Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2009-2010
AGRO-ECUE : 52PC2433
VETO-ECUE : 52BL2443/44

Exercices de Mathématiques pour Préparation AGRO et VETO

Algèbre linéaire

Ceci est la suite du semestre 1 qui était consacré à l'Analyse.
Dans chaque feuille, il y a des exercices associés au thème défini dans le titre, mais aussi des exercices de révision et des sujets déjà posés aux concours.
Quelquefois, on donne, en fin d'énoncés, des indications ou les réponses.

Enseignante : Yvette PONS

Feuille 9 : Espaces vectoriels (EV) - matrices et déterminants

Exercice A - Sous-espace vectoriel (SEV) sur $\mathbb{R}$

Pour montrer qu'un ensemble F muni d'une opération interne (addition) et d'une opération externe (multiplication par un scalaire de $\mathbb{R}$) a une structure d'EV sur $\mathbb{R}$, on peut biensûrvérifier les **8 axiomes** de définition (**Cours p. 5-6**).
MAIS, si on se rend compte que F est un **sous-ensemble d'un ensemble E notoirement connu comme un I**
alors il suffit de montrer que F est un SEV de E (**3 axiomes seulement, cours p. 11**).

1) Est-ce que l'ensemble F_1 des polynômes de degré supérieur à n est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

2) Même question pour l'ensemble des :

- polynômes de degré inférieur ou égal à n (ensemble F_2)
- polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients entiers (ensemble F_3)
- fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ensemble F_4)
- fonctions non négatives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ensemble F_5)
- fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ensemble F_6)
- fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ensemble F_7)
- fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_1^2 f(x).dx = 0$ (ensemble F_8)
- solutions de l'EDO $y' = \dfrac{y}{1+t^2}$, où y est une fonction réelle de la variable réelle t (ensemble F_9)
- solutions de l'EDO $y' = \dfrac{y}{1+t^2} + 1$ (ensemble F_{10})
- solutions de l'EDO $y'' = y^2$ (ensemble F_{11})
- solutions de l'EDO $3y'' + 3y' - 6y = 0$ (ensemble F_{12})
- solutions de l'EDO $3y'' + 3y' - 6y = 1$ (ensemble F_{13})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $x = 0$ (ensemble F_{14})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $x = -1$ (ensemble F_{15})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $x > 0$ (ensemble F_{16})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $3x - 2y - 7z = 0$ (ensemble F_{17})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $3(x-1) + 2(8-y) - 7(z+4) = 0$ (ensemble F_{18})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $\dfrac{x}{3} = \dfrac{-y}{2} = \dfrac{z}{-7}$ (ensemble F_{19})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{8-y}{2} - \dfrac{z+4}{-7} = 0$ (ensemble F_{20})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (ensemble F_{21})
- triplets de réels (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (ensemble F_{22})
- quadruplets de réels (x, y, z, t) tels que $3x - 2y - 7z = 0$ (ensemble F_{23})
- quadruplets de réels (x, y, z, t) tels que $3x - 2y - 7z = 0$ et $t = 3x$ (ensemble F_{24})
- suites réelles bornées (ensemble F_{25})
- suites réelles convergentes (ensemble F_{26})
- suites réelles telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (ensemble F_{27})
- suites réelles croissantes (ensemble F_{28})
- matrices réelles à p lignes et n colonnes (ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) = F_{29}$)
- matrices réelles 3×3 diagonales (ensemble F_{30})

- matrices réelles 2×2 symétriques[1] (ensemble F_{31})
- matrices réelles 2×2 antisymétriques (ensemble F_{32})
- matrices réelles 3×3 antisymétriques (ensemble F_{33})
- combinaisons linéaires d'un nombre p de vecteurs fixés d'un EV E (ensemble F_{34})
  (Réponse :**cours, p. 15**)

Exercices B - Combinaisons linéaires (CL), famille génératrice ou système générateur

Pour démontrer qu'une famille de vecteurs de E est génératrice d'un ensemble G, il faut montrer que n'importe quel vecteur de G peut s'écrire complètement sous forme d'une CL de vecteurs de cette famille (**5 exemples dans cours p. 16-17**).

1) Soit l'ensemble G des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x = 2z$.
   - Est-ce que la famille $(2, 0, 1); (0, 1, 0)$ est génératrice de G ?
   - Est-ce que la famille $(4, 1, 2); (2, 0, 1); (0, 1, 0)$ est génératrice de G ?
   - Est-ce que l'espace engendré par la famille $(1, 0, 1); (0, 1, 0)$, c'est-à-dire VECT((1,0,1) ;(0,1,0)), est égal à G ?

2) Soit $\mathcal{P}_2(x)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On donne les polynômes suivants :

$$P_1 : x \longrightarrow P_1(x) = x + 1 \quad P_2 : x \longrightarrow P_2(x) = x + 2 \quad P_3 : x \longrightarrow P_3(x) = x^2 \quad P_4 : x \longrightarrow P_4(x) = 3$$

Est-ce que chacune des familles suivantes est génératrice de $\mathcal{P}_2(x)$?

$$P_1, P_2, P_3 \ ? \quad P_2, P_3, P_4 \ ? \quad P_1, P_2, P_3, P_4 \ ? \quad P_2, P_3 \ ?$$

Exercices C - Indépendance linéaire, famille libre

Dans le **cours, p. 20-21** se trouvent des remarques importantes en particulier :une famille libre ne contient pas le vecteur 0 ; une partie d'une famille libre est aussi une famille libre.(**4 exemples, p.18-19**)

1) Est-ce que les familles suivantes sont libres ?
   - la famille des 2 triplets $(2, 0, 1)$ $(0, 1, 0)$
   - la famille des 3 triplets $(4, 1, 2)$ $(2, 0, 1)$ $(0, 1, 0)$
   - la famille des 2 triplets $(1, 0, 1)$ $(0, 1, 0)$
   - l'ensemble des 2 fonctions $f_1 : t \longrightarrow t$ et $f_2 : t \longrightarrow t^2$
   - l'ensemble des 2 fonctions f_1, f_2 telles que $f_1 : t \longrightarrow \cos 7t$ et $f_2 : t \longrightarrow \sin 7t$
   - l'ensemble des 2 fonctions f_1, f_2 telles que $f_1 : t \longrightarrow e^t$ et $f_2 : t \longrightarrow e^{-2t}$
   - l'ensemble des 2 fonctions f_1, f_2 telles que $f_1 : t \longrightarrow e^{3t}\cos(2t)$ et $f_2 : t \longrightarrow e^{3t}\sin(2t)$
   - l'ensemble des 3 matrices $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
   - l'ensemble des 3 matrices $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

