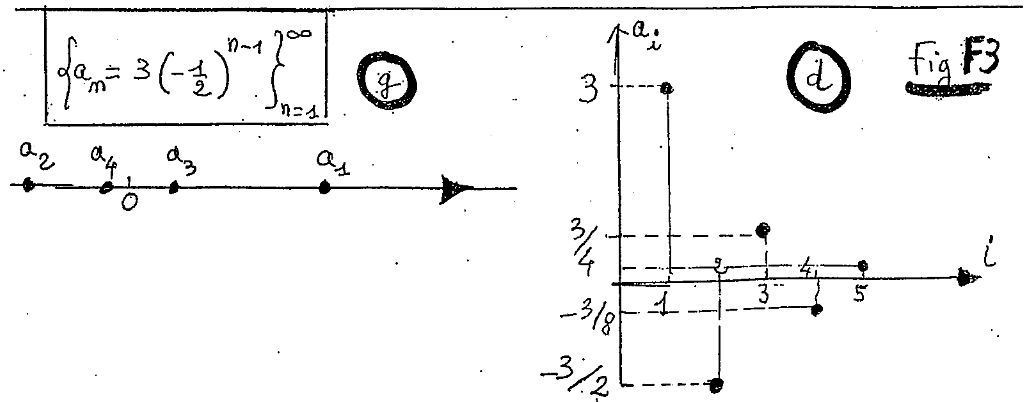
Propriétés des suites équivalentes :
Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ des suites numériques. On suppose que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Alors,

- Si $\{a_n\}$ converge, $\{b_n\}$ aussi et elles ont même limite
- Si $\{c_n\} \sim \{d_n\}$, alors $\{a_n.c_n\} \sim \{b_n.d_n\}$
- Pout tout $m \in \mathbb{N}$, $\{(a_n)^m\} \sim \{(b_n)^m\}$
- Si $\{a_n\} \neq 0$ à partir d'un certain rang, $\dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{b_n}$

11. Figures







Chapitre V : Séries réelles

0. Plan

1. Définition d'une série numérique

Def.1 : Somme partielle
Soit une suite réelle $\{a_i\}$ de nombres finis a_i . On appelle **somme partielle d'ordre** n l'expression

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Une somme partielle est une somme finie de nombres finis. Elle est donc finie
- Un exemple est la formule du binôme où x et y sont des nombres réels fixés :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^i.y^{n-i} \quad \text{où} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

- En cours de Probabilités, on rencontre, comme loi de probabilité discrète, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ définie par une probabilité que la variable aléatoire $X = i$ valant $a_i = C_n^i \, p^i.(1-p)^{n-i}$. Son espérance mathématique et sa variance sont deux séries à nombre fini de termes, respectivement :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i.C_n^i \, p^i.(1-p)^{n-i} = np \quad \text{et} \quad V(X) = \left[\sum_{i=0}^{n} i^2.C_n^i \, p^i.(1-p)^{n-i}\right] - E(X) = np(1-p)$$

Def.2 : Série numérique
Soit une suite réelle $\{a_i\}$. On appelle **série de terme général** a_i la suite $\{S_n\}$ des sommes partielles S_n de la suite $\{a_i\}$. On écrit cela en abrégé : $\sum a_i$.

1
- Une série étant une suite de somme partielles, tout le chapitre IV est utile.
- Il est fructueux de remarquer que

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

2. Convergence d'une série

Def.3 : Convergence d'une série numérique
On dit que la série de terme général a_i **converge** si la suite $\{S_n\}$ converge ; dans ce cas, on écrit

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

et S s'appelle la **somme de la série**. Sinon, on dit que la série **diverge**.

- Si la série de terme général a_i converge, alors, <u>nécessairement</u>, la suite $\{a_i\}$ converge vers 0
- Si la suite $\{a_i\}$ ne converge pas vers 0, alors a_i ne peut pas être le terme général d'une série convergente ; on dit alors que $\sum a_i$ est **grossièrement divergente** ou **trivialement divergente.**

Autrement dit :

Th.1 : Condition nécessaire à la convergence d'une série

Pour que la série de terme général a_i converge, il est **nécessaire** que la suite $\{a_i\}$ converge vers 0.