[1]Une matrice symétrique est une matrice égale à sa transposée ; une matrice antisymétrique est une matrice égale à l'opposé de sa transposée

Exercices D - Bases et dimension d'un EV, cardinal d'une famille finie de vecteurs

Rappels : si L est un ensemble fini de p éléments, alors, par définition, son cardinal est p et on note $card(L) = p$

Une base B de E est une famille libre, génératrice de E ; on a alors $dim(E) = card(B)$; si une famille L de vecteurs de E est libre, alors $card(L) \leq dim(E)$

Si F est un SEV de l'EV E tel que $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$

A partir du moment où on connait une base de E, on connait tout E.

On appelle **base canonique** la base traditionnelle, la plus simple. Par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\{(1,0),(0,1)\}$.

1) Reconsidérer les EV trouvés dans l'exercice A pour donner la dimension de chacun et proposer une base lorsqu'ils sont de dimension finie.

2) Déterminer une base de l'ensemble vectoriel des solutions réelles de l'EDO dans chacun des cas suivants :

- $y'' + y' - 2y = 0$ où y est une fonction de la variable t
- $y'' - 6y' + 9y = 0$ où y est une fonction de la variable t
- $y'' + 49y = 0$ où y est une fonction de la variable t

Exercices E - Extraits de textes de concours et autres

Ex. E-I : Sous-espace engendré- Egalité de 2 SEV - Oral agro-veto 2005

Soient E et F les SEV de $\mathbb{R}^3$ définis respectivement par :

$$E = VECT\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad F = VECT\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$$

1) Montrer que E et F sont égaux.

2) Peut-on déterminer des réels x et y, pour que le vecteur $v = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ appartienne à E ?

Ex. E-II) : Somme directe de 2 SEV (Oral agro-veto 2006 rédaction améliorée)

1) Justifier que l'ensemble F des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, quadruplets de réels $(x; y; z; t)$, tels que

$$x + y - 2z = t \qquad \text{et} \qquad t - x + y = 0$$

est un espace vectoriel.

2) Expliciter une base de F. Que vaut $dim(F)$?

3) On note G_1 l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(0,1,1,0)$ et $(-1,4,0,1)$, ce qu'on note

$$G_1 = VECT\{(0,1,1,0),(-1,4,0,1)\}$$

De même soit l'ensemble G_2 tel que

$$G_2 = VECT\{(0,-1,1,0),(-1,4,0,1)\}$$

3-a) Est-ce que les vecteurs $(0,1,1,0)$ et $(-1,4,0,1)$ sont linéairement indépendants ? Conclusion pour la dimension de G_1 ?

3-b) Est-ce que les vecteurs $(0;-1;1;0)$ et $(-1,4,0,1)$ sont linéairement indépendants ? Conclusion pour la dimension de G_2 ?

3-c) Montrer que $F \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Les deux sous-espaces vectoriels F et G_1 sont-ils en somme directe ? Quelle est la dimension de $F \oplus G_1$? En déduire alors, en utilisant ce qui précède, si $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$

3-d) Est-ce que $G_1 \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Ex. E-III : Base et dimension d'un EV - Somme directe - Oral agro-veto 2005 tel quel

Soient P et Q les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tels que } x+y+z=0 \text{ et } x-t=0\}$$

$$\text{et} \quad Q = VECT((1,1,0,1);(1,0,0,2);(2,3,0,1))$$

1) Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces P et Q

2) Soit $v = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.

3) Montrer que $\mathbb{R}^4 = P \oplus Q$.

Ex. E-IV : Sous-espace supplémentaire

Soit, dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel

$$E = VECT\{(1,1,0) \ ; \ (0,1,2)\}$$

1) Dans l'espace géométrique, quel objet P représente l'ensemble E ?

2) Rappeler la définition d'un sous-espace supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

3) Quelle est la dimension d'un tel sous-espace supplémentaire ?

4) Parmi les sous-espaces supplémentaires de E dans $\mathbb{R}^3$ quel est celui engendré par un vecteur orthogonal à P ?

Ex. E-V : Matrices et espace vectoriel - Ecrit concours B 92

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ avec a et b réels.

On pose $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Montrer que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et que $M(a,b)$ est combinaison linéaire de I et de J. En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; déterminer une base et la dimension de $\mathcal{E}$.

2) Calculer J^n pour tout entier naturel non nul n.

Ex. E-VI : Matrices et espace vectoriel - Ecrit concours B 90

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des matrices 3x3 sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble $\mathcal{M}$ des matrices de la forme :
$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & 2\alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1)-a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

1)-b) Montrer que $B = \left\{ M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \right\}$ est une base de $\mathcal{M}$.

2) Calculer M_0^2, M_1^2, M_0M_1, M_1M_0 .En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathcal{M}$, alors MM' aussi.

Ex. E-VII : Matrices symétriques et antisymétriques

Soit M une matrice quelconque de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles $n \times n$. Soit ${}^tM$ sa transposée.

1) Montrer que $M +^t M$ est une matrice symétrique et que $M -^t M$ est une matrice antisymétrique.

2) Montrer l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3) Montrer que les dimensions respectives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.

5) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ex. E-VIII : Ecrit AGRO 2009

Soient a et b , deux réels. On donne les matrices G, A, X, X' définies par :

$$G = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5+a & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer $X'X$, que l'on comparera à G. Pour quelles valeurs de a et b ces deux matrices sont elles égales ?

2) Pour quelles valeurs de a la matrice G est-elle inversible ?

3) Calculer le rang de la matrice X. En déduire celui de la matrice A.

4) Pour $a = -10$, effectuer une diagonalisation de G. On donnera les valeurs propres d G ainsi que les sous espaces propres associés.

Feuille 10 : Application linéaire (AL) - Révisions

Exercice A - Les 3 axiomes de définition d'une AL- Noyau - Image et rang - Image d'une base - Matrice représentant une AL

Rappels sur feuilles ci-jointes.

Ex. A-I : On donne les applications f suivantes avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F respectifs.
Pour chacune d'elles , on se posera les questions suivantes :

1) f est-elle linéaire ? Ne continuer qu'en cas de réponse affirmative.

2) Déterminer $Ker(f)$, puis $dim[Ker(f)]$. f est-elle injective ? (c'est-à-dire aucune image n'a deux antécédents)

3) Déterminer $Im(f)$, puis $dim[Im(f)]$. Quel est le rang de f ? f est-elle surjective ? (c'est-à-dire tout élément de F a au moins un antécédent)

4) f est-elle bijective ?

5) Calculer les images d'une base de E ; l'ensemble de ces images constitue t-il un système libre de F ? un système générateur de F ? une base de F ?

6) Donner une représentation matricielle de f dans la base de votre choix.
- i) Combien a t-elle de colonnes linéairement indépendantes ?
- ii) Combien a t-elle de lignes linéairement indépendantes ?
- iii) Comparer avec rang(f).
- iv) Cette matrice est-elle inversible ?

- Avec des ensembles de n-plets

$$\begin{array}{llll}
f_1 : (x,y,z) & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f_1(x,y,z) = (x,y,0) & \in \mathbb{R}^3 \\
f_2 : (x,y,z) & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f_2(x,y,z) = (4x-2y, 2x+y+z, z) & \in \mathbb{R}^3 \\
f_3 : (x,y,z) & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f_3(x,y,z) = (x+z, y) & \in \mathbb{R}^2 \\
f_4 : (x,y,z) & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f_4(x,y,z) = 2x-3y+4z & \in \mathbb{R} \\
f_5 : (x,y,z) & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f_5(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \in \mathbb{R} \\
f_6 : (x,y) & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f_6(x,y) = (x,y,x+y,xy) & \in \mathbb{R}^4 \\
f_7 : (x,y) & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f_7(x,y) = (x, x-y, x+y) & \in \mathbb{R}^3 \\
f_8 : (x,y) & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f_8(x,y) = (y,x) & \in \mathbb{R}^2 \\
f_9 : (x,y) & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f_9(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) & \in \mathbb{R}^2 \text{ (angle } \theta \text{ est fixé)} \\
f_{10} : (x,y) & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f_{10}(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} & \mathbb{R}
\end{array}$$

- Avec des ensembles de polynômes

$$\begin{array}{llll}
f_{11} : P \mid P(x) = a+bx+cx^2 & \in \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & f_{11}(P) = Q \text{ tel que } Q(x) = c+bx+ax^2 & \in \mathcal{P}_2 \\
f_{12} : P & \in \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & f_{12}(P) = Q \text{ tel que } Q(x) = P'(x) & \in \mathcal{P}_2 \\
f_{13} : P & \in \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & f_{13}(P) = Q = P + P' & \in \mathcal{P}_2 \\
f_{14} : P & \in \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & f_{14}(P) = Q \text{ tel que } Q(x) = P(x-1) & \in \mathcal{P}_2
\end{array}$$

Exercices F - Sujets d'oraux à VETO 2008 -VO

Ex. F-I

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{bmatrix}$$

1) Montrer sans calculs que 1 et $1+\frac{1}{n}$ sont valeurs propres de A_n. A_n est-elle diagonalisable ? Inversible ?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note B_n la matrice produit : $B_n = A_1 A_2 ... A_n$ La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Inversible ? Si oui, déterminer B_n^{-1}

Ex. F-II

Soit la matrice A $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Calculer A^2

La matrice A est-elle inversible ?

Ex. F-III

Soit n un entier ≥ 3 et a et b deux réels. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ a & 0 & ... & 0 & b \\ . & . & ... & . & . \\ a & 0 & ... & 0 & b \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_{1j} = 1 & j = 1, ..., n; \\ a_{i1} = a & i = 2, ..., n-1; \\ a_{in} = b & i = 2, ..., n-1; \\ a_{ij} = 0 & i = 2, ..., n-1, \ j = 2, ..., n-1; \\ a_{nj} = 1 & j = 1, ..., n; (\textit{oublié dans l'énoncé}) \end{cases}$$

1) Déterminer le rang de la matrice A.

2) Déterminer le noyau de A, sa dimension et en donner une base

3) La matrice A est-elle diagonalisable ?

- Avec des ensembles de matrices

$f_{15} : M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow f_{15}(M) = {}^tM$ (matrice transposée) $\in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}$

$f_{16} : M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow f_{16}(M) = Det(M) \in \mathbb{R}$

$f_{17} : M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow f_{17}(M) = Trace(M)$ (Somme des éléments diagonaux) $\in \mathbb{R}$

$f_{18} : M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow f_{18}(M) = A.M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$f_{19} : M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow f_{19}(M) = (a,d) \in \mathbb{R}^2$

Ex. A-II : agro 1985 extrait aménagé

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$.
On considère l'application T de E dans E qui, à la fonction f, fait correspondre la fonction $g = T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$$

On appelle la fonction g ainsi obtenue la transformée de f.

1-a) Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

1-b) Est-ce que la fonction $g : x \rightarrow g(x) = x$ a un antécédent par T ? En déduire si T est-elle surjective.

2) Montrer que l'application T conserve la parité des fonctions.

3) Déterminer l'ensemble des fonctions f appartenant à E telles que $T(f) = f$

Exercice B - Concours Agro-A 1999 - 3h30 - Extrait

Problème I *Etude d'un endomorphisme*

Notations : E désignera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales (Qu'on appelera aussi simplement polynômes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si n est un entier naturel, on notera :

- E_n le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $f^{(n)}$ la dérivée n-ième d'une fonction numérique réelle f.
- X^n la fonction qui à tout x réel associe x^n.
- On désignera par Δ l'application qui à tout élément P de E associe $\Delta(P)$, défini, pour tout x réel par :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

Partie A.

A.1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout n entier naturel, sa restriction à E_n définit un endomorphisme Δ_n de E_n.

A.2. Dans cette question on suppose : $n = 3$.
Ecrire la matrice de Δ_3 dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Déterminer son image et son noyau.

A.3. n désigne dans cette question un entier naturel non nul.

A.3.a Justifier les relations : $\Delta_n(E_n) = E_{n-1}$ et $ker(\Delta_n) = E_0$.