Th.2 : Condition suffisante à la divergence d'une série

Pour que la série de terme général a_i diverge, il **suffit** que la suite $\{a_i\}$ diverge ou converge vers une valeur non nulle.

test de divergence - TD8. exo AIII $\frac{\sqrt{i}}{1+2\sqrt{i}}$

- Plus généralement, le test de divergence d'une série peut être effectué en recherchant l'éventuelle non convergence vers 0 de la suite de terme général

$$\boxed{v_n = S_{f(n)} - S_{g(n)}}$$

où f et g sont des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple, on verra en TD, que la divergence de la série harmonique se voit bien en montrant que la suite de terme général $v_n = S_{2n} - S_n$ ne converge pas vers 0.

Th.3 : Soit k un entier fini. On ne change pas la nature (convergente ou divergente) d'une série si
- on modifie l'ordre des k premiers termes
- si on supprime les k premiers termes

3. Reste d'une série convergente

Def.4 : Reste d'ordre n d'une série convergente

Si la série de terme général a_i converge, on définit le reste R_n d'ordre n de la série par

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

La suite $\{R_n\}$ converge alors vers 0.

On peut aussi écrire $R_n = S - S_n$, qui montre bien que R_n est interprété comme l'erreur que l'on commet lorsqu'on approxime S par S_n.

Trouver l'équivalence $R_n \sim f(n)$ lorsque n tend vers l'infini permet de calculer le rang n' à partir duquel la somme $S_{n'}$ est approchée à moins d'un ϵ donné ; il suffit de résoudre l'équation $f(n') < \epsilon$.

Def.5 : Définition d'une série entière

On appelle série entière centrée en a une série de la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i \quad \text{où les } c_i \text{ sont des coefficients réels constants et où } x \text{ peut parcourir } \mathbb{R}$$

Th.4 : Rayon de convergence d'une série entière

Il n'y a que 3 situations possibles pour l'ensemble des valeurs de x où une série $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$ peut converger :

- La série ne converge qu'en a
- La série converge pour tout x
- La série ne converge que pour tout x tel $|x-a| < \rho$

On dit que le rayon de convergence ρ est 0 et ∞ dans les deux premiers cas.

• Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Th.5 : Reste d'ordre n d'une série entière convergente
Si la fonction f admet au voisinage de a le développement de Taylor

$$f(x) = P_n(x-a) + R_n(x-a) \text{ où } P_n \text{ est la partie régulière et } R_n \text{ le reste}$$

$$\text{Alors } \lim_{n\to\infty} R_n(x-a) = 0 \text{ pour } |x-a| < \rho \implies$$

$f(x)$ **égale la somme de sa série entière** de Taylor $\forall x$ tel que $|x-a| < \rho$

4. Séries de références

☞ On étudiera en T.D. les séries numériques suivantes, en montrant que

- **La série géométrique** $\sum_{i=0} a_i = \sum_i q^i \quad i \in \mathbb{N}$, $q =$ réel fixé converge si et seulement si $|q| < 1$ et sa somme vaut alors $\dfrac{1}{1-q}$
- les séries, **parentes de la série géométrique**, qui convergent si et seulement si $|q| < 1$:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} i.q^i = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2.q^i = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

- **La série de Riemann** : $\sum_i a_i = \sum_i \dfrac{1}{i^q} \quad i \in \mathbb{N}^*$, $q =$ réel fixé converge si et seulement si $q > 1$
- **La série harmonique** $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots \dfrac{1}{i} + \ldots$ diverge
- **La série harmonique alternée** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots (-1)^{i-1}\dfrac{1}{i} + \ldots$ converge vers $-\ln 2$

☞ Comme applications des séries dans le chapitre sur les probabilités, on trouve l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$, (sans parler des moments) de lois discrètes de probabilité. Le terme général a_i est la probabilité que $X = i$. Citons les lois usuelles :

- **La loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$, **de paramètre constant** p qui a pour terme général, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $a_i = i = p(1-p)^{i-1}$ pour laquelle

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} ip(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 p(1-p)^{i-1} - E(X) = \frac{1-p}{p}$$

- **La loi de Poisson** $\mathcal{P}(m)$, **de paramètre constant** m qui a pour terme général, $\forall i \in \mathbb{N}$, $a_i = e^{-m}\dfrac{m^i}{i!}$ pour laquelle

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} ie^{-m}\frac{m^i}{i!} = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 e^{-m}\frac{m^i}{i!} - E(X) = m$$

☞ On étudiera en T.D. la série entière suivante :

- **La série exponentielle** $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{x^i}{i!}$, qui converge, quel que soit le réel x vers e^x.