A.3.b En déduire que, pour tout polynôme Q de E_{n-1}, il existe un unique polynôme P vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \Delta_n(P) &= Q \\ \int_0^1 P(x)dx &= 0 \end{cases}$$

Exercices C - Sujets d'oraux VETO

Ex. C-I :
On considère l'application linéaire ϕ de $\mathcal{P}_2(x)$ dans $\mathcal{P}_2(x)$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, associe le polynôme : $P(0)x^2 + P'(0)x + \frac{1}{2}P''(0)$.

1) Donner la matrice canonique de ϕ .

En déduire que ϕ est bijective.

2) On pose $f = id. - \phi$. Trouver une base de $ker(f)$, $Im(f)$.
Il faut comprendre que id. signifie l'application identité

Ex. C-II :
Soit $\phi\ : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(A) = {}^tA$

1) Etudier les éléments propres de ϕ
Il faut comprendre que cela signifie : trouver les "valeurs propres" de ϕ et les "espaces propres" associés

2) ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice D - Composition d'applications linéaires

Ex. D-I :

On considère l'endomorphisme f représenté par la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\{e_1, e_2, e_3\}$.

1) Montrer que $f \circ f(e_1) = f(e_2) = 0$. Montrer que $f \circ f(e_3) = f(e_3)$

2) En déduire l'expression de M^2

3) Expliciter $ker(f \circ f)$ et $Im(f \circ f)$ et donner leurs dimensions respectives.

4) Calculer $M^n \;\; \forall n \geq 3$.

Ex. D-II : Applications linéaires et géométrie

1) Quelle transformation du vecteur $\overrightarrow{OM}$ du plan représentent les matrices $P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

2) Par quelle matrice représenteriez-vous, dans le plan xOy, une symétrie par rapport à Ox ? Une symétrie par rapport à Oy ? Une symétrie par rapport à la première bissectrice ? Une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice ?

3) On donne la matrice $M(\gamma, Oz)$ représentant, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, une rotation $R(\gamma, Oz)$ d'angle γ autour de Oz de tout vecteur $\overrightarrow{OM}$, de composantes respectives x, y, z sur les axes Ox, Oy, Oz :

$$M(\gamma, Oz) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-a) Est-ce que l'application $R(\gamma, Oz)$ est linéaire ? bijective ?

3-b) Est-ce que, pour γ quelconque, différent de 0 et de π, $M(\gamma, Oz)$ est diagonalisable ?

3-c) Qu'est-ce que $ker[R(\gamma, Oz)]$?

3-d) Ecrire la matrice représentant, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $R(\gamma_2, Oz) \circ R(\gamma_1, Oz)$. En déduire si $R(\gamma_2, Oz) \circ R(\gamma_1, Oz) = R(\gamma_1, Oz) \circ R(\gamma_2, Oz)$.

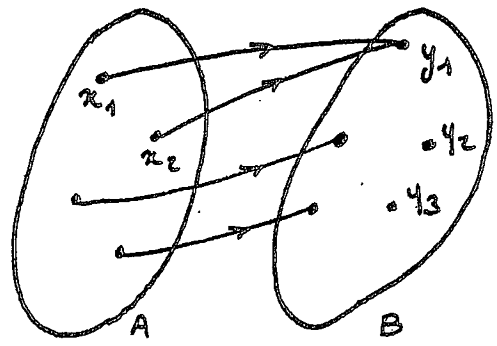
4) On donne la matrice $M(\alpha, Ox)$ représentant, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, une rotation $R(\alpha, Ox)$ d'angle α autour de Ox de tout vecteur $\overrightarrow{OM}$, de composantes respectives x, y, z sur les axes Ox, Oy, Oz :

$$M(\alpha, Ox) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

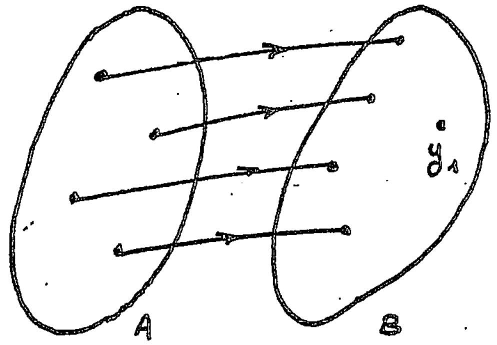
Est-ce que $R(\gamma, Oz) \circ R(\alpha, Ox) = R(\alpha, Ox) \circ R(\gamma, Oz)$?

Application d'un ensemble A dans un ensemble B.

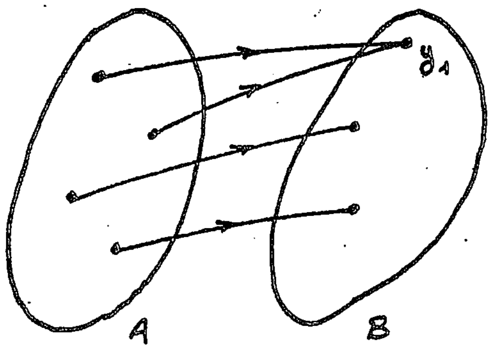
Les diagrammes sagittaux suivants illustrent les propriétés d'injectivité et de surjectivité. Ces propriétés sont indépendantes de la structure algébrique de A et B.



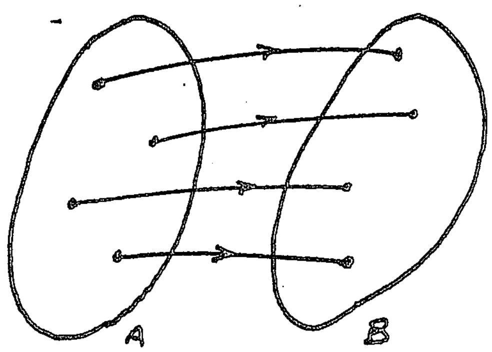
- y_1 a 2 antécédents distincts x_1 et x_2;
  $\Rightarrow$ f non injective.
- y_2 et y_3 n'ont pas d'antécédent;
  $\Rightarrow$ f non surjective.



- Tout élément de B a un antécédent <u>au plus</u>;
  $\Rightarrow$ f injective.
- y_1 n'a pas d'antécédent;
  $\Rightarrow$ f non surjective.



- y_1 a 2 antécédents distincts;
  $\Rightarrow$ f non injective.
- Tout élément de B a un antécédent <u>au moins</u>;
  $\Rightarrow$ f surjective.



- Tout élément de B a <u>un</u> antécédent <u>et un seul</u>;
  $\Rightarrow$ f surjective et injective donc bijective.

TABLEAU RECAPITULATIF
Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Re$. f est une application de E dans F.

1/ f est une application linéaire si :

L1 : pour tout $x \in E$ et $y \in E$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

L2 : pour tout $\lambda \in \Re$ et $x \in E$ $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$

Conséquence : $f(0_E) = 0_F$

2/ Image de f : Im(f) = ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent dans E, $Im(f) \subset F$.
Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.
f surjective $\Leftrightarrow$ Im(f) = F.

3/ Noyau de f : Ker(f) = ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est 0_F, $Ker(f) \subset E$.
Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.
f injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{0_E\}$.

4/ f surjective $\Leftrightarrow$ L'image d'une base de E est une famille génératrice de F.

5/ f injective $\Leftrightarrow$ L'image d'une base de E est une famille libre de F.

6/ f bijective $\Leftrightarrow$ L'image d'une base de E est une base de F.

7/ Théorème de la dimension :
dim E = dim Im(f) + dim Ker(f).

8/ Cas particulier dim E = dim F (cas des applications de E dans lui-même appelées endomorphismes de E) :
f surjective $\Leftrightarrow$ f injective.

Feuille 11 : Algèbre linéaire - général

Exercice A - Déterminant et image d'une base d'un espace vectoriel - Inversion d'une matrice

Soit E le sev du $\mathbb{R}$-ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par les 3 applications :

$$f_1 : x \longmapsto f_1(x) = 1 \quad f_2 : x \longmapsto f_2(x) = \sin x \quad f_3 : x \longmapsto f_3(x) = \sin 2x$$

Soit u l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^3$, qui, à $f \in E$ associe $u(f) = [\ f(\pi/2), f(\pi), f(\pi/6)\ ]$.

1) Pourquoi $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ constitue t-il une base de E ?

2) Ecrire la matrice U représentant u en utilisant B pour base de l'ensemble de départ et la base canonique pour base de $\mathbb{R}^3$.

3) En calculant le déterminant de U, montrer que l'image de B constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Conséquence sur l'application u ?

4) Calculer la matrice inverse U^{-1} .

5) En déduire l'expression de $u^{-1}(1,0,0), u^{-1}(0,1,0), u^{-1}(0,0,1)$. Puis l'expression de $u^{-1}(1,-1,\sqrt{3})$.

Exercice B - Rang d'une matrice 3x3 et déterminant - système d'équations linéaires

On rappelle que le déterminant d'une matrice 3x3 est interprété comme le produit mixte de 3 vecteurs V_1, V_2, V_3 c'est-à-dire le volume du paralléllépipède construit sur ces 3 vecteurs, affecté du signe + s'ils forment un trièdre direct et du signe - s'ils forment un trièdre indirect (règle du tire-bouchon).

On donne la matrice $M_a = \begin{bmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{bmatrix}$.

1) Calculer l'expression du déterminant de M_a en fonction de a. On pourra en simplifier le calcul en utilisant certaines propriétés du déterminant d'une matrice.

2) Quelles conditions doit remplir a pour que M_a soit de rang 3 ?

3) Déterminer le rang de M_a si une de ces conditions n'est pas remplie.

4) Montrer que le système $M_a \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{bmatrix}$ conduit à

- une solution unique si $a = 2$
- pas de solution si $a = 0$ ou $a = 1$
- une infinité de solutions si $a = -1$

5) Relier les résultats de la question 4) à $ker(f_a)$ et $Im(f_a)$ pour les différentes valeurs numériques de a, où f_a est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, représentée par la matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice C - Une autre façon de trouver valeurs et vecteurs propres à partir de Ker

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. On note I_3 la matrice 3×3 identité.

1) Déterminer $Ker(A - I_3)$, $Ker(A + I_3)$, $Ker(A - 3I_3)$.

2) En déduire les valeurs propres et vecteurs propres associés à A.

3) On appelle $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des ploynômes de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que A représente, dans la base $\{1, X, X^2\}$, l'application linéaire f de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$, qui, au polynôme $P(x)$, associe le polynôme $Q(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x)$

4) Montrer que la recherche des solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$(2x + 1 - \lambda)y(x) - (x^2 - 1)y'(x) = 0$$

revient à la résolution de $f(P) = \lambda P$; écrire les polynômes solution.

Exercice D - Concours AGRO 2008

On donne une matrice A qui dépend du paramètre réel a :

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 3 \\ 2a-3 & a-1 \end{bmatrix}$$

1-a) Que vaut son déterminant ?
1-b) Pour quelles valeurs de a la matrice est-elle inversible ?
1-c) Calculer dans ce dernier cas l'inverse A^{-1} de A.

2) On prend $a = 12$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

3) Même question avec $a = 2$.

4) Pour $a = 1$, la matrice$A$ a-t-elle encore des vecteurs propres (réels) ?

Feuille 12 : Diagonalisation d'une matrice et révisions

En italiques, on lit quelques propriétés à ne pas oublier :

- *Soit une matrice carrée A représentant un endomorphisme f, dans une certaine base d'un espace vectoriel E de dimension finie n.*
  Si la somme des dimensions des espaces propres de A égale n, alors A est diagonalisable.
- *Pour faciliter la calcul d'un déterminant, on peut faire apparaitre des 0 en remplaçant la ligne l_i par $l_i \pm l_j$ ou la colonne c_i par $c_i \pm c_j$, $i \neq j$.*
- *Pour le calcul d'un déterminant 3×3, il existe une règle visuelle, dite règle de Sarrus... pas toujours simplificatrice !*
- *Deux matrices carrées A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$*
- *La trace, le déterminant, les valeurs propres d'une matrice sont des invariants par changement de base.*
- *Une matrice triangulaire exhibe ses valeurs propres sur sa diagonale*

Exercice A -

1) Pour chacune des matrices suivantes, trouver s'il y a des valeurs propres réelles et déterminer la dimension des espaces propres associés. Sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On peut valoriser la question 1) en lui adjoignant des questions du genre suivant :

2) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x} &= y+z \\ \dot{y} &= x+z \\ \dot{z} &= x+y \end{cases}$

OU BIEN

3) Justifier que $A^n = P.D^n.P^{-1}$, où P est une matrice de passage et D une matrice diagonale, toutes deux à expliciter. Calculer A^n

OU BIEN

4) On donne un système de récurence pour trois suites $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ défini par :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

4-a) Exprimer $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$

4-b) Vous avez montré en 1) que la matrice B est diagonalisable et qu'elle est donc semblable à $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4-c) En déduire que $\begin{cases} u_n = \dfrac{2^n}{3}(u_0+v_0+w_0) + \dfrac{(-1)^n}{3}(2u_0 - v_0 - w_0) \\ v_n = \dfrac{2^n}{3}(u_0+v_0+w_0) + \dfrac{(-1)^n}{3}(-u_0 + 2v_0 - w_0) \\ w_n = \dfrac{2^n}{3}(u_0+v_0+w_0) + \dfrac{(-1)^n}{3}(-u_0 - v_0 + 2w_0) \end{cases}$

Exercice B - Diagonalisabilité et inversion sont des propriétés indépendantes

1) Exemple d'une matrice inversible mais non diagonalisable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Exemple d'une matrice non inversible mais diagonalisable :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Feuille 13 : Révisions

Exercice A - Convergence d'une série

On révise

- la condition nécessaire à la convergence d'une série
- le critère de comparaison avec une série de référence (attention, le terme général doit être positif)
- le critère de comparaison avec une intégrale impropre (attention la fonction à intégrer doit être continue,positive, décroissante sur l'intervalle d'intégration $[..,+\infty[$)
- la règle de D'Alembert (attention, le terme général doit être strictement positif)

en étudiant la nature (convergente ou divergente)des séries suivantes, de terme général

$$u_n = \frac{n-1}{3^{n+1}} \qquad u_n = 2^{2n}3^{1-n}$$

Exercices B - Calcul de la somme d'une série

1) Montrer que le nombre 2,3171717... peut s'écrire sous la forme du rapport de deux entiers : $\dfrac{1147}{495}$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

Exercice C - Des calculs de limite conduisant à la limite poissonienne de la loi binomiale

On rappelle que $1^{+\infty}$ *est une forme indéterminée ; ce genre d'indétermination pouvant être levée en utilisant la fonction composée* $\exp\circ\ln$

Soit deux réels finis constants μ et k.

1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$.

3) Une urne contient N boules,dont pN boules noires et qN boules blanches. On tire n fois une boule , en la remettant (tirage bernoullien); le résultat du tirage i est une "variable aléatoire" X_i qui vaut 1 si la boule tirée est noire et 0 si la boule tirée est blanche.

On rappelle que la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} X_i$ peut prendre toute valeur entière dans l'intervalle $[0,n]$ et que la probabilité que S_n prenne la valeur k est donnée par la loi binomiale :

$$P(S_n = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cette loi binomiale est normalisée à 1 ; en effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k} = (p+q)^n$ avec $p+q=1$ et sa moyenne est $\mu = np$.

Le but des questions suivantes est de montrer que

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow +\infty \\ p \longrightarrow 0 \\ \mu = np \text{ reste constante} \end{array}\right\} \Rightarrow C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \longrightarrow e^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!}$$

3-a) Exprimer p et q en fonction de μ et n.

3-b) Exprimer $p^k q^{n-k}$ en isolant le terme $\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$

3-c) Montrer que $\frac{C_n^k}{n^k}$ tend vers $\frac{1}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

3-d) Vous avez alors tous les éléments pour montrer la tendance de la loi binomiale à la loi de Poisson, dans ces conditions

Exercice D - Petits exercices théoriques

Exercice D-I

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x = y = z = t\}$.

1) Une application linéaire f de $E = \mathbb{R}^4$ dans F a pour noyau H . Quelle condition doit remplir nécessairement la dimension de F pour que H soit le noyau de f ?

2) Est-ce que H est le noyau de l'application linéaire f_1 de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x, y, z, t) = (x - y, y - z, x - t)$?

3) Est-ce que H est le noyau de l'application linéaire f_2 de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f_2(x, y, z, t) = (x - y, y - x, x - t, t)$?

Exercice D-II

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

1) Le but est de montrer que

$$ker(f) = ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) \cap ker(f) = \{0\}_E$$

1-a) Montrer que $ker(f) \subseteq ker(f^2)$ quel que soit l'endomorphisme f

1-b) Montrer que $ker(f) = ker(f^2) \Rightarrow Im(f) \cap ker(f) = \{0\}_E$

1-c) Montrer que $Im(f) \cap ker(f) = \{0\}_E \Leftrightarrow ker(f) = ker(f^2)$

2) Montrer que $Im(f) \cap ker(f) = \{0\}_E \Leftrightarrow ker(f) \oplus Im(f) = E$

3) Montrer que $ker(f) = ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2)$

Exercice D-III

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Montrer que $ker(f) = Im(f) \Rightarrow dim(E) = nombre\,pair$.

– *FIN* 2008/2009 : 5 *mai* 2009 –

Feuille 14 : Révisions pour oral VETO

Exercices A - Diagonalisabilité d'une matrice

Exercice A-1 (oral veto)

1) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ admet comme valeur propre simple -1 et comme valeur propre double 2. Qu'est-ce qu'on sait, à ce stade, au sujet de la dimension de l'espace propre associé à -1 ? au sujet de la dimension de l'espace propre associé à 2 ?

2) Montrer que A est diagonalisable , puis la diagonaliser en une matrice D.

3) Vérifier que $Tr(A) = Tr(D)$, $Det(A) = Det(D)$, Valeurs propres(A)=Valeurs propres(D)

Exercice A-2

Expliquer pourquoi la matrice $A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice A-3

Soit $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

3) Calculer B.

Exercice A-4

On suppose qu'on connait les valeurs propres de la matrice A. On suppose, de plus que A^{-1} existe. Montrer que les valeurs propres de A^{-1} sont alors connues.

Exercices B - Inversibilité d'une matrice

- Deux matrices semblables à une même troisième sont semblables entre elles.
- Pour montrer l'inversibilité d'une matrice $n \times n$, on peut vérifier que son déterminant est différent de 0 ; on peut, de façon équivalente, vérifier que son rang est égal à n.
- Matrice inverse d'une matrice diagonale = ...
- La matrice inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée

Exercice B-1

1) Soient deux matrices A et B telles que $A = PCP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$ où P et Q sont deux matrices inversibles. démontrer que A et B sont semblables.