5. Séries à termes positifs

Th.6 fondamental : Une série de terme général positif converge si et seulement si **la suite des sommes partielles est majorée**

En effet la condition "suite croissante" (Th. 8 au §8 du Ch. IV)est automatiquement satisfaite à cause de la positivité des termes.

Critère de comparaison :
Soient deux suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de nombres réels **positifs**, telles qu'à partir d'un certain rang M , on ait

$$i \geq M \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_i \leq b_i.$$

Alors
$$\sum b_i \text{ converge} \Rightarrow \sum a_i \text{ converge} \quad \text{et} \quad \sum_{i=M}^{i=\infty} a_i \leq \sum_{i=M}^{i=\infty} b_i$$

$$\sum a_i \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_i \text{ diverge}$$

Critère d'équivalence :
Soient deux suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de nombres réels **positifs**, telles

$$a_i \sim b_i \quad \text{quand} \quad i \to \infty$$

Alors, les 2 séries de termes généraux respectifs a_i et b_i sont de **même nature** : si l'une converge, l'autre aussi ; si l'une diverge, l'autre aussi.

Critère par comparaison avec une intégrale impropre :

Soit une suite $\{a_i\}_{i=N}^{i=+\infty}$ de nombres réels **positifs** telle que $a_i = f(i)$ où f est une fonction **continue positive décroissante** de $[N, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(x)\, dx$ et la série $\displaystyle\sum_{i=N}^{+\infty} a_i$ sont de **même nature.**

Supplément, pour les séries à termes strictement positifs :

Règle de d'Alembert :
Soit une suite $\{a_i\}$ de nombres réels **strictement positifs**, telle que $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}$ admet une limite $L \in [0, +\infty[$ quand i tend vers l'infini

Alors

Si $L < 1$	La série de terme général a_i converge
Si $L > 1$	La série de terme général a_i diverge
Si $L = 1^+$	La série de terme général a_i diverge
Si $L = 1^-$	On ne peut pas conclure

Critère par comparaison logarithmique :
Soient deux suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de nombres réels **strictement positifs**, telles qu'à partir d'un certain rang M on ait

$$i \geq M \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{b_{i+1}}{b_i}$$

Alors
$$\sum b_i \text{ converge} \Rightarrow \sum a_i \text{ converge}$$

$$\sum a_i \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_i \text{ diverge}$$

L'inégalité précédente s'écrit, pour tout $i \geq M$, $\dfrac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \leq \dfrac{a_i}{b_i} \leq \dfrac{a_M}{b_M}$. C'est-à- dire $a_i \leq b_i \dfrac{a_M}{b_M}$. Le critère de comparaison s'applique alors au couple des séries de terme général a_i et $b_i \frac{a_M}{b_M}$ donc au couple a_i et b_i

6. Opérations sur les séries convergentes

Soient $\sum a_i$ et $\sum b_i$ deux séries et c un nombre réel. Alors, si les deux séries sont convergentes,

Les séries $\sum(c.a_i)$ et $\sum(a_i + b_i)$ convergent

Si une des séries diverge et l'autre converge $\sum(a_i + b_i)$ diverge

Si les deux séries divergent, on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum(a_i + b_i)$

7. Absolue convergence d'une série

Def.6
On dit que la série de terme général a_i converge absolument si la série de terme général $|a_i|$ converge

Th.7
Une série absolument convergente est convergente (!)

Ainsi lorsqu'on cherche à montrer la nature convergente d'une série à terme a_i général non positif, on peut passer par l'étude intermédiaire de son absolue convergence en utilisant les critères de convergence des séries à termes positifs .

Th.8 : Produit de Cauchy
Soient deux séries $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = A$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = B$ absolument convergentes.