2) Quelle est la matrice inverse de $M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$?

2) Quelle est la matrice inverse de $N = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$?

3) Quel est le rang de la matrice $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 20 \\ 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$? En déduire si elle est inversible.

Exercice B-2 matrices, suites, (oral VETO 2006)

Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 61 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

1-a) Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$

1-b) En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}

2-a) En déduire qu'il existe deux suites (u_k) et (v_k) telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = u_k I_3 + v_k M$

2-b) Exprimer u_k , v_k puis M^k explicitement en fonction de k

Exercice C - Raisonnement par récurrence

Exercice C-1 (oral veto)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

1) Calculer A^2 et déterminer les réels a, b tels que $A^2 = aA + bI_3$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$, tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$.

3) Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice D - Déterminant

- *Le déterminant d'une matrice est multiplié par α si on multiplie une colonne ou une ligne par α.*

Exercice D-1 (oral veto, VO)

On note Δ_n le déterminant $(n \times n)$ $\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & a & 0.. & 0 \\ y & 0 & 0 & a & .0 \\ .. & .. & .. & .. & a \end{vmatrix}$, où a, x, y sont des réels.

1) Montrer que , pour tout $n \geq 3$, $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - xya^{n-2}$.

2) En déduire Δ_n en fonction de n, x, y et a.

Exercice E - Somme directe

Exercice E-1 (oral VETO,VO)

On considère les espaces vectoriels $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + 2y - z = 0 \ et \ x + 2z - t = 0\}$ et $F = Vect\left((1, 1, 2, 3), (1, -1, 1, 0), (2, -4, 1, -3)\right)$.

1) Après avoir trouvé une base de E et de F, trouver leur dimension.

2) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$

– *FIN AGRO – VETO* 2009/2010 –

Université Paris VII - Denis Diderot
Département des Sciences de
la Nature et de la Vie

Prépa AGRO 2007-2008
ECUE : 52PC2433
Enseignant : Yvette PONS

Concours blanc - Mathématiques ; analyse et algèbre linéaire
5 avril 2008 - durée 1h30
Calculette non autorisée - Les exercices A et B sont indépendants

Exercice A - 16 points

On note
- E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- α un réel fini, strictement positif.
- F l'ensemble des fonctions f qui, à x réel, associent $f(x)$ réel défini par

$$f(x) = P(x)e^x + Q(x)e^{-x} \quad \text{où } P(x) \text{ et } Q(x) \text{ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit la famille de fonctions $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ définies respectivement par

$$f_1 : x \longrightarrow f_1(x) = e^x \qquad f_2 : x \longrightarrow f_2(x) = xe^x \qquad f_3 : x \longrightarrow f_3(x) = e^{-x} \qquad f_4 : x \longrightarrow f_4(x) = xe^{-x}$$

2-a) Expliquer pourquoi cette famille est génératrice de F

2-b) On fait l'hypothèse (H) qu'il existe quatre réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que

$$A(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x)$$

est nul pour tout x réel fini ou infini

- Calculer l'expression de $\lim_{x \longrightarrow +\infty} A(x)$. Comment concilier cette limite et l'hypothèse (H) ?
- Calculer l'expression de $\lim_{x \longrightarrow -\infty} A(x)$. Comment concilier cette limite et l'hypothèse (H)

2-c) Pourquoi la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ peut-elle servir de base B pour l'ensemble F ?

3) On note $D_1[f]$ l'application qui à $f \in F$ associe sa dérivée première, de telle sorte que :

$$D_1[f(x)] = f'(x)$$

3-a) Montrer que D_1 est un endomorphisme de F

3-b) Exprimer numériquement la matrice M_1 représentant D_1 dans la base B.

3-c) Cette matrice M_1 est-elle inversible ? (on ne demande pas d'effectuer l'inversion !)

4) Soit I la matrice identité 4x4. Soit D_2 l'endomorphisme de F représenté, dans la base B, par la matrice $M_2 = M_1^2 - I$

4-a) Exprimer numériquement la matrice M_2.

4-b) Quel est le rang de la matrice M_2 ? Quelle est la dimension de $Im(D_2)$?

4-c) Caractériser $Ker(D_2)$ et $Im(D_2)$ au moyen de certains vecteurs de la base B.

4-d) Déduire de 4-c) que $(D_2)^2[f] = 0$

4-e) Montrer que $M_1^4 - 2M_1^2 + I = 0$, c'est-à-dire la matrice nulle.

4-f) En déduire l'expression numérique de M_1^{-1}

Exercice B _ 10 points

Soient les fonctions ϕ et ψ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$\phi(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \qquad \psi(x) = x - \ln(1+x)$$

1) Calculer $\phi(0)$ et $\psi(0)$.

2) Montrer que ϕ est décroissante et ψ croissante.

3) En déduire que $\phi(x) \leq 0$ et $\psi(x) \geq 0$

4) L'indice n étant un entier naturel non nul, on considère les trois suites $\{H_n\}$,$\{G_n\}$ et $\{K_n\}$ définies respectivement par les termes généraux suivants :

$$H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \qquad G_n = H_n - \ln n \qquad K_n = H_n - \ln(n+1)$$

4-a) Montrer que $G_{n+1} - G_n = \phi\left(\frac{1}{n}\right)$

4-b) En déduire que la suite $\{G_n\}$ a un sens de variation bien défini ; lequel ?

4-c) Montrer que $K_{n+1} - K_n = \psi\left(\frac{1}{n+1}\right)$

4-d) En déduire que la suite $\{K_n\}$ a un sens de variation bien défini ; lequel ?

4-e) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (G_n - K_n)$

4-f) Calculer G_1 et K_1

4-g) Montrer que les suites $\{G_n\}$ et $\{K_n\}$ tendent vers une limite commune L telle que $0 < L \leq 1$

Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2008-2009
AGRO-ECUE : 52PC2433

Concours blanc - Mathématiques ; analyse et algèbre linéaire
4 avril 2009 - durée conseillée 1h15
Calculette non autorisée - Les exercices A,B et C sont indépendants

Toute réponse doit être justifiée - Barème indicatif

Exercice A - 7 points

Soit y une fonction réelle de la variables réelle t, sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y''. Soit f un nombre réel positif constant. On considère l'équation différentielle

$$y'' + fy' + 16y = 0$$

1) Quelle condition doit remplir le coefficient f pour que la solution générale de cette équation NE soit PAS oscillatoire ?