Alors, la série, dite produit de Cauchy, définie par son terme général $w_i = \sum_{k=0}^{i} a_k.b_{i-k}$ est aussi absolument convergente et $\sum_{i=0}^{\infty} w_i = A.B$

Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2008-2009
AGRO-ECUE : 52PC2433
VETO-ECUE : 52BL2443/44
Enseignante : Yvette PONS

Chapitre VI : Compléments à l'ECUE MT23(Equations différentielles) sur les matrices et les déterminants

0. Plan

1.Matrices : définitions ou propriétés utiles

- La **trace** d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux.
- Le produit ou la somme de matrices diagonales est une matrice diagonale
- La trace, le rang, le déterminant,le polynôme caractéristique, les valeurs propres d'une matrice restent **invariants** quand on exprime cette matrice avec une autre base.
- Le **rang d'une matrice** c'est tout aussi bien
  - le nombre de colonnes linéairement indépendantes
  - le nombre de lignes linéairement indépendantes
  - la dimension de l'ensemble image de l'application linéaire qu'elle représente
- Le **produit des valeurs propres** d'une matrice, élevées chacune à sa multiplicité, est égal au déterminant de cette matrice.

  La **somme des valeurs propres** d'une matrice, chacune multipliée par sa multiplicité,st égale à la trace de cette matrice.
- La **dimension du noyau** d'une matrice ou d'une application linéaire donne le nombre de vecteurs propres (ou la dimension de l'espace propre) associés à la valeur propre 0; donc c'est la multiplicité (ou l'ordre ou la dégénérescence) de la valeur propre 0

2. Déterminants 2x2 et 3x3

Les différentes lignes seront appelées l_1, l_2, l_3 de haut en bas et les différentes colonnes seront appelées c_1, c_2, c_3 de gauche à droite.

2.a) Interprétation géométrique du déterminant

Cette interprétation est très utile pour comprendre, sinon retenir les propriétés des déterminants.

- Le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ est interprété comme l'**aire algébrique du parallélogramme** construit à partir des vecteurs V_1 et V_2 [6] du plan orienté dans le sens trigonométrique, de composantes respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

[6] Dans le poly (Dantan) distribué, ce déterminant est noté $D(V_1, V_2)$

- Le déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ est interprété comme le **volume algébrique du parallélépipède** construit à partir des vecteurs W_1, W_2 et W_3 [7] de l'espace à trois dimensions orienté selon le sens direct, de composantes respectives $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$.
  Ce déterminant égale aussi le produit mixte $(W_1 \wedge W_2).W_3$

- **Conséquences immédiates, en vrac :**
  - Le déterminant est un nombre algébrique. Il ne dépend pas de la base dans laquelle une matrice est exprimée :

$$Det(A) = Det(P^{-1}AP) \quad \text{si } P \text{ est la matrice de passage d'une base à une autre}$$

  - $Det(P) \neq 0$ si P est la matrice de passage d'une base à une autre. Cela se comprend bien puisque ses colonnes sont les composantes de vecteurs de bases, nécessairement linéairement indépendants. De même, on comprend bien que si cette base est orthonormée, cela conduit à un déterminant égal à ± 1. (Aire d'un carré de côté 1 ou volume d'un cube d'arête 1).
  - Tout ce qui peut annuler cette aire ou ce volume annule donc le déterminant : une colonne nulle, 2 colonnes proportionnelles, ou, de façon plus générale, les colonnes formant une famille liée (une colonne= combinaison linéaire d'autres colonnes)- Même chose en remplaçant "colonne" par "ligne"

2.b) Le déterminant est une forme multilinéaire alternée

- $D(V_1 \,,\, V_2 + V_3) = D(V_1 \,,\, V_2) + D(V_1 \,,\, V_3)$ et $D(\lambda.V_1 \,,\, V_2) = \lambda.D(V_1 \,,\, V_2)$ et $D(V_1 + V_2 \,,\, V_3) = D(V_1 \,,\, V_3) + D(V_2 \,,\, V_3)$ ("multilinéaire") et $D(V_1 \,,\, V_2) = -D(V_2 \,,\, V_1)$ ("alternée")

2.c) Conséquences : transformations laissant le déterminant invariant

Le déterminant d'une matrice ne change pas si

- on remplace une ligne l_i par la somme ou la différence $l_i \pm l_j$, $j \neq i$
- on remplace une colonne c_i par la somme ou la différence $c_i \pm c_j$, $j \neq i$

2.d) Attention !

Le déterminant du produit de deux matrices = le produit des déterminants
MAIS le déterminant de la somme de deux matrices $\neq$ la somme des déterminants.

[7] Dans le poly (Dantan) distribué, ce déterminant est noté $D(W_1, W_2, W_3)$

Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2008-2009
AGRO-ECUE : 52PC2433
VETO-ECUE : 52BL2443/44
Enseignante : Yvette PONS

Chapitre VII : Compléments au poly d'algèbre linéaire)

0. Plan

1. Produit cartésien de deux ensembles, de deux espaces vectoriels

- Soient deux ensembles F_1 et F_2. On appelle **produit cartésien** $F_1 \times F_2$ l'ensemble des couples ou doublets (x_1, x_2) tels que $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$
- Soient deux espaces vectoriels F_1 et F_2, de dimensions respectives d_1 et d_2. Alors $dim(F_1 \times F_2) = dim(F_1) + dim(F_2)$
- Exemple : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels ,$\mathbb{R}^6$ est l'ensemble des sextuplets de réels. $dim(\mathbb{R}^2) = dim(\mathbb{R}) + dim(\mathbb{R}) = 1 + 1 = 2$

2. Précision sur les symboles $\times$ et $+$

Dans le paragraphe précédent, vous voyez que le symbole $\times$ utilisé pour le produit cartésien de deux ensembles est le même que celui utilisé pour la multiplication dans $\mathbb{R}$. C'est dommage, mais c'est ainsi. Il convient donc d'être vigilant sur le contexte dans lequel ce symbole est utilisé.

De même quand on définit l'opération interne dans un espace vectoriel E, on l'appelle addition et on la note $+$; on devrait la noter subtilement $+_E$, mais cela surcharge l'écriture et traditionnellement on se contente de $+$, c'est-à-dire le symbole de l'addition dans $\mathbb{R}$.

L'écriture de $+_E$ simplifiée en $+$ risque d'apporter une confusion ou l'impression que les axiomes définissant l'espace vectoriel sont évidents ; montrez, par une phrase, que vous êtes conscients de ce distinguo, même(surtout) si vous adoptez, comme tout le monde, $+$ pour l'opération interne dans tout espace vectoriel quel qu'il soit..

3. Egalité de deux ensembles, de deux sous-espaces vectoriels

Soient deux ensembles F_1 et F_2. $\quad F_1 = F_2 \iff F_1 \subset F_2$ et $F_2 \subset F_1$

Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E.

$$F_1 = F_2 \iff F_1 \subset F_2 \text{ et } dim(F_1) = dim(F_2)$$

4. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe

Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E.

- On appelle **somme des deux sous-espaces vectoriels** F_1 et F_2, l'ensemble noté $F_1 + F_2$ des

$$x \in E \text{ tels qu'il existe } x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2 \text{ tels que } x = x_1 + x_2$$

- Propriéte de la somme : $F_1 + F_2$ est encore un sous- espace vectoriel de E et $dim(F_1 + F_2) \leq dim(F_1) + dim(F_2)$
- Les deux SEV F_1 et F_2 sont dits en somme directe ou la somme $F_1 + F_2$ est dite **somme directe** et est notée $F_1 \oplus F_2$ si et seulement si
  - la décomposition $x = x_1 + x_2$ est unique.
  - OU : $x_1 + x_2 = 0_E \implies x_1 = 0_E$ et $x_2 = 0_E$
  - OU : $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
- Propriété : $dim(F_1 \oplus F_2) = dim(F_1) + dim(F_2)$
- Propriété : Si F_1 et F_2 sont en somme directe, l'union d'une base de F_1 et d'une base de F_2 constitue une base de $F_1 \oplus F_2$
- Exemple : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathbb{R}$. Ici, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. $dim(\mathbb{R} \times \{0\}) = dim(\mathbb{R}) + dim(\{0\}) = 1 + 0 = 1$

5. Espace supplémentaire

Soit F_1 un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

- On appelle **supplémentaire** de F_1 dans E, tout sous-espace vectoriel G de E tel que $F_1 \oplus G = E$.
- Ce suppléméntaire n'est en général pas unique.
- Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel a pour supplémentaire une droite vectorielle quelconque non contenue dans ce plan. En effet, n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de façon unique sous la forme d'un vecteur de ce plan additionné à un vecteur de cette droite. Il y a donc une infinité de supplémentaires à ce plan vectoriel.
- Ne pas confondre avec espace complémentaire : dans $\mathbb{R}^3$, l'espace complémentaire à un plan vectoriel est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ qui sont hors de ce plan.