2) Donner une solution particulière évidente de $y'' + fy' + 16y = 16$

3) Donner la solution de $y'' + 10y' + 16y = 16 + e^{-2t}$ qui satisfait à $y(0) = 1$ et $y'(0) = \frac{37}{6}$

Exercice B - 6 points

Soit ϕ une fonction réelle de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $t \in]-\infty, +\infty[$. Elle n'est pas explicitée, ainsi sa valeur en t s'écrira $\phi(t)$. De même, la valeur en t, de sa dérivée par rapport à t s'écrira $\phi'(t)$.

On note G la fonction réelle définie par : $\forall x \in [-3, +3]$, $G(x) = \int_0^x e^t \phi(t)\, dt$

1) Calculer $G(0)$.

2) Exprimer le développement limité de $G(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 2, en fonction de $\phi(0)$ et $\phi'(0)$.

3) Quel est le domaine de définition de la fonction F telle que $F(x) = \frac{1}{e^x - 1} G(x)$

4) Montrer que F est prolongeable par continuité en $x = 0$. On appellera $\overline{F}$ la fonction prolongée, dont on explicitera clairement la définition.

5) Grâce au quotient de deux développements limités, dont l'un d'eux a déjà été calculé à la question 2),

5-a) montrer que, au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 1, $\overline{F(x)} = \phi(0) + x \left[\frac{\phi'(0)}{2}\right] + R_1(x)$

5-b) En déduire l'expression de la dérivée $\overline{F}'(0)$.

Exercice C - 7 points

Soit $\mathcal{P}_1$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 ; on décide, pour cet espace vectoriel, de choisir la base canonique

$$B_{dep} = \{1, X\}$$

où 1 et X sont les fonctions qui à tout x réel associent respectivement les réels 1 et x.

Soit E l'espace vectoriel des matrices 2x2 du type $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ où α, β sont deux réels quelconques.

1) Proposer une base B_{arr} la plus simple possible pour E.

Soit f l'application linéaire de $\mathcal{P}_1$ dans E, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f : P(x) = a + bx \quad \longrightarrow \quad f(P) = \begin{bmatrix} 0 & \displaystyle\int_0^1 P(x)dx \\ \dfrac{dP(x)}{dx} & 0 \end{bmatrix}$$

2) Ecrire la matrice M représentant f en utilisant les bases B_{dep} et B_{arr}

3) Expliciter $ker(f)$. Que vaut $dim[ker(f)]$? Quelle est la conséquence sur l'application f ?

4) Expliciter $Im(f)$. Que vaut $dim[Im(f)]$? Quelle est la conséquence sur l'application f ?

5) Calculer M^n , pour tout $n \geq 2$.

6) Pourquoi ne peut-on pas dire que M^2 représente $f \circ f$?

Université Paris VII - Denis Diderot
Département SNV
L2 Sciences et Applications
Mention : Science du vivant

Prépa Maths : 2008-2009
AGRO-ECUE : 52PC2433

Concours blanc - Mathématiques ; analyse et algèbre linéaire
10 avril 2010 - durée conseillée 1h15
Calculette non autorisée - Les exercices A et B sont indépendants

Toute réponse doit être justifiée - une indication de barème est proposée, sur 20

Exercice A - Analyse - 8 points

Soit la fonction y de la variable réelle x, dans $\mathbb{R}$, définie par l'équation différentielle :

$$y' + y = 2xe^{-x} \qquad y(0) = 0$$

1) En résolvant cette équation différentielle, trouver l'expression explicite de $y(x)$.

2) Sans tracer le graphe représentant y , on demande de montrer que :

- **2-a)** Cette fonction admet une asymptote dont on précisera l'équation et une branche parabolique dont on précisera la direction.
- **2-b)** Cette fonction est à la fois continue positive et décroissante au delà d'une valeur x_o que l'on précisera.
- **2-c)** Calculer $y(x_o)$

3) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)dx$

4) On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{n^2}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Au delà de quel rang n_o cette suite est-elle à la fois positive, majorée, minorée et décroissante ? Donner la valeur numérique majorante M et la valeur numérique minorante m .

5) Est-ce que cette suite converge ? Si oui, quelle en est sa limite ?

6) Est-ce que la série de terme général u_n est convergente ?

Exercice B - Algèbre linéaire - 12 points

Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté, dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Expliciter $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$ et $\phi(e_3)$, en fonction de e_1, e_2 et e_3

2) Est-ce que A est diagonalisable ?

3) On cherche à représenter ϕ dans une autre base, notée B', de $\mathbb{R}^3$. Pour cela :

- **3-a)** Expliciter, en fonction de e_1, e_2 et e_3, le vecteur ϵ_1 de composante 1 sur e_3 , tel que $\phi(\epsilon_1) = \epsilon_1$.
- **3-b)** On donne $\epsilon_2 = e_3 - e_2$ et $\epsilon_3 = e_3$. Montrer que la famille des trois vecteurs $\{\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3\}$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$. C'est elle qu'on notera B' .
- **3-c)** Expliciter la matrice de passage P de B à B' .
- **3-d)** Calculer P^2 et en déduire la matrice inverse P^{-1} de P .
- **3-e)** Exprimer $\phi(\epsilon_2)$ et $\phi(\epsilon_3)$, en fonction de ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 .
- **3-f)** Expliciter la matrice A' représentant ϕ dans la base B' ?
- **3-g)** Rappeler la relation entre A , P et A'

4) On donne les deux matrices I et J suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **4-a)** Calculer J^2 et J^3 . En déduire J^n pour tout n supérieur ou égal à 3.
- **4-b)** Exprimer A' en fonction de I et J .
- **4-c)** En déduire les expressions de $(A')^2$ et $(A')^3$ en fonction de I , J et J^2
- **4-d)** En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que

$$(A')^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

5) En utilisant les résultats des questions 3-g) et 4-d), expliciter la matrice A^n en exprimant chacun de ses éléments en fonction de n.